Funzioni Elementari

Precorso di Matematica per Ingegneria

[*in fieri* - *work in progress* - continua]

Alessandro Soranzo

Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Università degli Studi di Trieste

ver. 25 settembre 2019

Nota 0. SI PREGA DI AVVERTIRE L'AUTORE DI OGNI ERRORE ANCHE SE MINUSCOLO, GRAZIE!

Nota 1. Il testo è ipertestuale, con link interni e link alla rete.

Nota 2. Attualmente la separazione della parole in fine riga, fatta automaticamente dall'editor di testo, non corrisponde sempre alla grammatica italiana (ma in questa frase sì).

Nota 3. È usato lo standard del punto decimale: $\pi \approx 3.14$.

Nota 4. Nella simbologia ci si è attenuti in generale allo standard ISO 80000-2:2009([1]), per esempio tan e non tang nè tg per la funzione tangente.

[1] Si veda per esempio https://ja.wikipedia.org/wiki/ISO_80000-2

Indice

Funzioni Elementari non Trigonometriche

Funzioni Elementari. Funzioni razionali, radici, esponenziali, logaritmi. Equazioni e
disequazioni razionali. Radici n-esime. Proprietà algebriche delle radici. Potenze di un
numero reale positivo con esponente razionale (cenni). La funzione valore assoluto.
Equazioni e disequazioni irrazionali. Cenni alle funzioni esponenziale e logaritmo. Proprietà
algebriche dei logaritmi. Esempi di equazioni e disequazioni logaritmiche, esponenziali, e
con il valore assoluto.

1 Funzioni Elementari non Trigonometriche I

1.1 Le radici

• *Radice quadrata*, $x \mapsto \sqrt{x}$. Per $x \geq 0$ la $\sqrt{x}$ è definita come il numero $y \geq 0$ tale che $y^2 = x$.
Per esempio la radice quadrata di 9 esiste in tutti gli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$N, ed è 3, **nel modo più assoluto la radice quadrata di 9 non è** ± 3. (Come invece affermano testi che seguono una definizione superata di radice quadrata). Invece la radice quadrata di 2 esiste solo in $\mathbb{R}$, ed è indicata con $\sqrt{2}$.

• *Radice quarta, sesta, ottava...* $x \mapsto ^4\sqrt{x}$, $x \mapsto ^6\sqrt{x}$... Con considerazioni analoghe alla radice quadrata. Per esempio la radice quarta di 16 è 2, e quella di 9 esiste solo in $\mathbb{R}$ ed è $\sqrt{3}$.

• *Radice terza (o cubica), quinta, settima...* $x \mapsto ^3\sqrt{x}$, $x \mapsto ^5\sqrt{x}$...
La $\sqrt[3]{x}$ è definita come il numero y tale che $y^3 = x$, e similmente le altre radici di indice dispari. Per esempio la radice cubica di -8 è -2 ovunque, e la radice cubica di 12 è $2\sqrt{3}$ solo in $\mathbb{R}$.

1.2 Proprietà dei radicali ovvero radici

Alcune proprietà delle radici sono le seguenti.

$$\sqrt[n\cdot m]{x} = \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \;\; \textit{per esempio} \;\; \sqrt[6]{x} = \sqrt{\sqrt[3]{x}} = ^3\sqrt{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[nm]{x^m} = ^n\sqrt{x}\,, \quad n, m = 2, 3, 4... \text{ (si semplifica m)}$$

$$x = ^3\sqrt{x^3} \;\; \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$

$$(\textit{non } x) \quad |x| = \sqrt{x^2} \;\; \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

e queste 4 proprietà molto simili fra loro:

$$\sqrt{x\,y} = \sqrt{|x|}\,\sqrt{|y|} \;\; \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

$$\sqrt{x/y} = \sqrt{|x|}/\sqrt{|y|} \;\; \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

$$\sqrt[3]{x\,y} = \sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{y} \quad \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$
$$\sqrt[3]{x/y} = \sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{y} \quad \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$

(E di rarissimo uso $\sqrt[n]{x^\alpha} = (\sqrt[n]{x})^\alpha, \quad x \geq 0,\, \alpha \in I\!R,\, n = 2, 3, 4...$).

Si ha:
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (perchè è $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$) e approssimeremo ≈ 2.828
$\sqrt{9} = 3$ (assolutamente non ± 3)
$\sqrt{10} \approx 3.162$ e lo troveremo con la calcolatrice
$\sqrt[3]{-8} = 2$ (perchè $(-2)(-2)(-2) = -8$)
$\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ (perchè è $\sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$)
$\sqrt[3]{5}$ lo lasceremo come sta. (WolframAlpha con `5^(1/3)` dà 1.7099...).
$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ (perchè è $\sqrt{\sqrt{4}}$) e approssimeremo ≈ 1.414
$\sqrt[4]{5} \approx 1.495$ (calcolato come radice quadrata della radice quadrata).
(Le radici dalla quinta in poi le considereremo poco, e ricorrono moderatamente nelle Scienze Applicate).

1.3 Funzioni e dis/equazioni di secondo grado

Le parabole con asse verticale hanno equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con qualche $0 \neq a, b, c \in I\!R$, e il loro asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$.
Definito il *discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$, la parabola interseca l'asse x in $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta \geq 0$ e altrimenti mai.
Se x_1 e x_2 sono
• le *radici* (eventualmente coincidenti) del *polinomio* $a\,x^2 + b\,x + c$,
• ovvero le *soluzioni* dell'*equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
• ovvero se $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ sono le *intersezioni* della parabola con l'asse x,
allora è

$$a\,x^2 + b\,x + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Con uno *schema di prodotto dei segni* risolviamo la disequazione

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0 \qquad \textit{oppure} \geq \quad \textit{oppure} < \quad \textit{oppure} \leq$$

Per esempio per $-x^2 - 2\,x + 8 \leq 0$ usando la *formula ridotta*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

utile se b è intero pari, si trova

$$\Delta = 1^2 - (-1) \cdot 8 = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-1} \qquad x_1 = +2 \quad x_2 = -4$$

$$-x^2 - 2\,x + 8 = -1 \cdot (x-2) \cdot (x+4) \leq 0$$

$-1 > 0 \quad mai$
$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \qquad\qquad Soluzione: \;\; x \leq -4 \vee x \geq 2\,.$

È meglio risolvere le 3 disequazioni con $>$ e poi individuare l'insieme soluzione a seconda se nella disequazione iniziale si aveva $>$, $\geq$, $<$ o $\leq$. (Altri Autori fanno diversamente). Questo è un procedimento generale che in seguito varrà anche per più di 3 termini.

L'equazione della parabola ricorre un'infinità di volte(2) nelle Scienze Applicate.

