Il fantasma del solido

Maura Ughi

26 ottobre 2017

1 Introduzione

Nella Pinacoteca di Brera a Milano si può ammirare il dipinto di Piero della Francesca " Madonna e Santi ", colpisce l'uovo di struzzo appeso alla conca absidale: è una figura che dà sensazioni di regolarità e perfezione.

Figura 1: Madonna e Santi di Piero della Francesca

L'immagine dell' Uovo appare in qualche modo opposta a quella di un meteorite bitorzoluto o di uno scarto metallico di fabbricazione rugginoso, asimmetrico, pieno di buchi e rientranze. Eppure a livello più profondo nel meteorite è nascosto un bellissimo Uovo di Struzzo, anzi è proprio lui, l'Uovo, a comandare il comportamento del meteorite in molte situazioni fisiche.

Figura 2: Meteorite

Questa affermazione sembra a prima vista francamente improbabile, dobbiamo guardare con attenzione i " conti" e interpretarli nel modo geometrico giusto per crederci. I " conti" di cui si parla sono quelli abitualmente compresi negli argomenti "Trasformazione d'inerzia" e "Dinamica dei rigidi" dei testi moderni di Meccanica Classica. Oggi tutto sembra relativamente semplice: per ogni sistema di punti dotati di massa valgono le Equazioni Cardinali della Dinamica, se in particolare consideriamo un corpo solido indeformabile (in gergo un rigido) libero queste equazioni ci dicono che la risultante delle forze agisce sul centro di massa del corpo tramite la sua massa, mentre il momento risultante rispetto al centro di massa agisce sulla velocità angolare del corpo tramite gli elementi d'inerzia (momenti d'inerzia e momenti deviatori). La struttura algebrica dell'insieme degli elementi d'inerzia (trasformazione d'inerzia) è naturalmente legata all'Ellissoide d'Inerzia Centrale ed ecco che compare il "Fantasma del solido" cioè l'Uovo-Ellissoide. Ogni solido, per quanto brutto e irregolare, sempre avrà un Ellissoide associato e il suo moto dipenderà dalla forma precisa del suo "Fantasma", questo ci dicono le equazioni.

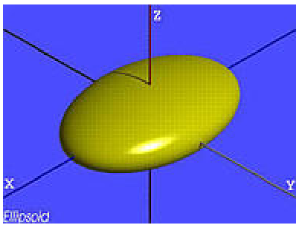

Figura 3: Ellissoide

Non è affatto ovvio però come si sia arrivati a questo bel modello. Dare una rapida scorsa all'evoluzione storica del problema del moto di un corpo solido può servire a capire meglio la difficoltà del problema, le sue motivazioni e anche ad apprezzare fino in fondo il significato del "Fantasma".

2 Dal moto di un “punto ” al moto della Terra

Tutto inizia con " un punto", di questo parlano Galileo e Newton, ma questo è solo il "punto di partenza" di una lunga strada. Pensiamo a un argomento che oggi diamo per scontato: il moto della Terra intorno al Sole. Quando diciamo che " la Terra percorre una ellisse di cui il Sole occupa uno dei fuochi" stiamo in realtà pensando a una semplificazione del problema astronomico in cui consideriamo la Terra come un punto materiale (cioè dotato di massa) soggetto all'attrazione gravitazionale Newtoniana del Sole visto come centro di attrazione fisso. Questa è una buona prima approssimazione. Se però vogliamo studiare il moto della Luna dobbiamo tenere conto delle mutue interazioni Terra-Sole-Luna e abbiamo quindi un sistema di " tre punti" liberi, le cui distanze reciproche possono variare liberamente. Se poi vogliamo giustificare il moto di rotazione diurno della Terra, e magari anche la precessione degli equinozi e la nutazione dell'asse terrestre, non possiamo certo approssimare la Terra con " un punto". Analogamente il modello " un punto materiale" non funziona se vogliamo costruire una macchina con ruote e ingranaggi che si muovono o descrivere il moto di una nave in mare, bisogna considerare sistemi composti da uno o più corpi rigidi estesi.

