Metodi Matematici per l'Ingegneria.
a.a. 2012-2013, sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ______________ N. Matricola ______

Anno di Corso ______ Laurea in Ingegneria ______________

Si risolvano gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○

ESERCIZIO N. 1. Usando il metodo dei residui, si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)\, dx}{x^4+1}.$$

RISULTATO

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

SVOLGIMENTO

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\, dx$$

Consideriamo $f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^4+1}$; poli in corrispondenza di $z^4+1=0$; $z = \rho e^{i\vartheta}$ $\rho^4 e^{4i\vartheta} = 1 e^{i\pi}$

$\rho = 1$ $\vartheta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,3$ $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}$, $k=0,1,2,3$

Sono nel semipiano superiore

$z_0 = e^{i\pi/4}$ e $z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$

Residui $R(z_0) = \dfrac{z_0 e^{iz_0}}{4z_0^3} = \dfrac{e^{iz_0}}{4z_0^2} = \dfrac{e^{i(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})}}{4e^{i\pi/2}} = \dfrac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot e^{i\sqrt{2}/2}}{4i}$

$R(z_1) = \dfrac{e^{iz_1}}{4z_1^2} = \dfrac{e^{i(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})}}{4e^{\frac{3}{2}\pi i}} = \dfrac{e^{-\sqrt{2}/2}e^{-i\sqrt{2}/2}}{-4i}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x^4+1}\cdot x\,dx = i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\, dx =$$

$$\frac{2\pi i}{4i} e^{-\sqrt{2}/2}\left(e^{\frac{i\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{i\sqrt{2}}{2}}\right) = \pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ESERCIZIO N. 2. È data la funzione $f(x) = \cos(x)$ per $-\pi \le x \le 0$ e $f(x) = 1$ per $0 \le x \le \pi$.

(*i*) Se ne determini lo sviluppo in serie di Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \cos x\,dx + \int_0^{\pi} 1\,dx\right\} = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \cos^2 x\,dx + \int_0^{\pi} \cos x\,dx\right\} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \cos x \cos kx\,dx + \int_0^{\pi} \cos kx\,dx\right\} = 0 \quad \text{per } k > 1$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \cos x \sin x\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx\right\} = \frac{2}{\pi}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \cos x \sin kx\,dx + \int_0^{\pi} \sin kx\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right)\left((-1)^n-1\right) + \frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sin x - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{k(k+1)(2k+1)}$$

(*ii*) Si dica se la convergenza è puntuale o uniforme.

La convergenza è puntuale; $f(-\pi) = -1 \neq f(\pi) = 1$

(*iii*) Valutando la serie di Fourier in $x = 0$, si verifichi che si ottiene $f(0)$.

$f(0) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

tutti gli altri termini della serie sono 0

ESERCIZIO N.3. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-|x|}|x|$. Si valutino di conseguenza le trasformate di $f'(x)$ e di $e^{i\pi x}f(x)$.

RISULTATO

SVOLGIMENTO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-|x|} |x| dx = -\int_{-\infty}^{0} x e^{x(1-i\xi)} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-(1+i\xi)x} dx$$

$$= \frac{1}{(1-i\xi)^2} + \frac{1}{(1+i\xi)^2} = 2\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

i) $\hat{f}(\xi) = 2\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

ii) $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) = 2i\xi \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

iii) $\widehat{e^{i\pi x} f(x)}(\xi) = \hat{f}(\xi-\pi) = 2\dfrac{1-(\xi-\pi)^2}{(1+(\xi-\pi)^2)^2}$

ESERCIZIO N. 4. È data l'equazione differenziale lineare $y'' + 9y = f(t)$. Si determini
(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$ (dove $\delta(t)$ è la delta di Dirac),
(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = \mathrm{sen}(t)u(t)$ (dove $u(t)$ è la funzione gradino).

RISULTATO

SVOLGIMENTO

Trasformando con Laplace

i) $s^2 H + 9H = 1$; $H(s) = \frac{1}{s^2+9} = \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}$

$h(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t)\cdot u(t)$

ii) $s^2 Y + 9Y = \frac{1}{s^2+1}$; $Y(s) = \frac{1}{(s^2+9)(s^2+1)}$

$= \frac{A}{s+3i} + \frac{B}{s-3i} + \frac{C}{s+i} + \frac{D}{s-i}$

$A = \lim_{s\to -3i} \frac{s+3i}{\cancel{(s+3i)}(s-3i)(s^2+1)} = \frac{1}{-6i(-9+1)} = \frac{1}{48i}$

$B = -\frac{1}{48i}$

$C = \lim_{s\to -i} \frac{\cancel{s+i}}{(s^2+9)\cancel{(s+i)}(s-i)} = -\frac{1}{2i(-1+9)} = -\frac{1}{16i}$; $D = \frac{1}{16\cdot i}$

$Y(s) = \frac{1}{48i}\left(\frac{1}{s+3i} - \frac{1}{s-3i}\right) - \frac{1}{16i}\left(\frac{1}{s+i} - \frac{1}{s-i}\right)$

$y(t) = \left(-\frac{1}{24}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}(t)\right)u(t)$