Metodi Matematici per l'Ingegneria.
A.a. 2012-2013, sessione autunnale

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ______________________

Si risolvano gli esercizi : 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯

ESERCIZIO N. 1. Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2}\, dx\,.$$

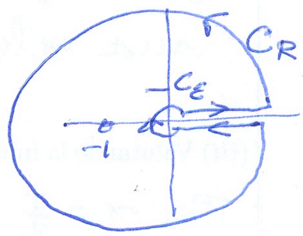
RISULTATO

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)^2} dx = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

SVOLGIMENTO

$$f(z) = \frac{z^{2/3}}{(z+1)^2}\ ;\ R(f,-1) = \frac{d}{dz} \frac{z^{2/3}\cancel{(z+1)^2}}{\cancel{(z+1)^2}}\Big|_{z=e^{i\pi}}$$

$$= \frac{2}{3} e^{-i\pi/3}$$



$$\Gamma_{\varepsilon,R} = C_R + [R,\varepsilon] + (-C_\varepsilon) + [\varepsilon,R]$$

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{z^{2/3}}{(z+1)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{2}{3} e^{-i\pi/3}$$

$$= \int_{C_R} + \int_R^\varepsilon \frac{x^{2/3} e^{\frac{4}{3}\pi i}}{(x+1)^2} dx + \int_{-C_\varepsilon} + \int_\varepsilon^R \frac{x^{2/3}}{(x+1)^2} dx$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f dz = 0\ ;\ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-C_\varepsilon} f dz = 0\ :$$

$$-e^{\frac{4}{3}\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)^2} dx + \int_0^\infty \frac{x^{2/3}}{(x+1)^2} dx = \frac{2}{3} e^{-i\pi/3} \cdot 2\pi i$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)^2} dx = \frac{4}{3}\pi i \frac{e^{-i\pi/3}}{1 - e^{4/3\pi i}} = \frac{4}{3}\pi i \frac{1}{e^{\pi i}(e^{-\frac{2}{3}\pi i} - e^{\frac{2}{3}\pi i})}$$

$$= \frac{2}{3}\pi \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

ESERCIZIO N. 2. È data la funzione $f(x) = |x|x$, per $-\pi < x < \pi$.

(i) Se ne determini lo sviluppo di Fourier. f è funzione dispari:

$a_0 = 0$, $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x|x| \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ -x^2 \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ -\pi^2 \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n}\left[x\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx\, dx \right]\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{-(-1)^n \pi^2}{n} - \frac{2}{n^2}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{-(-1)^n\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right\}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\left\{ \frac{(-1)^n\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left(1-(-1)^n\right)\right\} \operatorname{sen} nx$$

(ii) Si dica se la convergenza è puntuale o uniforme.

convergenza puntuale: infatti $f(-\pi) = -\pi^2 \neq f(\pi) = \pi^2$; ma vale criterio di Dini (Fejér): $f(x)$ è derivabile per $-\pi < x < \pi$.

(iii) Valutando la funzione in $x = \frac{\pi}{2}$ e tenendo conto che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, si verifichi che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Per $x = \frac{\pi}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$; $\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = 0$ per n pari, $= (-1)^m$ se $n = 2m+1$; $(-1)^n = -1$; $1-(-1)^n = 2$

$$\frac{\pi^2}{4} = -\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \pi^2}{2m+1}(-1) - \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}, \text{ cioè}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = 2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} - \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \cancel{2}\pi\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}\,2} - \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}$$

Cioè $$\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^2}{4}, \text{ dunque}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N.3. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = (x - |x|)e^{x-|x|}$. Si valuti di conseguenza la trasformata di $xf(x)$ e si calcoli $\mathcal{F}^2(f)(\xi)$. ($\mathcal{F}^2$ è la seconda iterata dell'operatore trasformata di Fourier).

RISULTATO

Vedi sotto

SVOLGIMENTO

$$f(x) = (x-|x|)\,e^{x-|x|} = \begin{cases} 2x\,e^{2x} & x \leq 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{0} 2x\,e^{2x - ix\xi}\,dx = \cancel{\frac{2x}{2-i\xi}\,e^{(2-i\xi)x}\Big|_{-\infty}^{0}} - \frac{2}{2-i\xi}\int_{-\infty}^{0} e^{(2-i\xi)x}\,dx = \frac{-2}{(2-i\xi)^2}$$

$$\widehat{xf}(\xi) = i\left(\frac{-2}{(2-i\xi)^2}\right)' = i\,(-2)(-2)(2-i\xi)^{-3}(-i) = \frac{4}{(2-i\xi)^3}$$

$$\mathcal{F}^2(f)(x) = 2\pi\,(-x-|-x|)\,e^{-x-|-x|} = 2\pi\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -2x\,e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. È dato il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' + x - 2y = u(t) \\ y' + 2x - y = 0\,. \end{cases}$$

Si determini la soluzione del sistema con condizioni iniziali nulle (qui $u(t)$ è la funzione gradino di Heaviside).

RISULTATO

$$x(t) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}\,t\right) u(t)$$

$$y(t) = \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos\sqrt{3}\,t\right) u(t)$$

SVOLGIMENTO

$$\begin{cases} sX + X - 2Y = \frac{1}{s} \\ sY + 2X - Y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2X = Y - sY = (1-s)Y \\ (s+1)X - 2Y = \frac{1}{s} \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X = (1-s)Y \\ (s+1)2X - 4Y = \frac{2}{s} \end{cases}$$

Quindi $(1+s)(1-s)Y - 4Y = \frac{2}{s}$, cioè

$$-(s^2+3)Y = \frac{2}{s}\,; \quad Y = \frac{-2}{s(s^2+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+i\sqrt{3}} + \frac{C}{s-i\sqrt{3}}$$

$$A = -\frac{2}{3}\,; \quad B = \lim_{s \to -i\sqrt{3}} \frac{-2\,\cancel{(s+i\sqrt{3})}}{s\,\cancel{(s+i\sqrt{3})}(s-i\sqrt{3})} = \frac{1}{3} = C$$

$$Y(s) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{s+i\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{s-i\sqrt{3}}\,;$$

$$y(t) = \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos\sqrt{3}\,t\right)\cdot u(t)\,.$$

$$X(s) = \frac{s-1}{s(s^2+3)} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{s} + \frac{1+i\sqrt{3}}{6}\,\frac{1}{s+i\sqrt{3}} + \frac{1-i\sqrt{3}}{6}\,\frac{1}{s-i\sqrt{3}}$$

$$x(t) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{3}\,t\right) u(t)$$