Lo studio teorico è intrinsecamente connesso a svariate applicazioni in modo non sempre evidente. Ad esempio l'attenzione portata all'Astronomia anche dai vari regnanti fondatori di Accademie Scientifiche e Osservatori Reali nel corso del 1600-1700 non era solamente dettata da curiosità intellettuale, dal bisogno di nuove scoperte o dal desiderio di dimostrare oltre ogni dubbio nuovi grandi paradigmi scientifici quali, per l'appunto, la teoria copernicana e il moto della Terra (l'eppur si muove di Galileo). In questo amore per l'Astronomia c'erano anche fortissimi interessi politico-economici. Per le nuove conquiste oltre gli oceani e per il controllo dei mari erano essenziali buone carte geografiche e un buon metodo per determinare la posizione di una nave in pieno oceano, in particolare era importante la determinazione della Longitudine. Nel 1714 il Parlamento inglese, con il Longitude Act, stanziò un grosso premio (20.000 sterline di allora !) per un sistema " pratico e utile" per determinare la longitudine [3]. La strada che risultò vincitrice fu la costruzione di precisi orologi marini, dopo molte contoversie il premio fu infatti consegnato nel 1773 a John Harrison, orologiaio appunto. Ma durante quei quasi 60 anni ci fu un testa a testa fra gli orologi e i metodi astronomici. La strada astronomica era stata proposta ancora nel 1514 dall'astronomo tedesco J. Werner, Galileo seguì questa strada sfruttando i satelliti di Giove, i suoi famosi "Pianeti Medicei". In seguito l'attenzione si rivolse alla Luna, molto più facilmente osservabile dei satelliti di Giove, ma bisognava conoscerne bene il moto!. Quindi l'interesse dei grandi Stati europei, Inghilterra, Francia, Prussia, Russia per l'Astronomia (in Italia: i) la teoria copernicana era stata dichiarata eretica nel 1616 e nessuno dopo Galileo aveva voglia di rischiare il rogo o la prigione per una teoria fisica, ii) non c'era uno Stato).

Per uscire dallo schema "un punto" bisognava chiarire innanzitutto due questioni:

1) il moto di più di due punti liberi, per esempio soggetti alla legge di gravitazione come nel caso del famoso "Problema dei tre Corpi" Sole-Terra-Luna(o in generale la"Meccanica Celeste")

2) il moto di un "Rigido", cioè un solido ideale di cui si trascurano le deformazioni.

Il solo fatto che tra i Principia di Newton (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) del 1687 e i lavori risolutivi di Eulero del 1747 e 1765 intercorrano almeno 60 anni dimostra che i due problemi precedenti non erano affatto banali né "discendevano facilmente" dai Principia. Ricordiamo che ancora oggi studiamo soluzioni nuove di quelle equazioni, come applicando lenti d'ingrandimento sempre più forti a un medesimo oggetto.

Guardando velocemente all'evoluzione storica della Meccanica si ha all'inizio la sensazione che molti problemi diversi vengano presi in considerazione un pò alla rinfusa: moto della luna, pendoli vari, idrodinamica, forma di catene in equilibrio, curve di discesa più veloce, equilibrio e moto di corpi elastici, moto e stabilità delle navi(appunto!!). Molti studiosi in varie parti di Europa si occuparono di questi problemi: Huygens (olandese), i molti Bernoulli (svizzeri, la piú famosa famiglia di matematici), Fermat , D'Alembert e Maupertius (francesi), König (tedesco) . . .

Per inciso notiamo che la costruzione della Meccanica Classica, e in generale della scienza moderna, è stata veramente una impresa europea, a cui hanno contribuito molte nazionalità diverse, nonostante ci fossero nel frattempo molte guerre in giro per l'Europa.

Fisseremo l'attenzione su Eulero che (vedi [4]) stabilì con chiarezza le "Equazioni Cardinali della Dinamica", le configurazioni di un solido (angoli di Eulero), le equazioni base del suo moto (equazioni di Eulero), le proprietà fisiche degli Assi Principali d'Inerzia ma anche impostò il "Problema dei tre Corpi", insieme a troppi altri problemi importanti perché se ne possa parlare qui.

L'intuizione di associare agli Elementi d'Inerzia un Ellissoide, cioè il nostro Uovo, e di descrivere qualitativamente il moto per inerzia del solido "materializzando" l'Ellissoide stesso è posteriore a Eulero e appare nel cosìdetto "Moto alla Poinsot" nel 1834, circa 80 anni dopo i lavori di Eulero.

