Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria: esercizi
Ex a.a. 2013-2014, sessione invernale, II appello

Corso: prof. TIRONI

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ______________________

ESERCIZIO N. 1. È data la funzione $f(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2}$. Si calcolino, usando il metodo dei residui, i seguenti integrali

$$(a)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2} \cdot f(z)\,dz \quad \text{e} \quad (b)\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=c} \frac{1}{z^2} \cdot f(z)\,dz\,, \text{ con } 0 < c < 1.$$

Quale relazione c'è tra la funzione $f(z)$ e l'integrale (b)?

RISULTATO (a) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2} f(z)\,dz = 0$

(b) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=c} \frac{1}{z^2} f(z)\,dz = 1 = f'(0)$

SVOLGIMENTO

La funzione $\frac{1}{z^2} f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2}$ ha, all'interno del cerchio di centro $z=0$ e raggio 2, tre singolarità: $z=0$ è polo doppio, $z=1$ è polo doppio, $z=-1$ è polo semplice.

I residui sono

$$R(f,0) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}} \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^3-z^2-z+1}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0} -\frac{3z^2-2z-1}{(z^3-z^2-z+1)^2} = 1$$

$$R(f,1) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{z^2(1+z)}\right)' = \lim_{z\to 1} -\frac{2z+3z^2}{(z^2+z^3)^2} = -\frac{2+3}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$R(f,-1) = \lim_{z\to -1} \frac{\cancel{z+1}}{z^2(1-z)(1-z)\cancel{(1+z)}} = \frac{1}{4}$$

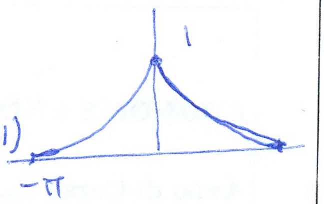
a) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2} f(z)\,dz = 1 + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = 0$

b) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=c} \frac{1}{z^2} f(z)\,dz = 1 = f'(0)$ (formula integrale di Cauchy per $f'(z)$)
$(0<c<1)$

ESERCIZIO N. 2. È data la funzione $f(x) = (1 - \frac{|x|}{\pi})^2$, definita per $|x| \le \pi$.

(*i*) Si determini lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$

La funzione è pari; dunque $b_n = 0$



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2 dx = \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Bigg|_0^\pi = -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot(-1)$$

$$a_0 = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{\cancel{\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2 \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Bigg|_0^\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\operatorname{sen} nx\,dx\right.$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n}\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{4}{\pi^2 n}\left\{-\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left\{-0\cdot\cos n\pi + \cos(n\cdot 0) - \frac{1}{\pi}\cancel{\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right)\Bigg|_0^\pi}\right\} = \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$$

(*ii*) Si dica se la convergenza della serie è puntuale o uniforme

La convergenza è uniforme: $f(x)$ continua; $f'(x) \in L^2(-\pi,\pi)$ continua tranne in 0; dunque $f(x) = f(-\pi) + \int_0^x f'(t)\,dt$,

(*iii*) Usando l'identità di Parseval, si calcoli la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

$$\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right) = 2\int_0^\pi f^2(x)\,dx \quad \text{cioè}$$

$$\pi\left(\frac{2}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^4}\frac{1}{n^4}\right) = 2\int_0^\pi \left(1-\frac{x}{\pi}\right)^4 dx = \frac{2}{5}(-\pi)\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^5\Bigg|_0^\pi = \frac{2}{5}\pi$$

$$\frac{\cancel{2}}{9} + \frac{\cancel{16}^{\,8}}{\pi^4}\sum\frac{1}{n^4} = \frac{\cancel{2}}{5}; \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^4}{8}\cdot\frac{9-5}{45} = \frac{\pi^4}{90}$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si determini la funzione $f(x)$ che ha come trasformata di Fourier di $\hat{f}(\xi) = |\xi|e^{-|\xi|}$. Si valutino successivamente la trasformata di $f'(x)$ e l'iterata $\mathcal{F}^2(f)$.

RISULTATO

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,;\quad \mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi|\xi|e^{-|\xi|}$$

$$\mathcal{F}^2(f)(x) = 2\pi f(-x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

SVOLGIMENTO

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi-|\xi|}|\xi|\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi+\xi}\xi\,d\xi + \int_{0}^{+\infty} e^{ix\xi-\xi}\xi\,d\xi\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\cancel{-\frac{\xi}{1+ix}e^{\xi(ix+1)}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=0}} + \frac{1}{1+ix}\int_{-\infty}^{0} e^{\xi(1+ix)}\,d\xi + \right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{\xi}{ix-1}\cdot e^{(ix-1)\xi}\Big|_{\xi=0}^{\infty}} - \frac{1}{ix-1}\int_0^{\infty} e^{(ix-1)\xi}\,d\xi\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{e^{(ix+1)\xi}}{(ix+1)^2}\Big|_{\xi=-\infty}^{0} - \frac{e^{(ix-1)\xi}}{(ix-1)^2}\Big|_{\xi=0}^{\infty}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{(1+ix)^2} + \frac{1}{(1-ix)^2}\right\} = \frac{1}{2\pi}\frac{-x^2\cancel{-2ix}+1+1-x^2\cancel{+2ix}}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi|\xi|e^{-|\xi|}$$

$$\mathcal{F}^2(f)(x) = 2\pi f(-x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

ESERCIZIO N. 4. È dato il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x' - x - y = 0 \\ y' + x + y = e^{-t}u(t)\,. \end{cases}$$

Si determini la soluzione del sistema con condizioni iniziali nulle (qui $u(t)$ è la funzione gradino di Heaviside).

RISULTATO $x(t) = (-1 + t + e^{-t})\,u(t)$

$y(t) = (2 - t - 2e^{-t})\,u(t)$

SVOLGIMENTO Usando Laplace:

$$\begin{cases} sX - X - Y = 0 \\ sY + X + Y = \frac{1}{s+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = (s-1)X \quad \text{sostituendo:} \\ s(s-1)X + X + (s-1)X = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

cioè $X(s^2 - \cancel{s} + \cancel{1} + \cancel{s} - \cancel{1}) = \frac{1}{s+1}$ ossia

$$X = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

$$A = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s+1}\right)' = \lim_{s\to 0} -\frac{1}{(s+1)^2} = -1$$

$$B = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+1} = 1\,; \quad C = \lim_{s\to -1}\frac{1}{s^2} = 1$$

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}\,; \quad x(t) = (-1 + t + e^{-t})\,u(t)\,.$$

$$Y = \frac{s-1}{s^2(s+1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1}{s^2} + \frac{C_1}{s+1}$$

$$A_1 = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)' = \lim_{s\to 0}\frac{s+1-(s-1)}{(s+1)^2} = 2$$

$$B_1 = \lim_{s\to 0}\frac{s-1}{s+1} = -1\,; \quad C_1 = \lim_{s\to -1}\frac{s-1}{s^2} = -2$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+1}$$

$$y(t) = (2 - t - 2e^{-t})\,u(t)\,.$$