1.4 Le potenze

Si definisce $a \in I\!\!R$ *elevato alla* $n \in I\!\!N$, $n > 0$, il numero

$$a^n = a \cdot ... \cdot a \;\; (n\; volte)$$

e ponendo per $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

[2] Per esempio, dà lo spazio

$$s(t) = 9.81\,t^2 + v_0\,t$$

percorso al tempo t da un corpo partito verso il basso con velocità v_0, nel campo gravitazionale terrestre, da altezza non troppo elevata, supposta la forma tale da rendere insignificante l'attrito con l'aria.

la potenza è definita per tutti gli esponenti non nulli di $\mathbb{Z}$; e per l'esponente 0 si pone se $a \neq 0$ (rimanendo non definito 0^0)

$$a^0 := 1 \,.$$

Si definisce $a \in I\!R$ *elevato alla* $q = \frac{n}{m} \in Q$, $m, n > 0$, il numero

$$a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$$

che esiste se $a \geq 0$ *vel* m è dispari.
Per la potenza con esponente $q \in I\!R$ si richiede $a \geq 0$, e se q è razionale vale quanto sopra, e se è irrazionale si dà una definizione complessa che si può quasi immaginare sostituendo q con una sua *"straordinariamente buona"* approssimazione razionale: $a^{\sqrt{2}}$ sarà *"circa"* $a^{1.41}$ a sua volta uguale a $\sqrt[100]{a^{141}}$. Ancor meglio $\sqrt[1000]{a^{1414}}$.

Ecco su WolframAlpha i grafici di alcune funzioni potenza: `Link->`

L'elevamento a potenza non è nè commutativo, per esempio $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, nè associativo. Valgono invece le seguenti proprietà.

$$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$$

$$(x \cdot y)^\wedge z = (x^\wedge z) \cdot (y^\wedge z) \qquad \textit{ossia } (x\, y)^z = x^z y^z \;\; (\textit{distributiva})$$

$$x^{y \cdot z} = (x^y)^z \qquad 1^x = 1 \qquad x^1 = x$$

$$x^0 = 1 \quad \forall\, x \neq 0 \qquad 0^x = 0 \quad \forall\, x \neq 0 \qquad 0^0 \;\; \textbf{non esiste}$$

Si noti la notazione, ovvero convenzione sulla notazione:

$$\textit{usualmente scritto} \rightarrow \; x^{y^z} := x^{(y^z)} \; \leftarrow \textit{raramente scritto}$$

per esempio 2^{2^3} è 2^8 cioè 256, non è 4^3 cioè 64, che$_\downarrow$ è $(2^2)^3$.

Le radici possono essere intese come potenze con esponente frazionario e precisamente

$$\left[\sqrt[1]{x} = x\right] \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \ldots \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

(in particolare su WolframAlpha $_{numero}$^`(1/n)`) da cui segue subito

$$x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4 ...$$

Esempio di applicazione di $x^{y \cdot z} = (x^y)^z$: volume di un cubo di lato $10^{-10}\,m$. Essendo $volume_{cubo} = lato^3$, si ha $(10^{-10})^3$ cioè $10^{-30}\,m^3$.

2 Funzioni Elementari non Trigonometriche II

2.1 Polinomi e funzioni razionali intere

Un polinomio è una *scrittura* come $2\,x^7 - 3\,x^5 + x^2 - x + 2$ e in generale

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

ed esso definisce una funzione *razionale intera* (o *polinomiale*), e n è il *grado* se $a_n \neq 0$.
Esistono similmente polinomi in più variabili, come $x^7 + x^8\,y^2 - 1$, che ha grado 10.

2.2 Funzioni e dis/equazioni razionali intere

Limitandosi ad 1 variabile, un'**equazione razionale intera** è il predicato che uguaglia 2 polinomi in 1 variabile $P_1(x) = P_2(x)$ ovvero dopo le opportune riduzioni, che uguaglia un polinomio (in 1 variabile) a 0:

$$P(x) = 0$$

e la **disequazione razionale intera** si ottiene sostituendo il segno di uguaglianza con uno di disuguaglianza, per esempio

$$x^2 + 5x + 6 \leq 0\,.$$

Abbiamo visto come risolvere equazioni e disequazioni razionali intere di primo e secondo grado.
Per quelle di grado superiore, consideriamo per esempio

$$2\,x^4(-x^2 - 2x + 8)(2 - x)(1 - x + x^2) = 0 \qquad \text{o, disequazione, } > 0,$$

oppure altra disequazione con $\geq$ oppure $<$ oppure $\leq$.
Per risolvere *fattorizziamo* il polinomio in fattori di primo grado e/o di secondo grado *irriducibili* ovvero con discriminante negativo. E poi si risolve con uno schema di prodotto dei segni.[3]

[3] Ecco qualche dettaglio. Il monomio $2\,x^4$ si fattorizza in $2\,x \cdot x \cdot x \cdot x$ ma in effetti i fattori che sono monomi x^n conviene lasciarli stare come sono. Il polinomio di secondo

L'equazione e le 4 disequazioni

$$2\,x^9-2\,x^8-22\,x^7+56\,x^6-56\,x^5+32\,x^4 \qquad =0,>0,\geq 0,<0,\leq 0$$

si risolvono come prima una volta che si riconoscesse che questo è proprio il polinomio di prima, ma ora è molto lontano dalla fattorizzazione. Il problema di fattorizzare un polinomio può essere facile, come è in questo caso, o difficile, o impossibile.
Prima di tutto *raccogliamo* il fattore x^4, subito visto:

$$x^4\,(2\,x^5-2\,x^4-22\,x^3+56\,x^2-56\,x+32)$$

e ci resta da fattorizzare il polinomio $P_5(x)$ di 5^ grado. In questo caso si può fare[4] abbastanza facilmente ma in questa trattazione

grado $-x^2-2x+8$, con discriminante positivo, abbiamo visto che è $-1\cdot(x-2)(x+4)$. Il fattore di primo grado $2-x$ è già a posto. E $1-x+x^2$ è irriducibile avendo discriminante negativo, e allora non ha zeri. Si ha allora la fattorizzazione

$$2\,x^4(-1)(x-2)(x+4)(2-x)(1-x+x^2)\,.$$

L'equazione con $=0$ equivale, considerato che $x^4=0\Leftrightarrow x=0$,

$$x=0\ \vee\ x-2=0\ \vee\ x+4=0\ \vee\ 2-x=0$$

che dà $x\in\{-4,0,2\}$. La disequazione si fa con lo schema di prodotto dei segni visto in precedenza trovandosi (per ≤ 0) la soluzione $x\leq -4\vee x=0\vee x=2$. Per >0 si troverebbe $-4<x<0\vee 0<x<2\vee x>2$.

[4] Per il lettore interessato: prima si raccoglie 2

$$2\,(x^5-2\,x^4-11\,x^3+28\,x^2-28\,x+16)$$

in modo da avere un polinomio *monico*, cioè con *coefficiente principale* 1, poi si procede con la Regola di Ruffini, se si può. Cercheremo qua *solo* fattori $x-m$ con m un divisore intero del termine costante: ±1, ±2, ±4, ±8, ±16. Allora basta cercare un numero m fra quelli, il quale annulli il polinomio. È $P_5(2)=0$ e allora dividiamo per $x-2$ con la Regola di Ruffini:

i coefficienti $\rightarrow$	$+1$	-1	-11	$+28$	-28	$+16$
la radice $\rightarrow$ $+2$	$\downarrow$	$+2$	$+2$	-18	$+20$	-16
	$+1$	$+1$	-9	$+10$	-8	0 $\leftarrow$ sempre così

che dà i coefficienti del quoziente, e allora la fattorizzazione

$$(x-2)(x^4+x^3-9x^2+10x-8)$$

e riprendendo il monomio x^4 e il fattore 2

$$2\,x^4(x-2)(x^4+x^3-9x^2+10x-8)\,.$$

ci limiteremo solo ai casi in cui, arrivati a questo punto, si abbia un polinomio di grado al più 2 (invece qua è 5) e allora si procede come prima.