Ricordiamo di nuovo che la strada che porta dalle equazioni fondamentali allo studio delle loro soluzioni in generale è lunga e non è ancora finita, l'edificio eretto sulle fondamenta di Eulero è molto alto. Pensiamo solo che il modello astronomico semplice, Terra e Sole entrambi sferici e omogenei, dà il risultato imparato da tutti a scuola del centro della Terra che si muove sull'ellisse Kepleriana e la Terra che ruota uniformemente per inerzia intorno al proprio asse. Se però si considera il rigonfiamento equatoriale della Terra, la presenza di altri corpi celesti, la Luna in particolare, già le cose si complicano di molto. Ma questa è un'altra storia che però nasce dalla precedente impostazione dei problemi ed è in qualche modo da essa anticipata. Ad esempio la visione geometrica di Poinsot di un problema di dinamica anticipa la moderna visione dei Sistemi Dinamici, da Poincaré al Teorema KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) o alla Teoria del Caos.

3 Eulero

(Lehonard Euler, 1707 Basilea-1783 San Pietroburgo)

Eulero è considerato il più grande matematico dell'Illuminismo, matematico in senso lato visto che il suo nome ricorre in svariati campi, dalla Teoria dei

Figura 4: Eulero

Numeri a quella dei Grafi, dall'Analisi Matematica alla formulazione di algoritmi per il Calcolo Numerico, dalla Teoria dell'Elasticità alla Fluidodinamica ... (guardate solo le voci correlate in Wikipedia al nome di Eulero, sono trentasei). E pensate che alcuni studiosi di Storia della Scienza ritengono che svariati risultati fondamentali a cui Eulero ha sostanzialmente contribuito sono noti oggi con un nome diverso , per esempio le "Equazioni Cardinali della Dinamica" per ogni sistema meccanico (vedi [4]) .

La passione di Eulero per la Matematica fu precoce, ma fu anche contrastata dal padre che era pastore protestante di un paesino vicino a Basilea e voleva che anche il figlio lo diventasse e gli succedesse nella carica. Eulero fu quindi iscritto all'Università di Basilea in Teologia, però, come dice [1] "fortunatamente (il padre) aveva commesso l'errore di insegnare la Matematica al bambino". Inoltre, sempre fortunatamente, all'università Eulero conobbe un Bernoulli, scrive Eulero stesso : *" ... ebbi presto l'opportunità di essere presentato al famoso professore Johann Bernoulli.... Vero, egli era molto occupato e così si rifutò di darmi lezioni private; ma mi dette il molto più valido consiglio di cominciare a leggere da solo libri più difficili di matematica e di studiarli il più diligentemente possibile; se incontravo qualche ostacolo o difficoltà avevo il permesso di visitarlo liberamente ogni domenica pomeriggio e lui gentilmente mi spiegava quello che non riuscivo a capire ... "* (si tratta per essere precisi di Johann Bernoulli, padre di quello del Teorema studiato a scuola, Daniel). Per finire con la fortuna, il caso volle che J. Bernoulli fosse amico del padre pastore fin dai tempi dell'università e che, convintosi velocemente dell' eccezionalità del Nostro in Matematica, convincesse a sua volta il padre di Eulero a lasciare il figlio al suo destino di matematico.

A diciannove anni Eulero aveva già completato gli studi universitari e scritto il suo primo lavoro, a venti arrivò secondo in una competizione europea (c'erano già allora), il Grand Prize dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Merita ricordare l'argomento del concorso, trovare la migliore sistemazione degli alberi di una nave, perché indica l'attenzione che Eulero avrà per tutta la vita per i problemi che oggi si chiamerebbero "Matematica Applicata". Nel frattempo si era liberata una cattedra di Fisica presso la sua Università, Eulero fece domanda ma questa non fu accolta e allora accettò la proposta di un posto a San Pietroburgo (di Matematica applicata alla Fisiologia) presso la Accademia delle Scienze russa fondata due anni prima (fuga di cervelli anche allora). In questo trasferimento entrano ancora i Bernoulli, Nicolaus, perché fu la sua morte a liberare il posto in Russia, e Daniel (quello del Teorema), perché propose la candidatura di Eulero visto che era suo amico e ne consceva bene l'intelligenza. Dopo il ritorno di Daniel in Svizzera (pare si trovasse male in Russia) Eulero ricoprì la cattedra di Filosofia Naturale (oggi diremmo Fisica e Fisica Matematica).

