Esame di Metodi Matematici per l'Ingegneria: esercizi
Ex a.a. 2013-2014, sessione invernale, I appello

Corso: prof. TIRONI

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ______________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli, usando il metodo dei residui il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta}{4+\cos\vartheta}\, d\vartheta\,.$$

RISULTATO

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta}{4+\cos\vartheta}\, d\vartheta = 2\pi\left(R(f,0)+R(f,-4+\sqrt{15})\right) = 2\pi\left(1-\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)$$
$$\simeq -0{,}20606..$$

SVOLGIMENTO Posto $z = e^{i\vartheta}$, si ha $d\vartheta = dz/iz$;
$\cos\vartheta = \frac{z+1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$; l'integrale in z è esteso al cerchio $|z|=1$. Con la sostituzione data

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta}{4+\cos\vartheta}\, d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\,\frac{\frac{z^2+1}{2z}}{4+\frac{z^2+1}{2z}} = \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{iz(z^2+8z+1)}\,dz$$

I poli della funzione sono: $z=0$ e $z^2+8z+1=0$ ossia $z = -4\pm\sqrt{16-1} = -4\pm\sqrt{15}$. $-4-\sqrt{15}$ è esterno a $|z|=1$, mentre è interno $z=-4+\sqrt{15}$.

$$\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(z^2+8z+1)}\,dz = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i\left(R(f,0)+R(f,-4+\sqrt{15})\right)$$

$$R(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z}\cdot(z^2+1)}{\cancel{z}(z^2+8z+1)} = 1$$

$$R(f,-4+\sqrt{15}) = \lim_{z\to -4+\sqrt{15}} \frac{\cancel{(z+4-\sqrt{15})}(z^2+1)}{z\cancel{(z+4-\sqrt{15})}(z+4+\sqrt{15})} =$$

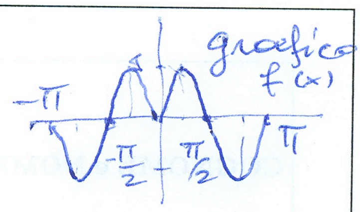
$$= \frac{(-4+\sqrt{15})^2+1}{(-4+\sqrt{15})2\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}.$$

Dunque: vedi sopra

ESERCIZIO N. 2. È data la funzione $f(x) = \text{sen}\,(2|x|)$ definita per $|x| \le \pi$.

(i) Si determini lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$

Per la parità di $f(x)$, $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^+$



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\, 2x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos(2x)\Big|_0^\pi = 0$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\, 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\, 4x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\, 2x \cos nx\,dx \quad (n \neq 2)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\text{sen}\,(2+n)x + \text{sen}\,(2-n)x\right]dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(2+n)x}{2+n} - \frac{\cos(2-n)x}{2-n}\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{2+n}}{2+n} + \frac{1}{2+n} - \frac{(-1)^{2-n}}{2-n} + \frac{1}{2-n}\right) = \frac{1}{\pi}(1-(-1)^n)\left(\frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{4-n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{8}{\pi}\frac{1}{4-(2k-1)^2}, & k \ge 1 \end{cases}$$

*

(ii) Si dica se la convergenza della serie è puntuale o uniforme

Poiché la funzione è continua con f' a tratti continua, etc, la convergenza è uniforme

(iii) Valutando la funzione in $x = 0$, si calcoli la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+4k-4k^2}$.

$$f(0) = 0 = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4-(2k-1)^2} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4-4k^2+4k-1}$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3+4k-4k^2}. \quad \text{Dunque}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3+4k-4k^2} = 0,$$

$$* \quad f \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{4-(2k-1)^2}$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = (x - |x|)e^{-\frac{|x|}{2}}$. Si valutino successivamente la trasformata di $f(2x)$ e l'iterata $\mathcal{F}^4(f)$.

RISULTATO

$$\hat{f}(\xi) = \frac{-2}{(\frac{1}{2}-i\xi)^2}\ ;\ \mathcal{F}(f(2x))\xi = \frac{-1}{(\frac{1}{2}-i\frac{\xi}{2})^2} = \frac{4}{(\xi+i)^2}$$

$$\mathcal{F}^{(4)}(f)(x) = (2\pi)^2 f(x)$$

SVOLGIMENTO

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 2xe^{+x/2} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi}\, 2x\, e^{+x/2}\, dx$$

$$= 2\left\{ \cancel{\frac{x\, e^{x(\frac{1}{2}-i\xi)}}{\frac{1}{2}-i\xi}\Bigg|_{-\infty}^{0}} - \frac{1}{\frac{1}{2}-i\xi}\int_{-\infty}^{0} e^{x(\frac{1}{2}-i\xi)}\,dx \right\} =$$