2.3 Funzioni e dis/equazioni razionali fratte

Ovviamente la *disequazione razionale fratta*

$$\begin{array}{r} \textit{polinomio} \rightarrow \\ \textit{polinomio} \rightarrow \end{array} \quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0$$

ha la stessa soluzione dell'equazione razionale intera $N(x) \cdot D(x) > 0$ e allora si risolve con lo stesso schema di prodotto dei segni.
Se invece di $>$ di ha $\geq$ dopo aver risolto come sopra si aggiungano alla soluzione tutti i valori di x che annullano il numeratore.
Se invece si ha $\leq$ o $\geq$ si moltiplichino ambo i membri della disequazione per -1 e cosí il $<$ diventa $>$ e il $\leq$ diventa $\geq$ e il -1 lo si conglobi nel numeratore, e si risolva come sopra.
Naturalmente se la disequazione razionale fratta si presenta inizialmente in forma non canonica

$$\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{C(x)}{D(x)}$$

prima si portino le x a sinistra, e si metta a denominatore comune riconducendosi alla forma canonica sopra scritta, e così per tutti i segni di disuguaglianza.

Si continua cercando un fattore $x - m'$ con m' fra i divisori interi di -8, e si trova che 2 annulla il polinomio di quarto grado $P_4(x)$, e allora lo si divide per $x - 2$ con la Regola di Ruffini trovando

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x^3+3x^2-3x+4)$$

poi cercando fra i divisori interi di 4 si trova l'annullamento di $P_3(x)$ in -4 da cui con la Regola di Ruffini applicata a $P_3(x)$

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x+4)(x^2-x+1)$$

che è come prima (un fattore è opposto ma congloba il (-1)).

2.4 Funzioni e dis/equazioni irrazionali

• Le radici di indice dispari (cubiche, quinte...) sono crescenti su $\mathbb{R}$ e allora l'equazione o disequazione

$$\sqrt[dispari]{f(x)} \ {}_{qualunque\ segno\ di\ dis/uguaglianza} \ g(x)$$

si può affrontare semplicemente elevando ambo i membri all'indice (dispari) della radice (che così scompare). Allora si hanno queste 5 semplici equivalenze, che si ricavano subito appunto elevando a potenza conservando l'uguaglianza o l'ordinamento, e allora in definitiva non c'è niente da veramente "imparare a memoria":

$$\begin{array}{rclcl} \sqrt[3]{f(x)} & = & g(x) \Leftrightarrow f(x) & = & g^3(x) \\ & > & & > & \\ & \geq & & \geq & \text{in tutte} \\ & < & & < & \text{l'ordinamento} \\ & \leq & & \leq & \text{si conserva} \end{array}$$

e il 3 della radice può sostituirsi con ogni indice dispari.

• Il caso delle radici di indice pari (radici quadrate, quarte...) è meno semplice perchè sono definite solo sui numeri non negativi. Quelle equazioni e disequazioni sono regolate dalle seguenti formule.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Vediamo il caso che diremo **"radice minore"**:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \qquad \leftarrow \textit{equivalentemente } g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Il caso che diremo **"radice minore o uguale"** è similissimo a quello "radice minore" appena visto:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

Infine 2 casi (similissimi) **"radice maggiore"** e **"radice maggiore o uguale"**:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Nota. Le formule di questo paragrafo non "piovono dal cielo": lo studente si ingegni di capire le soprascritte *equivalenze*, e non avrà più bisogno – questa volta e infinite altre nei suoi studi – di *imparare a memoria formule.*

Si risolva per esempio$_\mu$ $\sqrt{x^2-9} \geq x-1$.
Si risolva per esempio$_\mu$ $x > \pi + \sqrt{x^2-10}$.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
Si risolva la seguente disequazione:

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2-8}$$

SVOLGIMENTO
Essendoci una radice quadrata, cercheremo di ricondurci al caso "radice maggiore" oppure al caso "radice minore", e in effetti in questo caso

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2-8} \quad \Big/ + (-\mathrm{e})$$

$$x - \mathrm{e} > \sqrt{x^2-8}$$

$$\sqrt{x^2-8} < x - \mathrm{e}$$

proprio al caso "radice minore", e allora la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ x - \mathrm{e} > 0 \\ x^2 - 8 < (x-\mathrm{e})^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \le -\sqrt{8} \vee x \ge \sqrt{8} \\ x > \mathrm{e} \\ x^2 - 8 < x^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \le -2\sqrt{2} \vee x \ge 2\sqrt{2} \approx 2.82 \\ x > \mathrm{e} \approx 2.718 \text{ che sappiamo a memoria} \\ 2\,\mathrm{e}\,x < \mathrm{e}^2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \approx 2.831 \text{ con la calcolatrice dal soprastante} \end{cases}$$

e mettendo in ordine crescente i capisaldi (ovvero valori delimitanti) trovati

........$-2\sqrt{2}$.........e..........$2\sqrt{2}$.........$\frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}$..........
.............|............|............|.............|............ schema d'intersezione
∼∼∼∼∼ − − − − − − − −− ∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼
− − − − − − − −− ∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼ $\cap$
∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼ − − −−

otteniamo il soprastante schema d'intersezione che ci dà la soluzione

$$\boxed{2\sqrt{2} \le x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}}$$

3 Funzioni Elementari non Trigonometriche III

Le funzioni esponenziali e logaritmiche

3.1 Logaritmi naturali e decimali; esponenziale

Per introdurre i logaritmi, possiamo vedere

$\log_2 8 = 3$ come una *scrittura alternativa* di $2^3 = 8$.

Il logaritmo in base b di x è l'esponente da dare a b per avere x. (Ma) dev'essere $x > 0$, e $0 < b \neq 1$. Ecco due esempi:

[5] $$\log_2 8 = 3 \Leftarrow 2^3 = 8 \qquad \log_{10} 100 = 2 \Leftarrow 10^2 = 100.$$

Considereremo quasi solo 2 basi: di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi usato in Chimica,

il *logaritmo decimale*, in base 10,

$$\lg x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_{10} x \qquad (\text{ma anche } \log x),$$

e il *logaritmo naturale*, in base e,

$$\ln x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_e x \qquad (\text{ma anche } \log x).$$

oggi preferito in Matematica e Fisica, ed e è il numero di Nepero, in inglese Euler's number, la "somma infinita" (serie) dei reciproci dei fattoriali dei numeri naturali

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \approx \mathbf{2.718}^{\nearrow}$$

Ecco due valori che dobbiamo imparare a memoria:

$$\lg 2 \approx \mathbf{0.3} \quad [6] \tag{1}$$

[5] Più espressivamente, il logaritmo $\log_2 8 = 3$

è l'**e**sponente **giu**sto	3	mnemonico:
per **la** sua **ba**se	2	È GIÙ aL BAAR!
per avere il suo **ar**gomento	8	

[6] O meglio ≈ 0.301. Il numero 0.3 ha errore (percentuale rispetto l'esatto) $< 0.5\%$.

$$\lg \mathrm{e} \approx \mathbf{0.4343} \tag{2}$$

Tutti i logaritmi in 1 valgono 0. I logaritmi in base $b > 1$ sono funzioni crescenti ("verso $+\infty$"), e in base $0 < b < 1$ decrescenti ("verso $-\infty$"). In ogni caso il crescere in valore assoluto avviene con straordinaria lentezza, per esempio $\log_{10} 1000 = 3$. I limiti in 0 sono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. In ogni caso è $\log_b : I\!R^+ \to I\!R$. (Per ogni possibile base b) il logaritmo è una funzione biiettiva, e l'inversa del logaritmo naturale si chiama *(funzione) esponenziale*, ed è definita su tutto $\mathbb{R}$, cioè $\exp : I\!R \to I\!R$:

$$\exp := \ln^{-1} \qquad \ln = \exp^{-1},$$

e si vede subito che coincide con la potenza in base e, cioè

$$\exp x = \mathrm{e}^x.$$

Questi $^{-1}$ denotano l'inversa, assolutamente non il reciproco.