Si sposò, ebbe tredici figli, lavorò moltissimo e fu in pratica il fondatore dell'Accademia russa. L'ambiente scientifico alla corte di San Pietroburgo era molto stimolante, ricordiamo solo la sua amicizia con C.Goldbach , quello della congettura di Goldbach non dimostrata ancora oggi (vedi il romanzo "Zio Petros e la congettura di Goldbach" di A.Doxiadis). I compiti di Eulero non erano solo di teoria, comprendevano anche cartografia, educazione scientifica, costruzione di macchine, navi, sistemi idraulici etc.etc.

Tra le molte altre cose Eulero si occupò delle leggi fondamentali della Meccanica, nel 1736 scrisse il lavoro "Mechanica sive motus scientia analytice exposita" in cui non parla ancora di corpi rigidi anche se su questo argomento aveva già scritto qualcosa, che però evidentemente non gli sembrava convincente visto che non lo pubblicò. In seguito, proprio per studiare il problema delle piccole oscillazioni di una nave in mare, si dedicò allo studio della precessione in tre dimensioni e arrivò alle equazioni che portano il suo nome. Da notare che prese come Ipotesi l'esistenza dei tre Assi Principali d'Inerzia; nel lavoro "Scientia Navalis" , completato nel 1738 e pubblicato nel 1749, scrisse: *"HYPOTHESIS: In omnibus corporibus acquae innatantibus praecipue vero in nauibus concipere licet tres axes per centrum gravitatis G transeuntes inter se normales ... Ex superioribus satis intellegitur corpus circa alium axem liberum et immotum gyrari non posse, nisi circa quem omnes viraes centrifugae se destruant.... "*. Individuò cioè i tre Assi Principali come gli Assi Permanenti di Rotazione rispetto a cui si annullano i momenti delle forze centrifughe, quindi li definì in modo fisico e non geometrico, notare anche la lettera G per il centro di massa, notazione che usiamo ancora oggi come d'altronde molte altre notazioni matematiche da lui introdotte.

Nel frattempo le cose non gli andavano troppo bene, perse quasi completamente la vista dell'occhio destro e non si trovava bene nella complicata e pericolosa vita di corte della Russia di quegli anni. Pare che più avanti, in Germania, per scusarsi dell'essere poco loquace disse alla regina madre di Prussia: *"... Signora, vengo da un paese in cui le persone sono impiccate se parlano... "*. Così nel 1741 accettò l'invito di Federico il Grande di Prussia di andare a Berlino a collaborare alla formazione della locale Accademia delle Scienze. Eulero scrisse ad un amico in quel periodo: *" ... Posso fare quello che voglio (nella mia ricerca)... Il re mi chiama il suo professore e penso di essere l'uomo più felice del mondo... "*. Eulero rimase a Berlino venticinque anni, fu tra i fondatori della Accademia delle Scienze prussiana, fondata nel 1744, presidente Maupertius (quello del Principio di Minima Azione); il Nostro dirigeva il settore matematico ma aveva, al solito, a che fare con molti altri problemi dalla stesura di calendari a cartografia, idraulica etc.etc. Restando sulla Meccanica scrisse con precisione le equazioni di moto per ogni punto di un sistema come equazioni differenziali, cioè come oggi le vediamo; ricordiamo che tali equazioni furono scritte sessanta anni dopo Newton, tramite esse Eulero riuscì ad impostare problemi astronomici, ad esempio il moto della Luna, che come abbiamo già visto era importante per la determinazione della longitudine e che lui per primo imposta come il "Problema dei tre Corpi" (vedi "Découverte d'un nouveau principe de mécanique" 1750, "Theoria motu Luna" 1772). Da notare che ci fu un lungo scambio epistolare con il cartografo tedesco Tobias Mayer, che, con l'aiuto dei risultati teorici di Eulero, compilò delle precise tabelle lunari che permettevano di stabilire a intervalli di dodici ore la posizione della Luna con un errore massimo di 1,5 min."Tanta accuratezza poteva permettere di stabilire la longitudine con un errore massimo di 0,5 gradi- e questo era il numero magico per vincere il premio stanziato dal Longitude Act"([3]). In effetti sia Mayer che Eulero ricevettero un premio dal Parlamento inglese per il loro lavoro.