$$= -\frac{2}{(\frac{1}{2}-i\xi)^2} = \frac{2}{(\xi+\frac{i}{2})^2} = \frac{8}{(2\xi+i)^2}$$

$$\mathcal{F}(f(2x))(\xi) = \left|\frac{1}{2}\right| \hat{f}\left(\frac{\xi}{2}\right) = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{(\frac{1}{2}-i\frac{\xi}{2})^2} = \frac{-1}{(\frac{1}{2}-i\frac{\xi}{2})^2} = \frac{4}{(\xi+i)^2}$$

$$\mathcal{F}^4(f) = (2\pi)^2 f(x) = (2\pi)^2 \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 2xe^{\frac{x}{2}} & x \leq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. È data l'equazione differenziale lineare $y''' + y'' - 2y' - 2y = f(t)$. Si determini
(i) la risposta impulsiva $h(t)$, cioè relativa a $f(t) = \delta(t)$ (dove $\delta(t)$ è la delta di Dirac),
(ii) la risposta forzata con condizioni iniziali nulle relativa a $f(t) = tu(t)$ (dove $u(t)$ è la funzione gradino).

RISULTATO

i) $h(t) = \left(-e^{-t} + \frac{1}{4+2\sqrt{2}} e^{t\sqrt{2}} + \frac{1}{4-2\sqrt{2}} e^{-t\sqrt{2}}\right) u(t)$

ii) $y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - e^{-t} + \frac{1}{8+4\sqrt{2}} e^{t\sqrt{2}} + \frac{1}{8-4\sqrt{2}} e^{-t\sqrt{2}}\right) u(t)$

SVOLGIMENTO

i) $s^3 H + s^2 H - 2sH - 2H = 1;$

$H\left(s^2(s+1) - 2(s+1)\right) = 1; \quad H = \frac{1}{(s+1)(s^2-2)}$

$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-\sqrt{2}} + \frac{C}{s+\sqrt{2}}$

$A = \lim_{s \to -1} \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s^2-2)} = -1$

$B = \lim_{s \to \sqrt{2}} \frac{\cancel{s-\sqrt{2}}}{(s+1)\cancel{(s-\sqrt{2})}(s+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}$

$C = \lim_{s \to -\sqrt{2}} \frac{\cancel{s+\sqrt{2}}}{(s+1)\cancel{(s+\sqrt{2})}(s-\sqrt{2})} = \frac{1}{(-\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2})} = \frac{1}{4-2\sqrt{2}}$

$H(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \frac{1}{s-\sqrt{2}} + \frac{1}{4-2\sqrt{2}} \frac{1}{s+\sqrt{2}}$

$h(t) = \left(-e^{-t} + \frac{1}{4+2\sqrt{2}} e^{t\sqrt{2}} + \frac{1}{4-2\sqrt{2}} e^{-t\sqrt{2}}\right) u(t)$

ii)

$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s^2-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-\sqrt{2}} + \frac{E}{s+\sqrt{2}}$

$B = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s^2}}{\cancel{s^2}(s+1)(s^2-2)} = -\frac{1}{2}; \quad A = \lim_{s \to 0} \left(\frac{1}{(s+1)(s^2-2)}\right)' =$

$\lim_{s \to 0} -\frac{3s^2+2s-2}{(s^3+s^2-2s-2)^2} = -\frac{-2}{4} = +1/2$

$C = \lim_{s \to -1} \frac{\cancel{s+1}}{s^2\cancel{(s+1)}(s^2-2)} = \frac{1}{1 \cdot (-1)} = -1$

$D = \lim_{s \to \sqrt{2}} \frac{\cancel{s-\sqrt{2}}}{s^2(s+1)(s+\sqrt{2})\cancel{(s-\sqrt{2})}} = \frac{1}{2(1+\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{8+4\sqrt{2}}$

$E = \lim_{s \to -\sqrt{2}} \frac{\cancel{s+\sqrt{2}}}{s^2(s+1)\cancel{(s+\sqrt{2})}(s-\sqrt{2})} = \frac{1}{2(1-\sqrt{2})(-2\sqrt{2})} = \frac{1}{8-4\sqrt{2}}$

$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{8+4\sqrt{2}} \frac{1}{s-\sqrt{2}} + \frac{1}{8-4\sqrt{2}} \frac{1}{s+\sqrt{2}} - \frac{1}{s+1}$

$y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8+4\sqrt{2}} e^{t\sqrt{2}} + \frac{1}{8-4\sqrt{2}} e^{-t\sqrt{2}} - e^{-t}\right) u(t)$