Metodi Matematici per l'Ingegneria.
a.a. 2012-2013, sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

Anno di Corso __________ Laurea in Ingegneria ______________________

Si risolvano gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○

ESERCIZIO N. 1. Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)\,dx}{(x^2+4)^2}.$$

RISULTATO

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+4)^2} = \frac{3\cdot\pi\cdot e^{-2}}{32}$$

SVOLGIMENTO

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}, \quad \text{poli} \quad z = 2i \ (\text{molt. } 2), \quad z = -2i \ (\text{molt. } 2)$$

$$\operatorname{Re}(f, 2i) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right)\Bigg|_{z=2i}$$

$$= \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\Bigg|_{z=2i} = \frac{ie^{iz}(z+2i)^{\cancel{2}} - 2e^{iz}\cancel{(z+2i)}}{(z+2i)^{\cancel{4}\,3}}\Bigg|_{z=2i}$$

$$= \frac{ie^{-2}\cdot 4i - 2e^{-2}}{(4i)^3} = \frac{-6e^{-2}}{-64i} = \frac{3}{32i}e^{-2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi\cancel{i}\cdot\frac{3}{32\cancel{i}}e^{-2}$$

$$= \frac{3\pi e^{-2}}{32} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos z + i\sin z}{(z^2+4)^2}dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$$

ESERCIZIO N. 2. È data la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ per $-\pi \le x \le 0$ e $f(x) = 0$ per $0 \le x \le \pi$.

(i) Se ne determini lo sviluppo in serie di Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & -\pi \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi}(\cos 0 - \cos(-\pi)) = -\frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}^2 x \Big|_{-\pi}^{0} = 0 \quad ; \text{ per } k > 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x \cos kx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [\operatorname{sen}(1+k)x + \operatorname{sen}(1-k)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-k^2}\left(-1 + (-1)^{k-1}\right) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(1-k^2)} & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$k > 1$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [\cos(1-k)x - \cos(1+k)x]\, dx = 0$$

$\cancel{b_1 = \frac{1}{\pi}}$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2}$$

(ii) Si dica se la convergenza è puntuale o uniforme.

convergenza uniforme

(iii) Valutando la funzione in $x = 0$, si determini la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)}$.

$$f(0) = 0 = -\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2}\cos 2kx$$

ESERCIZIO N.3. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-2x}x$, per $x \geq 0$ e $f(x) = 0$, per $x < 0$. Si valutino di conseguenza le trasformate di $f'(x)$ e di $f(x - \pi)$.

RISULTATO

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2+i\xi)^2}, \quad \mathcal{F}(f')(\xi) = \frac{i\xi}{(2+i\xi)^2}$$

$$\mathcal{F}(f(x-\pi))(\xi) = \frac{e^{-i\pi\xi}}{(2+i\xi)^2}$$

SVOLGIMENTO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x}x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-2x - ix\xi} x\, dx = -\frac{x\, e^{-(2+i\xi)x}}{2+i\xi}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$+ \frac{1}{2+i\xi}\int_0^{\infty} e^{-(2+i\xi)x} dx = 0 + \frac{1}{2+i\xi}\left(-\frac{e^{-(2+i\xi)x}}{2+i\xi}\Bigg|_0^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{1}{(2+i\xi)^2}$$

$$\mathcal{F}(f') = i\xi\, \mathcal{F}(f) = \frac{i\xi}{(2+i\xi)^2}$$

$$\mathcal{F}(f(x-\pi)) = \frac{e^{-i\pi\xi}}{(2+i\xi)^2}$$

ESERCIZIO N. 4. È dato il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' + y = u(t) \\ y' - x + 2y = u(t)\,. \end{cases}$$

Si determini la soluzione del sistema con condizioni iniziali nulle (qui $u(t)$ è la funzione gradino di Heaviside).

RISULTATO

$$x(t) = (1 - e^{-t})\, u(t)$$
$$y(t) = (1 - e^{-t})\, u(t)$$

SVOLGIMENTO Con Laplace

$$\begin{cases} sX + Y = \frac{1}{s} \\ sY - X + 2Y = \frac{1}{s} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = \frac{1}{s} - sX \\ 1 - s^2 X - X + \frac{2}{s} - 2sX = \frac{1}{s} \quad (\cdot s \end{cases}$$

Da cui

$$s - s^3 X - sX + 2 - 2s^2 X = 1$$

$$(s^3 + 2s^2 + s) X = s + 1\,; \quad X(s) = \frac{s+1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\,; \quad x(t) = (1 - e^{-t})\, u(t)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - s\,\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = X(s)$$

$$y(t) = (1 - e^{-t})\, u(t)$$