Il 1765 segna l'affondo sul problema del moto di un rigido col lavoro "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata". La base della teoria che studiamo ancora oggi è già in questi lavori ed Eulero si rese conto perfettamente che il moto possibile di un rigido dipendeva dai tre Momenti Principali d'Inerzia, cioè dalla precisa forma dell'Uovo.

Notiamo per inciso che Eulero si occupava anche di divulgazione scientifica, a cui l'aristocrazia di allora era interessata; scrisse circa 200 lettere su argomenti scientifici alla principessa di Anhalt-Renau, nipote di Federico, poi pubblicate in un libro di successo ai suoi tempi e fonte di molte informazioni sulla personalità del Nostro ("Lettere ad una principessa tedesca").

Egli doveva essere un tipo tranquillo e, anche se poi non divenne un pastore, rimase sempre molto religioso. Questo lo rendeva poco di moda alla corte di Federico, che invece apprezzava molto Voltaire, persona di natura e credenze molto diverse. Insomma l'ambiente della corte prussiana non si confaceva più molto ad Eulero che quindi accettò l'invito della grande Caterina a tornare in Russia. Così nel 1766, a cinquantanove anni, egli tornò a San Pietroburgo, accolto con grandi onori dalla zarina che riservò per lui e i suoi diciotto familiari un palazzo e pare gli cedesse perfino uno dei suoi cuochi. Proprio in quel tempo l'occhio sinistro, quello buono, fu colpito dalla cataratta, il che lo portò a cecità totale. Questa rischiò di farlo morire bruciato nel rogo del suo palazzo nel 1771, fu salvato da un suo servitore. Nonostante la cecità e gli anni, quasi metà della sua enorme produzione scientifica fu prodotta dal 1766 in poi in Russia, dove rimase fino alla morte , avvenuta in poche ore per emorragia cerebrale nel 1783. Sicuramente lo aiutò molto la sua prodigiosa memoria, pare che potesse recitare tutta l'Eneide a memoria.

Durante il secondo soggiorno in Russia, e sempre parlando della Meccanica, si occupò dei continui elastici, di idrodinamica e, in qualche modo in risposta ad uno scritto di Lagrange che gli sembrava poco chiaro, formulò le Equazioni Cardinali della Dinamica e le Equazioni Costitutive, sostanzialmente nella formulazione che usiamo ancora oggi,vedi [4] ("Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum" 1770, "Nova methodus motum rigidorum determinandi" 1775).

Qui abbiamo parlato solo di Meccanica, in questo come in molti altri campi Eulero è stato un grande creatore di "Modelli matematici"(validi ancora oggi) di cui dà lui stesso una definizione molto chiara e attuale: *"Anche se penetrare negli intimi misteri della natura e quindi conoscere le vere cause dei fenomeni non ci é concesso, tuttavia puó accadere che alcune ipotesi siano sufficienti a spiegare molti fenomeni".*

4 Poinsot

(Louis Poinsot, 1777 Parigi-1859 Parigi)

Figura 5: Poinsot

Poinsot è un esempio di allievo ingegnere (civile) convertito alla Matematica. Dopo studi classici si iscrisse all' École Polytecnique nel 1794, nonostante un risultato negativo nell'esame di algebra, e tre anni dopo passó all' École de Ponts e Chaussée, che formava i futuri ingegneri civili. Fece anche pratica in uno studio di ingegneria civile, ma nel frattempo si occupò di argomenti più teorici anche se legati all'Ingegneria. Scrisse infatti un trattato "Éléments de Statique" 1803, che fu un successo editoriale fino al 1877, sia per la chiarezza d'esposizione che per l'uso sistematico di metodi geometrici. Forse per il successo del suo libro o per la nascente passione per la Geometria, lasciò la carriera di ingegnere e inziò nel 1804 a insegnare Matematica al Liceo Bonaparte di Parigi.