(L'inversa di $\ln x$ come detto è $\exp x$, la reciproca di $\ln x$ è $\frac{1}{\ln x}$, una funzione completamente diversa, neanche definita per $x < 0$).

L'esponenziale in 0 vale 1, ed è crescente "verso $+\infty$" con grande rapidità, per esempio, $\exp(20)$ è più o meno mezzo miliardo.

3.2 Proprietà dell'esponenziale e dei logaritmi

In questo baragrafo b rappresenta qualunque numero reale che possa essere base di un logaritmo, cioè

$$b > 0 \wedge b \neq 1\,.$$

Un'attenta considerazione di quanto detto finora dà

$$\lg 10^x = x,\ \forall x \qquad 10^{\lg x} = x,\ \forall x > 0.$$

$$\ln \exp x = \ln \mathrm{e}^x = x,\ \forall x \qquad \exp \ln x = \mathrm{e}^{\ln x} = x,\ \forall x > 0$$

$$\log_b b^x = x,\ \forall x \qquad b^{\log_b x} = x,\ \forall x > 0.$$

I logaritmi in 1 valgono 0 e gli esponenziali in 0 valgono 1:

$$\lg 1 = 0 \qquad 10^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\log_b 1 = 0 \qquad b^0 = 1$$

Il logaritmo trasforma il prodotto in somma:
(formule per il *logaritmo del prodotto* ed *esponenziale della somma*)

$$\lg(x\,y) = \lg x + \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$$

$$\ln(x\,y) = \ln x + \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$$

$$\log_b(x\,y) = \log_b x + \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

Il logaritmo trasforma la divisione in sottrazione:
(formule per il *logaritmo del quoziente* ed *esponenziale della differenza*)

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad 10^{x-y} = 10^x/10^y$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/e^y$$

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad b^{x-y} = b^x/b^y\ .$$

Proprietà del logaritmo della potenza

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \lg x^\alpha = \alpha\ \lg x$$

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \ln x^\alpha = \alpha\ \ln x$$

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \log_b x^\alpha = \alpha\ \log_b x$$

e da quest'ultima discendono tutte le successive proprietà di questo paragrafo, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{n}$.

Il logaritmo trasforma il reciproco nell'opposto:

$$\lg\frac{1}{x} = -\lg x$$

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\log_b\frac{1}{x} = -\log_b x$$

Il logaritmo trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento:

$$\lg\sqrt{x} = \frac{1}{2}\lg x$$

$$\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\log_b\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_b x$$

e questo si estende alle radice di qualunque indice:

$$\lg\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\lg x$$

$$\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x$$

$$\log_b\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_b x\ .$$

3.3 Esempio di uso del logaritmo: il pH

Il pH è una complessa questione chimica, per la quale si rinvia comunque ai testi specialistici. Qua vogliamo illustrarne qualche proprietà matematica. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce pH:

> pH is defined as the decimal logarithm of the reciprocal of the hydrogen ion activity, a_H+, in a solution

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}(a_{H+}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right)$$

Se il pH diminuisce di 1 questo equivale al decuplicare di a_H:

$$pH - 1 = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) - 1 =$$
$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + \log_{10} 10^{-1} =$$
$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + \log_{10}\frac{1}{10} =$$
$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\cdot\frac{1}{10}\right) =$$
$$= \log_{10}\left(\frac{1}{10\, a_{H+}}\right)$$

Così il suo diminuire di 2 corrisponde al centuplicare di a_H.

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
ATTENZIONE: USA LO STANDARD DELLA VIRGOLA DECIMALE!
Consideriamo il pH della Chimica:

$$-\log_{10} y$$

dove y viene spesso scritto $[H^+]$ e letto *"concentrazione degli H^+"*, ma tutto ciò richiederebbe precisazioni di Chimica di cui qua non ci occupiamo.
A cosa corrisponde la diminuzione di 0,5 nel pH? Con grossolana approssimazione, si esprima infine la soluzione a parole, come "circa dimezzare y" o "circa decuplicare y" o analoghi.

SVOLGIMENTO

$$-\log_{10} y - 0{,}5 =$$

ricordando che $x \equiv \log_b b^x$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} 10^{0{,}5} =$$

e osservando che $0{,}5 = \frac{1}{2}$ e ricordando che $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$= -\log_{10} y - \log_{10}\sqrt{10} =$$

per algebra delle parentesi

$$= -\Big(\log_{10} y + \log_{10}\sqrt{10}\Big) =$$

per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$= -\log_{10}\left(y \cdot \sqrt{10}\right)$$

cioè a dire, y viene moltiplicata per $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, e con grossolana approssimazione, come richiesto,

$$\boxed{\text{corrisponde a circa triplicare } y}$$

4 Funzioni Elementari non Trigonometriche IV

4.1 Formule di cambiamento di base

Formule di cambiamento di base:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad {}^{(7)}\ {}^{(8)} \text{ in particolare } = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln\, x}{\ln\, b}$$

da cui $\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}}$ e con la (??) si ottiene questa formula approssimata per la conversione fra logaritmi naturali e decimali

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$$

da cui reciprocamente

$$\lg x \approx 0.4343 \ln x$$

(cioè il logaritmo decimale è *vagamente* la metà del naturale[9] e con maggior precisione il 43% e ancor meglio 43.43%).

$$\Big(\text{Le formule esatte sono:} \quad \ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \qquad \lg x = (\lg \mathrm{e}) \ln x\Big).$$

Esempio$_\mu$

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

costante spesso approssimata a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci: `link->`.

4.2 Dis/equazioni esponenziali e logaritmiche

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

[7] Anche $= (\log_c x) \cdot (\log_b c)$.

[8] Per il lettore interessato, si ricavano subito anche $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$, e $\log_{1/b} x = -\log_b x$.

[9] Entrambe le ultime 2 formule hanno circa $\frac{1}{79\,000}$ di errore relativo.

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)}$$
$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; b^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 0,\, b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base b positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo se $b > 1$, che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$
$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{f(x)} > \mathrm{e}^{g(x)}$$
$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; b^{f(x)} > b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 1$$

e tutte similmente con $<$, $\geq$, $\leq$.

Il logaritmo è iniettivo e definito per ogni numero positivo e allora

$$0 < f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \lg f(x) = \lg g(x)$$
$$0 < f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \ln f(x) = \ln g(x)$$
$$0 < f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \log_b f(x) = \log_b g(x)$$

cioè si può applicare il logaritmo in qualunque base ad ambo i membri di un'equazione $f(x) = g(x)$ ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni, se $\underline{f(x) > 0 \,\vee\, g(x) > 0}$ (in particolare se una delle 2 funzioni è un esponenziale in qualche base eventualmente moltiplicato per una costante positiva, che è il caso più comune nella pratica).