Continuò a occuparsi di Meccanica ("Mémoire sur la composition des momens e des aires dans la Mecanique" 1804, "Mémoire sur la théorie générale de l'éqúilibre e du mouvement des systèmes" 1806). Lavoró anche su argomenti di Teoria dei Numeri, in particolare equazioni diofantee. La sua passione era la Geometria, scoprí quattro nuovi poliedri regolari, due dei quali erano giá apparsi in un lavoro di J.Kepler del 1619, sebbene Poinsot non ne fosse a conoscenza, per tale motivo sono ancora noti come i poliedri di Keplero-Poinsot. Egli vedeva chiaramente la Geometria come fondamentale anche in problemi applicati tipo la Meccanica, anzi insieme a Monge contribuí ad affermare il ruolo fondamentale della Geometria nella ricerca matematica della Francia del XIX secolo.

Il suo lavoro gli fruttò la nomina prima ad ispettore dell'Università Imperiale riformata da Napoleone nel 1808 e poi a docente di Analisi Matematica e Meccanica proprio all'École Polytecnique nel 1809. Non insegnò a lungo, già nel 1812 si fece sostituire dagli assistenti (una pratica durata a lungo), da notare che tra gli assistenti c'era una persona del calibro di Cauchy. La sua reputazione di studioso cresceva, anche per i suoi lavori sui poliedri e su teoria dei numeri, tanto che, alla morte di Lagrange, fu eletto nella Accademia delle Scienze di Parigi nel 1813. Era quindi più che ben sistemato quando successe la catastrofe, cioè la caduta di Napoleone. Poinsot era chiaramente un uomo dello sconfitto regime e fu così destituito dalle sue cariche, salvo quella di esaminatore per l'ammissione all ' École Polytecnique.

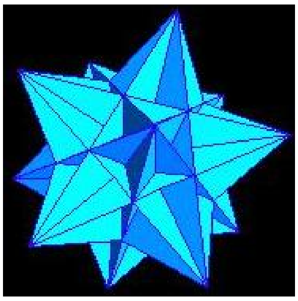

Figura 6: Grande Icosaedro

Le cose ricominciarono ad andare meglio dopo la rivoluzione del Luglio 1830 che diede più spazio alle posizioni liberali, Poinsot entrò nel Consiglio di perfezionamento dell' École Polytecnique, poi nel Bureau des Longitudes (!!) 1839, in cui lavorò per il resto dei suoi giorni, nel Consiglio Reale della Pubblica Istruzione e infine al Senato,1852. Particolare non secondario divenne anche membro della Royal Society di Londra.

Poco noto in generale nella Storia della Scienza, non lo trovate su varie Enciclopedie cartacee, è però ben noto il suo " Moto alla Poinsot" proprio a proposito della precessione per inerzia di un rigido (" Théorie nouvelle de la rotation des corps" 1834, "Théorie des conés circulaires roulants" 1853). Punto nodale della descrizione di Poinsot è la "materializzazione" dell'Ellissoide d'Inerzia , il moto del corpo avviene come se l'Ellissoide d'Inerzia, pensato proprio come un Uovo reale, rotolasse senza strisciare su un piano fisso determinato dal momento angolare costante. Questa visione astratta, affermò Poinsot *" . . . ci permette di rappresentarci il moto di un corpo rigido cosí chiaramente come quello di un punto che si muove. . . "*.

La visione qualitativa e geometrica del moto iniziata da Poinsot sarà poi ripresa, in altri termini ma con spirito simile, nel metodo, iniziato da Poincarè e che continua ancora oggi, dello studio geometrico delle traiettorie di fase.

5 Ellissoide! Chi era costui?

Fin dal tempo dei greci antichi sono note le " Sezioni Coniche" cioè le figure che si ottengono su uno schermo proiettandovi il cono di luce di una lampada con varie inclinazioni. Già da allora sono state classificate in soli tre tipi: ellissi, iperboli e parabole (ricordiamo qui il grande trattato di Apollonio di Perga, 262-190 a.C , "Le coniche"). Successivamente è stato scoperto il modo di disegnarle, cioè si sono determinate le loro "proprietà focali" (l' ellisse è il luogo geometrico dei punti. . .) e ne sono state studiate molte proprietà.

Da queste figure piane già Archimede (287-212 a.C., "Su conoidi e sferoidi") aveva ottenuto, e studiato, figure solide; ad esempio facendo ruotare una ellisse intorno ad un suo asse si ottiene un solido che assomiglia molto all'uovo di struzzo di Piero della Francesca o ad un pallone da rugby o ad un panino di hamburger (se l'ellisse è fatta ruotare intorno al suo asse minore). Questi solidi si chiamano oggi " Ellissoidi di rotazione", si può pensare agli ellissoidi in generale sgonfiando un pò il pallone da rugby in una direzione perpendicolare all'asse di rotazione, si ottiene così una figura simile ad un mango.

Una idea più precisa di questi solidi nasce in modo naturale nell'ambito della Geometria Cartesiana e non poteva venire in mente ai greci antichi, per quanto geniali come Archimede, essendo la grande idea di Cartesio di applicare l'Algebra alla Geometria molto successiva (René Descartes, 1596-1650 d.C., "Discours de la method pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences" e la sua terza appendice "La Géométrie"). Infatti l'equazione che rappresenta nel piano una ellisse rispetto ai suoi due assi di simmetria è molto semplice ," l'equazione canonica" $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Se passiamo al nostro mondo tridimensionale, aggiungiamo una terza variabile e riscriviamo l'analoga equazione canonica $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ otteniamo l'ellissoide.

Non è finita qui, perché, sempre nell'ottica di Cartesio, tutte le coniche nel piano hanno una equazione del tipo *" polinomio di secondo grado uguale costante"* ma l'unica conica limitata è l'ellisse, la parabola e l'iperbole vanno all'infinito. Analogamente nello spazio a tre dimensioni ci sono molte superfici la cui equazione è del tipo precedente, cioè *" polinomio di secondo grado uguale costante"* , tutte queste superfici si chiamano appunto Quadriche. La classificazione delle Quadriche non è semplice come quella delle Coniche , non sono solo tre tipi perché c' è una dimensione in più, e quindi molto più spazio, ma fra tutte le Quadriche l'unica limitata è proprio l'ellissoide.

6 Dal meteorite bitorzoluto all'Uovo

L'Uovo di Piero della Francesca è una bellissima figura di grande simmetria, come può essere imparentata al meteorite che non ha regolarità alcuna?

Rivediamo sommariamente le tappe di questo viaggio mentale.

- Fissiamo l'attenzione su una retta qualsiasi r passante per un punto qualsiasi O del nostro meteorite,
- calcoliamo il momento d'inerzia del meteorite rispetto ad r,
- adesso facciamo un salto mentale e disegniamo su r due punti P e P' simmetrici rispetto ad O e distanti da O in modo inversamente proporzionale alla radice del momento d'inerzia appena calcolato,
- facciamo variare in tutti i modi la retta tenendo O fisso,
- l'insieme dei punti P e P' formano una superficie mentale che dà un quadro grafico di come variano i momenti d'inerzia del nostro meteorite.

Sembra francamente miracoloso che la superficie che si ottiene sia **sempre** precisamente un Ellissoide, il nostro "Uovo", **qualunque corpo** (meteorite, nave o Terra che sia) e **qualsiasi punto** O del corpo si prenda . Eppure è così, per due motivi fondamentali, che forse sfuggono a una prima lettura.

Il primo è che la nostra misteriosa superficie è limitata, non scappa all'infinito, per il buon motivo che il momento d'inerzia è una quantità sempre positiva e noi abbiamo astutamente preso il suo inverso, quindi la distanza di O da un punto della superficie, essendo inverso di un numero positivo, è sempre limitata e non può andare all'infinito.

Ora però di superfici limitate ne esistono caterve, sia simmetriche che senza alcuna simmetria, perché viene proprio un Ellissoide, un Uovo? Il meteorite è bitorzoluto in modo del tutto irregolare, perché non viene una superficie limitata ma irregolare anche lei come il meteorite?

Per il secondo punto fondamentale, che chiama fortemente in causa la visione cartesiana dello spazio: se scriviamo l'equazione cartesiana della nostra misteriosa superficie questa risulta dai conti essere del tipo *" polinomio di secondo grado uguale costante"*, cioè una Quadrica. Ma l'unica Quadrica limitata è un Ellissoide, dobbiamo crederci!!