Di più: il logaritmo decimale e quello naturale e ogni logaritmo in base $b > 1$ sono crescenti([10]) e allora si può applicarli conservando l'ordinamento:

$$0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \lg f(x) \leq \lg g(x) \quad \textit{e anche con} \quad <$$

[10] Invece coi logaritmi in base minore di 1 si inverte l'ordinamento:

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) < g(x) \;\Leftrightarrow\; \log f(x) > \log g(x)$$
$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \log f(x) \geq \log g(x)\,.$$

$$0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \ln f(x) \leq \ln g(x) \quad \textit{e anche con} \quad <$$

$$\forall\, b > 1 \quad 0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \log_b f(x) \leq \log_b g(x) \;\; \textit{e anche con} \;\; <$$

4.3 Esempi di equazioni delle Scienze Applicate

Esempio$_{\mu}$ L'intensità sonora in decibel è definita sostanzialmente come

$$\text{intensità sonora} := 10 \lg \frac{\text{energia passante in 1 s per 1 m}^2}{1pW/m^2}\, dB$$

e allora come funzione dell'energia è del tipo

$$a \;\lg \frac{x}{c} \qquad \text{ovvero } a \lg x + d \text{ (perchè } \lg \frac{x}{c} = \lg x - \lg c \text{)}$$

(e si faccia ben attenzione a distinguere la soprastante scrittura dalla $a \lg(x + d)$). Il grafico è proprio come quello di $\lg x$, riscalato da a sull'asse delle ordinate e traslato verticalmente di d.

Di quanti decibel aumenta l'intensità sonora raddoppiando l'energia?

Detta E l'energia considerata e $2\,E$ il suo doppio, si ha

$$10 \;\lg \frac{2\,E}{1pW/m^2} - 10 \;\lg \frac{E}{1pW/m^2} =$$

ricordando che $\lg(x/y) = \lg x - \lg y$

$$= 10 \Big(\lg(2\,E) - \lg E \Big) = \quad \text{(mentre } \lg(1pW/m^2) \text{ si elide)}$$

$$= 10 \;\lg \frac{2\,E}{E} = 10 \;\lg 2 \approx 10 \cdot 0.3 = 3$$

cioè ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento approssimativo di 3 decibel.

Esercizio$_\mu$ Il piombo nelle ossa ha un'emivita – supponiamo esponenziale il suo scomparire, com'è ragionevole in questi casi – di (circa) 10 anni. In quanto tempo si riduce del 75%? E del 90%? E del 95%? E del 97%?

La riduzione <u>del</u> 75% è la riduzione <u>al</u> 25%, cioè ai $\frac{25}{100}$ ovvero $\frac{1}{4}$ e allora corrisponde a 2 dimezzamenti: allora ci vogliono 20 anni.

Per il 90% dobbiamo illustrare l'equazione esponenziale in questione, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è

$$u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

e r è una costante <u>positiva</u>(11) che dipende da caso a caso, e in questo caso possiamo calcolarla dall'emivita di 10 anni:

$$u(emivita) \stackrel{DEF}{=} \frac{u(0)}{2} \stackrel{EQ}{=} u(0)\, \mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ : u(0)$$

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ \ln$$

$$\ln\frac{1}{2} = -r\,10\,anni$$

$$-\ln 2 = -r\,10\,anni \quad \Big/ : (-10\,anni)$$

$$r = \frac{\ln 2}{10\,anni}$$

ottenendosi così l'equazione dello scomparire del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

Ora ci si chiede quando sarà ridotto del 90% ovvero al 10%, cioè $u(t) = 0.1\,u(0)$:

$$0.1\,u(0) \stackrel{EQ}{=} u(0)\, \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \Big/ : u(0)$$

[11] Oppure l'equazione può essere scritta $u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{k\,t}$ con k una costante negativa.

$$
\begin{aligned}
0.1 &= \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \qquad \Big/ \lg \\
-1 &= \lg \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \\
-1 &= -\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t\,\lg \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

$$
t = \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e}\cdot \ln 2} \approx \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e}\cdot \frac{\lg 2}{\lg \mathrm{e}}} = \frac{10\,anni}{\lg 2} \approx \frac{10\,anni}{0.3}
$$

$\approx$ 33.3 anni (valore che, nella pratica, possiamo stare sicuri che verrà riportato come 33 anni).

Si risolvano gli altri quesiti posti associatamente a questo appena risolto. Con 95% si dovrà calcolare $\lg 0.05 = \lg\left(\frac{1}{2}\cdot 0.1\right) = \lg\frac{1}{2} + \lg\frac{1}{10} = -\lg 2 - \lg 10 \approx -0.3 - 1 = -1.3$.

Esercizio$_{\mu}$ Si consideri la logistica standard

$$
f(t) := \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}
$$

correlata allo sviluppo di una popolazione (animale, microbica...) quando si consideri che, ad un certo punto – e a differenza di quel che si considera nel modello ultra-semplificato della successione di Fibonacci – i vari organismi iniziano ad ostacolarsi a vicenda.
Se ne veda il grafico su Wikipedia.
Si trovi per quali tempi $f(t) = 0.5$ e $f(t) = 3/4$.

5 Funzioni Elementari non Trigonometriche V

5.1 Valore assoluto, e relative dis/equazioni

Il valore assoluto in $\mathbb{R}$ è una funzione definita da

$$|x| := \begin{cases} x & se\ \ x \geq 0 \\ -x & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

ma che può considerarsi anche nascere dall'elevamento al quadrato e dall'estrazione della radice quadrata perchè $\sqrt{x^2} = |x|$ e allora è una funzione elementare essendo composizione di funzioni elementari. Essa verifica molte proprietà, oltre alle ovvie

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

fra cui

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\Big(\forall\, y \neq 0\Big) \quad |x/y| = |x|/|y|$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$$

$$\Big(\forall\, a \geq 0\Big) \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a \quad e analoga con \geq$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \ \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

e i 3 = possono sostituirsi con tutti e 4 i segni di disuguaglianza; e molte altre formule[12].

[12] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule sul valore assoluto:

$$||x|| = |x|$$

Il valore assoluto ricorre un'infinità di volte nelle Scienze Applicate. Fra le altre cose, $|t|$ rappresenta una distanza temporale dall'istante 0, sia dopo che prima di 0.

Esempi di applicazione del valore assoluto.
Il primo esempio è la nota formula della distanza punto-retta

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si prenda un po' "con le molle" quanto segue, perchè è una questione delicata definire nella realtà sensibile un *valore esatto*. Invece in matematica i valori esatti esistono sicuramente, per esempio l'insieme vuoto ha esattamente 0 elementi, il suo insieme delle parti ha esattamente 1 elemento, e $1 + 1$ fa esattamente 2, e un cerchio di diametro 2 ha area esattamente π (che comunque *mai* si conoscerà numericamente...).

Si hanno allora queste 3 definizioni:

$$errore\ assoluto := |approx - esatto|$$

L'errore percentuale rispetto a un valore esatto è definito da

$$\text{errore relativo} := \frac{|approx - esatto|}{esatto} \qquad se\ esatto \neq 0$$

$$\text{errore percentuale} := \frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

dove *approx* è un'approssimazione del valore esatto, di qualunque provenienza.

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$
$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$$
$$|x^n| = |x|^n \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$
$$|x^\alpha| = |x|^\alpha \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l'ultima si chiama *disuguaglianza triangolare*.

Si noti che si può dare solo conoscendo il valore esatto. Naturalmente i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*.

Esempio$_\mu$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore percentuale

$$\text{errore percentuale [rispetto l'esatto]} := \frac{|3.14 - \pi|}{\pi} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14 - 3.14159265...|}{3.14159265...} \cdot 100\% \approx$$

$$\approx \frac{|3.14 - 3.14159265|}{3.14159265} \cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

Esercizio$_\mu$ Il *ritmo circadiano* dell'a concentrazione sanguigna di un certo ormone (umano o animale) sia modellizzato – prescindendo dalle unità di misura – da

$$u(t) := -2.5\,|t - 14| - |t - 7| + 50 \qquad 0 \le t \le 24$$

Trovare in quale periodo del giorno la concentrazione è maggiore di 30.

6 Coniche (e altre figure)

Una funzione molto importante è quella definita dal *passaggio al reciproco*

$$y = \frac{1}{x}$$

il cui grafico è una *curva*[13] detta *iperbole equilatera*, la terza *conica* che incontriamo, dopo il *circolo* e la *parabola*.

Tutti i grafici sono *curve*, e hanno un'equazione *esplicita*, ma esistono curve che non sono grafici, e hanno un'equazione *implicita*, in particolare il circolo di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

e questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio*.

Esercizio$_\mu$ Si verifichi se il punto $(2, 2)$ sta nel circolo

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y + 1 = 0$$

Esercizio$_\mu$ Esplicitare i 2 semicircoli costituenti il circolo. (Si troverà $y = 5 \pm \sqrt{-x^2 - 2x + 24}$).

Altre curve in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

[13] Una definizione rigorosa di *curva* è alquanto complessa, e in questa trattazione elementare supporremo noto il concetto. Le curve più semplici sono le rette.

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}\,x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse}\ (\text{in } forma\,canonica^{(14)})$$

e la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse*. Se $a > b$ l'ellisse appare "ribassata" e se $b > a$ l'ellisse appare "allungata verso l'alto".

Se $a = b$ si ottiene un circolo: i circoli sono particolari ellissi.

Esercizio$_\mu$ Con $a := 3$ e $b := 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

Ora vediamo una curva in equazione esplicita: la generica *parabola* con asse verticale ha equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$

La disequazione

$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$

rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga $>$, e questo è un fatto generale).
Ovviamente

$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$

rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[15] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.

[14] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard*.
[15] Insieme. Termine usato in geometria.

Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*. La retta perpendicolare alla direttrice contenente il fuoco si chiama *asse* ed è asse di simmetria, e interseca la parabola nel *vertice*.
Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel piano – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O) e le iperboli equilatere.
Sono intersezione del piano cartesiano con un *cono completo*.

Con le rette (non verticali) e le coniche, e i grafici di $\operatorname{sgn}(x)$ e $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, e ce ne sono infiniti altri, per esempio (quello della funzione)

$$y = \sqrt[3]{x}$$

e, oltre alle rette verticali, infinite altre curve in rappresentazione implicita, per esempio il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

`x^3+y^3-3xy=0`

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

Come norma generale, bisogna risolvere le equazioni analiticamente, cioè coi calcoli, per quanto possibile, perchè esistono casi in cui il disegno inganna.
Tuttavia fare i disegni è comunque utilissimo

- per verificare la correttezza dei risultati trovati
- per una comprensione complessiva della situazione
- per presentare divulgativamente i risultati, o per presentarli in modo chiaro in relazioni tecniche

- per un tentativo seppure incerto di soluzione almeno approssimata quando il calcolo analitico è impossibile o proibitivamente difficile.

Come esempio dell'ultimo caso si consideri il *sistema di 2 equazioni in 2 incognite di* 6° *grado*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal disegno (sperabilmente, e, in effetti, in questo caso non ingannevole) vediamo che ci sono 4 soluzioni, e abbiamo anche loro approssimazioni, tanto migliori quanto più grande e preciso è il disegno.

Esercizio$_\mu$ Trovare l'unico numero $x > 0$ che sia *medio proporzionale* fra 1 e $1 + x$. (Cioè soluzione di $1 : x = x : (1 + x)$).
Riscriviamo la proporzione

$$1 : x = x : (1 + x)$$

in questa forma

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \qquad \Big/ \cdot x \cdot (1+x)$$

$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

ed escludendo la radice negativa

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \qquad \text{(mnemonico: } O_1\ \mathit{numero}_6!\ E'_1\ \mathit{notevole}_8.\text{)}$$

che è la *sezione aurea* ϕ. Si noti che $\frac{1}{\phi} = \phi - 1 \approx 0.618$.
Questo numero ϕ tende a ricorrere nelle Scienze Naturali.

Funzioni Trigonometriche

Funzioni circolari. Angoli e loro misura. Le funzioni seno, coseno e tangente: proprietà e rappresentazione grafica. Principali formule. Equazioni e disequazioni goniometriche. Cenno alle funzioni circolari inverse.

7 Funzioni Trigonometriche I

7.1 Introduzione

Le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate di interesse ingegneristico: Fisica, Topografia, Teoria dei Segnali, Ingegneria Aerospaziale e Navale... Uno degli strumenti matematici più usati dall'Ingegnere è l'Analisi di Fourier, basata sulle funzioni trigonometriche.

7.2 Definizioni

Supponiamo noti i concetti di
punto
segmento e sua lunghezza
retta e semiretta, retta orientata e semiretta orientata
piano e semipiano e piano cartesiano
angolo e angolo orientato, e loro vertice e lati
angolo retto, angolo piatto e angolo giro
circolo, semicircolo, e loro raggio e diametro.

L'intersezione di un angolo di vertice P con un circolo di centro P è un *arco di circolo*, di cui si suppone nota come concetto primitivo la nozione di *lunghezza.* Se il raggio del circolo è 1 quella lunghezza si chiama *misura in radianti* dell'angolo.

La lunghezza di un semicircolo di raggio 1 è stata studiata per millenni e oggi si sa che è
≈ 3.1416
≈ 3.14
e il suo valore esatto
3.14159...
si denota con π. Che allora è la misura dell'angolo piatto.

Nel piano cartesiano di assi X, Y e origine O consideriamo il

circolo di centro O e raggio 1 (*circolo goniometrico)*. Ad ogni *angolo goniometrico* (che è orientato e ha un lato sul semiasse delle ascisse positive) di misura in radianti $x \in [-2\pi, 2\pi]$, e poi in effetti *facendo anche più di 1 giro*, $x \in \mathbb{R}$, associamo il punto $P(x)$ corrispondente sul circolo goniometrico.
Si definiscono le funzioni *seno* e *coseno*, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\sin(x) := ordinata(P(x)) \qquad \cos(x) := ascissa(P(x))$$

e *tangente* e *cotangente*

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Per esempio si ha (banalmente le prime 2, difficilmente la terza)

$$\sin\pi = 0 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \sin 1 \approx 0.84 \tag{3}$$

Classicamente sono state considerate molte altre funzioni trigonometriche, in particolare l'*emisenoverso* $\frac{1-\cos x}{2}$ di grande importanza per la formula nautica e in generale geografica, che troviamo su Wikipedia[16]:

$$emisenoverso\left(\frac{d}{R}\right) =$$

$$= emisenoverso(\Delta\phi) + \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) emisenoverso(\Delta\lambda)$$

ϕ_1, ϕ_2 sono le latitudini dei due punti
R è il raggio della sfera che approssima la Terra
d la distanza fra i due punti (calcolata lungo una geodetica, ovvero un cerchio di raggio massimo che passa per i punti)
$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ è la differenza fra le latitudini dei due punti
$\Delta\lambda$ è la differenza fra le longitudini dei due punti.