Dove è finito il nostro particolare meteorite con tutta la sua personalità e irregolarità? Nei sei coefficenti del polinomio di secondo grado di cui sopra, i sei Elementi d'Inerzia relativi a O. Questi sei coefficenti cambiano ma l'equazione che definisce la non più misteriosa superficie è sempre una equazione polinomiale di secondo grado e quindi abbiamo sempre un Ellissoide-Uovo.

7 Classificazione di un solido qualsiasi in tre tipi

Dato che abbiamo un Ellissoide, tanto vale sfruttarne le proprietà di simmetria e scegliere come riferimento cartesiano i suoi tre assi ortogonali di simmetria. Rispetto a tali assi l'equazione dell'ellissoide si semplifica perché spariscono i tre termini misti, in gergo i tre momenti deviatori, detti anche prodotti d'inerzia. Rimane così l'equazione canonica, $I_1x^2 + I_2y^2/ + I_3z^2 = 1$, in cui il nostro meteorite è condensato nei tre termini I_1, I_2, I_3. Ci vogliono un pó di conti è vero, ma ne vale la pena. Abbiamo condensato in sole tre quantità una enormità di informazioni, il modo di variare del momento d'inerzia del meteorite per le infinite rette passanti per un suo punto.

Ripensiamo un attimo a questo processo di condensazione delle informazioni:

- Fissiamo un punto O del nostro meteorite,
- fissiamo un riferimento cartesiano con origine in O,
- calcoliamo i sei Elementi d'Inerzia, e quindi definiamo l'equazione cartesiana dell'Ellissoide,
- in base a questi sei elementi determiniamo gli assi di simmetria dell'Ellissoide ,
- ci mettiamo nella terna di simmetria appena trovata,
- siamo rimasti con solo tre quantità, i tre momenti d'inerzia rispetto agli assi di simmetria dell'Ellissoide.

Abbiamo cioè i tre famosi assi di cui parló Eulero secoli fa , in gergo gli Assi Principali d'Inerzia e i corrispondenti Momenti Principali d'Inerzia. Questa informazione condensata è quanto ci serve sapere prima di studiare il moto del nostro meteorite.

Particolarmente importante è la precedente informazione riguardo al punto più speciale del meteorite, il suo centro di massa. Con ulteriori conti , i vari teoremi di Huygens-Steiner, si vede che l'Uovo-Ellissoide relativo al centro di massa "comanda" tutti gli altri. Concentrandoci su di lui, in gergo detto Ellissoide Centrale d'Inerzia, possiamo ora classificare **qualsiasi solido** ci venga in mente in soli **tre** possibili tipi, perché gli Ellissoidi geometrici possono essere solo di **tre** tipi, basta guardare la loro equazione canonica $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$:

1) Superfici Sferiche, tre semiassi uguali, $a = b = c$

2) Ellissoidi di rotazione (gli sferoidi di Archimede), due semiassi uguali diversi dal terzo, e.g.$a = b \neq c$, in gergo da meccanici i Giroscopi,

3) Ellissoidi propri, tre semiassi diversi tra loro, $a \neq b \neq c$

Da questo punto di vista l'Uovo di Piero della Francesca, una trottola, la Terra schiacciata ai poli, un parallelepipedo omogeneo a base quadrata sono uguali, sono tutti dei Giroscopi e, viste le equazioni di moto di Eulero, fanno moti simili in condizioni simili, ad esempio nel moto per inerzia.

Come pensava Eulero *"... alcune ipotesi sono sufficenti a spiegare molti fenomeni..."*, il Fantasma del Solido, il suo Uovo Interiore è una di queste grandi idee.

Riferimenti bibliografici

[1] E.T.Bell," I grandi matematici", Sansoni, 1997

[2] C.B.Boyer, "Storia della matematica", Mondadori, 1998

[3] D.Sobel, "Longitudine, la vera storia della scoperta avventurosa che ha cambiato l'arte della navigazione", Rizzoli, 1996

[4] C.Truesdell, "Essays in the history of mechanics", Springer Verlag, 1968

[5] MacTutor History of Mathematics, www.gap-system.org/ history/

[6] Wikipedia, l'enciclopedia libera, it.wikipedia.org/