L'ambiguità notazionale è notevole: per esempio Wikipedia in inglese per l'emisenoverso elenca[17] 11 fra nomi e simboli, da

[16] https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_dell%27emisenoverso
[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Versine#Overview

"haversed sine" a "hv" passando per "sem".
La ben più comune cotangente si troverà indicata

cotg
ctg
cotan
cotang
cot $\leftarrow$ standard ISO 80000-2:2009[18]

7.3 Periodicità

Il punto goniometrico è palesemente $2\pi-$periodico, $P(x+2\pi) = P(x)$ e allora $P(x+2k\pi) = P(x)$ per ogni k intero, dal che si vede subito la periodicità del seno e del coseno, mentre con considerazioni meno elementari si trova che tangente e cotangente sono π-periodiche:

$$\sin(x+2k\pi) = \sin(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot(x+k\pi) = \cot(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\tan(x+k\pi) = \tan(x), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

7.4 Simmetrie

Dalla disegno del circolo goniometrico capiamo subito che

il seno è dispari: $\sin(-x) = -\sin x$
il coseno è pari: $\cos(-x) = \cos x$
la tangente è dispari: $\tan(-x) = -\tan x$
la cotangente è dispari: $\cot(-x) = -\cot x$

[18] Si veda per esempio https://ja.wikipedia.org/wiki/ISO_80000-2

8 Funzioni Trigonometriche II

8.1 Gradi e radianti

La misura dell'angolo piatto di π radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di 180°, e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ \tag{4}$$

che consente di passare da un sistema all'altro. Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

e un qualche interesse ha anche 1 rad $\approx 57^\circ$, e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (**??**). Quasi mai si scrive *rad*, in Analisi Matematica assolutamente mai.

Alcuni valori numerici interessanti:

$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{4}\, rad \approx 0.785\, rad$)
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{3}\, rad \approx 1.05\, rad$)
$\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{2}\, rad \approx 1.57\, rad$).
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ (per esempio $\cos\frac{\pi}{4}$)
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ (per esempio $\sin\frac{\pi}{3}$)
$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$ (per esempio $\tan\frac{\pi}{6}$)

8.2 Alcuni valori notevoli

Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$ π	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$	2π
x°	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Nello schema soprastante è da intendersi che

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(270^\circ)$$

assolutamente non si intenda che $-\frac{\pi}{2}$ **sia uguale a** $-\frac{3}{2}\pi$ **o a** 270°.
La considerazione del quadrato inscritto nel circolo goniometrico e coi lati paralleli agli assi, che per il Teorema di Pitagora ha lato $\sqrt{2}$, dà subito, con analogo *caveat* come sopra (e anche dopo),

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$ $\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$ $\frac{7}{4}\pi$
x°	45°	135°	225°	315°
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1	-1	1	-1

La considerazione dei 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico, con un vertice in $(0,1)$ e rispettivamente in $(1,0)$, dà subito, dividendoli in triangoli equilateri di lato 1 e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$ $\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$ $\frac{11}{6}\pi$
x°	30°	150°	210°	330°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$ $\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$ $\frac{5}{3}\pi$
x°	60°	120°	240°	300°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

La considerazione di decagoni regolari darebbe ancora altri valori.

8.3 Alcune formule goniometriche notevoli

Nel corso dei secoli sono state dimostrate moltissime formule. Ecco alcune delle principali.
Identità goniometrica fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{5}$$

Formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x \cos x$$

$$\cos(2\,x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\,\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\,\sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan(2\,x) = \tfrac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x}, \qquad x \neq \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\,\sin \tfrac{x+y}{2}\,\cos \tfrac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2\,\cos \tfrac{x+y}{2}\,\sin \tfrac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2\,\cos \tfrac{x+y}{2}\,\cos \tfrac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2\,\sin \tfrac{x+y}{2}\,\sin \tfrac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

Formule di bisezione della tangente:

$$\tan \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{\sin x}{1+\cos x}, & x \neq (2\,k+1)\,\pi \\[2ex] \frac{1-\cos x}{\sin x}, & x \neq k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Vi sono poi le *formule parametriche razionali*, e molte altre.

9 Funzioni Trigonometriche III

9.1 Trigonometria – la goniometria dei triangoli

Teorema dei seni.[19] In un triangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti α, β, γ

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Teorema del Coseno.[20] In un triangolo di lati a, b, c, con angolo γ opposto al lato di misura c

$$c^2 = a^2 + b^2 - a\,b\,\cos\gamma.$$

Ed esistono poi innumerevoli altre formule di trigonometria.

9.2 Funzioni goniometriche inverse

Arcoseno, funzione dispari:
$\arcsin x$ è l'angolo α il cui seno è x, con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Arcocoseno:
$\arccos x$ è l'angolo α il cui coseno è x, con $\alpha \in [0, \pi]$.

Arcotangente, funzione dispari:

$\arctan x$ è l'angolo α la cui tangente è x, con $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.

In simboli:

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}$$

[19] Nasir al-Din al-Tūsī, persiano, XIII sec. d.C. "He is often considered the creator of trigonometry as a mathematical discipline in its own right", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

[20] Euclide, greco, III sec. a.C., ben noto, e Jamshīd al-Kāshī, persiano, XIII sec. d.C. "Much of al-Kāshī's work was not brought to Europe, and much, even the extant work, remains unpublished in any form", Wikipedia, l'enciclopedia libera (in inglese). "è noto anche [...] specialmente in Italia, come teorema di Carnot, dal nome del matematico francese Lazare Carnot, anche se in realtà il teorema stato reso popolare dal francese Franǫis Viète", Wikipedia, l'enciclopedia libera (in italiano).

$$\arccos := \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

$$\arctan := \left(\tan\big|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1}$$

Questi $^{-1}$ indicano la funzione inversa, assolutamente non la reciproca. (Questa del $^{-1}$ è una grave ambiguità notazionale della Matematica, che richiede intelligenza, caso per caso).

Alcuni valori notevoli. Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\nexists$
arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono. (Per esempio $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.61548$).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Svolgimento

Si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, corrispondenti appunto a $\sin x = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(Si notino le periodicità).

ESERCIZIO$_{\mu}$

La temperatura – considerata senza unità di misura– in una cella frigorifera sia modellizzata nelle 24 ore del giorno da

$$u_a(t) := 2\,a\, + a\,\sin\frac{\pi\,t}{12} \qquad 0 \le t \le 24$$

essendo a un parametro fissabile con una manopola. In quale orario la temperatura è ≥ 2.5 per $a := 1$?

Svolgimento.

Seppure non sia necessario per risolvere il problema, vediamo su WolframAlpha il grafico della temperatura per $a := 1$ scrivendovi

```
plot 2+Sin[Pi t/12], t from 0 to 24
```

Ora (con $a := 1$) abbiamo la disequazione

$$2 + \sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 2.5 \qquad \Big/ + (-2)$$

$$\sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 0.5$$

$$\text{poniamo } x := \frac{\pi\,t}{12} \text{ ottenendo } \sin x \ge \frac{1}{2}$$

e ci interessano solo i tempi

$$0 \le t \le 24 \qquad \Big/ \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$0 \le \frac{\pi\,t}{12} \le 2\,\pi \text{ cioè } 0 \le x \le 2\,\pi$$

e allora in $[0, 2\,\pi]$ dobbiamo risolvere $\sin x \ge \frac{1}{2}$, che si fa disegnando il circolo goniometrico, trovando subito (sono valori notevoli)

$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi\,t}{12} \le \frac{5}{6}\pi \Big/ \cdot \frac{12}{\pi}$$
$$2 \le t \le 10$$

e in conclusione

$$\boxed{\text{Fra le 2 e le 10 di mattina}}$$

ESERCIZIO$_\mu$ Approssimare $\cos(1)$ usando le (**??**) e (**??**).
Si verifichi poi su WolframAlpha con `Cos[1]`

Appendice A

ESERCIZI RISOLTI SU ESPONENZIALI E LOGARITMI

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che dev'essere

$$\underline{x > 0}$$

perchè x è argomento di un logaritmo. (Ovviamente $1 + x^2 > 0$ sempre). Ricordando le $\log_b u + \log_b v = \log_b(u\,v)$ e $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$ e $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \qquad \Big/ 10^\wedge \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{200\,x}{1 + x^2} = 100 \qquad \Big/ \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2\,x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che è > 0).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$* \approx$ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2 + 10} + \log_{10} \frac{x^2 + 10}{10^2} = 1$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\underline{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente $\log_{10} 0$). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perchè per $x \neq 0$ gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).

Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10}\left(\frac{x^2}{x^2+10}\cdot\frac{x^2+10}{10^2}\right)=1$$

e semplificando

$$\log_{10}\frac{x^2}{10^2}=1 \qquad \Big/\, 10^{\wedge} \qquad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{x^2}{10^2}=10^1 \qquad \Big/\cdot 10^2$$

$$x^2=10^2\cdot 10^1$$

$$x=\pm\sqrt{10^2\cdot 10}=\pm\sqrt{10^2}\,\sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione $x\neq 0$ ci faccia escludere qualche valore)

$$\boxed{x=\pm 10\sqrt{10}\approx\pm 31.623}$$

oppure con un decimale in meno

$$\boxed{x=\pm 10\sqrt{10}\approx\pm 31.62}$$

Esempio$_\mu$ La successione di Fibonacci, che modellizza l'espansione di una popolazione animale – almeno nelle fasi iniziali – è sì definita per ricorrenza (e solo su $\mathbb{N}$) ma è approssimata con una funzione esponenziale in base la sezione aurea:

$$a_n\approx\frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \tag{6}$$

per esempio $a_{10}=55\approx 55.0036$.
Dopo quanti mesi (se t indicia i mesi) la popolazione raggiunge il valore 135 301 852 344 706 746 049, oppure anzi, uscendo dall'esattezza ideale del problema, un valore $1.35\cdot 10^{20}$?

Abbiamo l'equaziona approssimata

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n\approx 1.35\cdot 10^{20} \qquad /\,\mathrm{lg}$$

$$\mathrm{lg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}+n\,\mathrm{lg}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx\mathrm{lg}(1.35\cdot 10^{20}) \qquad \Big/+\mathrm{lg}\sqrt{5}$$

$$
\begin{aligned}
n \ \lg\frac{1+\sqrt{5}}{2} &\approx \lg(1.35\cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5} \qquad \Big/ : \lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\
&\approx \frac{\lg(1.35\cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5}}{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\
&\approx \frac{\lg(1.35\cdot 10^{20}) + \lg 2.23607}{\lg 1.61803}
\end{aligned}
$$

e insomma ci servono i valori (approssimati) dei logaritmi decimali di 3 numeri.
Con l'approssimazione prima vista si ha

$$\approx \frac{20 + 0.130 + 0.35054}{0.2089} \approx 98.04$$

e calcolando con pazienza si troverà che il 98-esimo numero di Fibonacci è proprio 135 301 852 344 706 746 049. (Oppure con WolframAlpha: `Fibonacci[98]`).

Appendice B

ESERCIZI RISOLTI SULLE FORMULE GONIOMETRICHE

ESERCIZIO$_{\mu}$
Qual è la misura in radianti di un angolo di 150°?
SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{x_{rad}}{150^\circ} \qquad \Big/ \cdot 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} \cdot 150^\circ = x_{rad}$$

$$x_{rad} = \frac{15}{18}\pi_{rad}$$

$$\boxed{\tfrac{5}{6}\pi}$$

ESERCIZIO$_{\mu}$
Qual è la misura in gradi di un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti?
SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = \frac{2}{3}\pi_{rad} : x^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{\frac{2}{3}\pi_{rad}}{x^\circ} \qquad \Big/ \cdot \frac{180^\circ \cdot x^\circ}{\pi_{rad}}$$

$$x^\circ = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ$$

$$\boxed{120°}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2\,\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Svolgimento

Con la formula di addizione del coseno

$$2\Big(\cos x\,\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\left((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

e con il secondo membro così riscritto la disequazione equivale a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < -\sqrt{3}\,\sin x$$

$$-\sqrt{3}\,\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big/ : (-\sqrt{3}) < 0$$

$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da $-\frac{5}{6}\pi$ fino a $-\frac{\pi}{6}$, estremi esclusi, corrispondente appunto a $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{-\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

equivalentemente scritta

$$\boxed{\tfrac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \tfrac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x > 0.8$$

Svolgimento

(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{\arcsin(0.8) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$0.9272... + 2k\pi < x < 2.2142... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x \leq 0.8$$

(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{-\pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi \leq x \leq \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$-4.0688... + 2k\pi < x < 0.9272... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si veda su Wolframalpha il grafico di $\sin x - 0.8$ fra $-\frac{3}{2}\pi$ e $\frac{\pi}{2}$: `Link->`. (Curva sotto lo 0 da circa -4 a circa 1; è stato rappresentato un periodo di $2\,\pi$, poi si ripete; usare altri intervlli, come $[-\pi, \pi]$ invece di $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$, potrebbe portare a più complesse espressioni della soluzione, comunque valide).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Calcolare approssimatamente $\arcsin \frac{21}{25}$ (a mano, ovvio, ma anche prendere confidenza con una calcolatrice scientifica sarà un bene).
Si cerchi poi il valore online su WolframAlpha con

`ArcSin[21/25]`

Svolgimento

Calcoliamo $21 : 25 = 0.84$ (con la divisione a mano, o meglio osservando che $\frac{21}{25} = \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{84}{100} = 0.84$) e insomma cerchiamo un angolo, fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il cui seno sia 0.84. Ricordando (vedi (**??**)) che $\sin 1 \approx 0.84$ concludiamo $\arcsin \frac{21}{25} \approx 1$.
WolframAlpha con `ArcSin[21/25]` ci dà ≈ 0.997.

APPENDICE C
ESERCIZI DA RISOLVERE

Esercizio$_\mu$
$*$ [*disegno*] Si considerino 2 parametri fisiologici $p > 0$ e $q > 0$ per i quali si definisce *situazione normale* se (p, q) sta entro la curva

$$\frac{p^2}{100} + q^2 = 1$$

e *situazione anormale* altrimenti. (Per semplicità sono state omesse le unità di misura). Com'è la situazione coi valori $p = 5.6$ e $q = 0.73$? Si rappresenti graficamente la situazione.

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[4]{x}$. (Per esempio in $[-16, 16]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/4)`).

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[8]{x}$ in $[-1, 1]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazio-
ne). (Suggerimento: si calcolino con la calcolatrice le radici ottave di 0.1, 0.2,..., 0.9 con $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$, e a mano quelle di 0 e 1). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/8)`).