Le 64 Pillole

Matematica per Farmacia

[*in fieri* - *work in progress* - continua]

Alessandro Soranzo

Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Università degli Studi di Trieste

xx

ver. f 24 giugno 2020

"La mente non è un vaso da riempire, ma un legno da far ardere, perchè si infuochi il gusto della ricerca e l'amore della verità" (Plutarco).

Nota 1. SI PREGA DI AVVERTIRE L'AUTORE DI OGNI ERRORE ANCHE SE MINUSCOLO, GRAZIE!

Nota 2. Attualmente la separazione della parole in fine riga, fatta automaticamente dall'editor di testo, non corrisponde sempre alla grammatica italiana (ma in questa frase sì).

Nota 3. Questo testo fa una scelta drastica: usa entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale, per abituare lo studente, e, volendosi limitare, considererà solo occasionalmente lo standard del punto a mezza altezza. Inoltre, seguendo il N.I.S.T. (National Institute of Standards and Technology) statunitense, di solito userà lo spazietto come separatore delle terne di cifre.

Nota 4. In questo testo è usato il simbolo ≈ per indicare "circa" com'è previsto dallo standard ISO. Ma in futuro sempre di più si userà anche il simbolo ~ tradizionalmente usato in Farmacia.

Legenda. Per esprimere i risultati degli esercizi valgono questi simboli:

$\star$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.

$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato

Premessa

Si è voluto fare un testo ipertestuale su Statistica e altra Matematica. Soprattutto la Matematica utile per la Statistica.
Grande attenzione è stata posta agli errori più comuni: prevenire è meglio che curare. Esistono errori tipici, contro i quali è utile agire attivamente. Per esempio ritenere che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, e invece è l'inversa. Questo errore consueto e altri simili sono dovuti ad ambiguità notazionali della matematica *de facto*, nello stato in cui si trova oggi scritta.
Grande rilevanza è stata data a questo aspetto delle ambiguità notazionali. D'altra parte, la situazione oggi è tale, incredibilmente, che nemmeno è chiaro, quando in un testo si trova scritto

$$2{,}125$$

se si intenda quel numero, fra 2 e 3, "uno virgola centoventicinque", oppure "duemilacentoventicinque"!
Troviamo per esempio la relazione fra la nuova e la vecchia unità di misura del campo magnetico

1 T = 10.000 G su Wikipedia italiana `Link ->`

1 tesla = 10,000 gauss su Wikipedia in inglese `Link ->`

D'altra parte a cosa servirebbe sapere i più sottili teoremi del calcolo infinitesimale, se poi si permetterà ad Excel, software usatissimo nelle scienze applicate, di calcolare

−3^2

in modo *erroneo* – o, volendo essere benevoli, attenendosi alla convenzione tutta sua, di quel software, opposta a quella di praticamente tutta la comunità scientifica? E' meglio avvertire di questo lo studente.
Nella simbologia ci si è attenuti in generale allo standard ISO 80000-2:2009[(1)], per esempio tan e non tang nè tg per la funzione tangente. E uno spazietto, eventualmente, come separatore delle

[1] Si veda per esempio `https://ja.wikipedia.org/wiki/ISO_80000-2`

migliaia: 2 125.

Una certa attenzione è stata rivolta a Wikipedia. Lo studente dovrebbe abituarsi a consultarla. L'idea che non sia una fonte attendibile, per gli argomenti di questo testo elementare è – in generale, ovvio – senz'altro falsa. (Per questioni "sensibili", invece, alquanto male[2] si potrebbe dire di Wikipedia).

Ripetutamente si accenna a WolframAlpha: lo studente dovrebbe abituarsi a consultare questa potentissima intelligenza artificiale disponibile gratuitamente on-line.

Premesso che non tratteremo degli aspetti *materiali* della raccolta dati (questionari, interviste, eccetera), diciamo subito che la Statistica, così limitata, è una branca della Matematica, astratta come tutta la vera Matematica.
La Statistica verrà suddivisa in Statistica Descrittiva e Statistica Inferenziale.
In qualche modo possiamo dire che tutta la matematica che tratteremo, dai numeri alla Statistica Descrittiva, al Calcolo Infinitesimale e al Calcolo delle Probabilità, è propedeutica per la trattazione della Statistica Inferenziale.
La seconda Parte del corso riguarda le *Matematiche dell'Incertezza*. Naturalmente, le Matematiche dell'Incertezza non fanno affermazioni incerte, bensì fanno affermazioni certe su fatti incerti, per esempio che conviene scommettere (alla pari) che un dado darà un numero primo piuttosto che un numero quadrato. Nelle *Matematiche della certezza*, prima Parte del corso, è compresa la Statistica Descrittiva, che costituisce il Capitolo IV, e nelle *Matematiche dell'Incertezza* è compresa la Statistica Inferenziale, Capitolo XII, che in qualche modo rappresenta l'apice della trattazione.

[2]Parrebbe che molte pagine siano praticamente "blindate" da gruppi variamente ideologizzati – anche su questioni di Medicina. E si veda questo Link->

Il testo è *in fieri* / work in progress.

Prerequisiti

• I numeri primi: 2 (sì anche 2, ma non 1), 3, 5, 7, 11, 13, 19...
• L'algebra dei numeri e con le variabili, per esempio $x^2 - y^2 \equiv (x+y)(x-y)$
• L'equazione di secondo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ ha *discriminante* $\Delta := b^2 - 4\,a\,c$ e, se $\Delta \geq 0$, soluzioni $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\,a}$.
• 1 d = 24 h cioè 1 giorno ha 24 ore, da 0 a 24 o 2 volte da 0 a 12
• 1 h = 60' cioè 1 ora ha 60 minuti
• 1 s = 60" cioè 1 minuto ha 60 secondi
• Le operazioni con le ore: per esempio 3.5 h (cioè 3 ore e mezza) dopo le 23 sono le 2:30 (di notte).
• 1 anno (standard) ha 365 giorni, 1 anno bisestile ha 366 giorni
• Il comune dado ha 6 facce numerate da 1 a 6
• Una *ruota* del lotto ha i numeri 1...90
• Elementi basici di geometria euclidea piana: punto, retta, semiretta, segmento, piano, semipiano, triangolo, triangolo rettangolo, triangolo equilatero, rettangolo, quadrato, cerchio, semicerchio, perimetro, area...

E in particolare:

⋆ Il triangolo di base b e altezza h ha area $\frac{1}{2}\,a\,b$.
⋆ Il quadrato di lato a ha perimetro $4\,a$ e area a^2
⋆ Il cerchio di raggio r ha ciconferenza $2\,\pi\,r$ e area $\pi\,r^2$, e $\pi \approx 3.14$
⋆ Il parallelepipedo di lati a, b, c ha volume $a\,b\,c$
⋆ La sfera ha volume $\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

Valori numerici fondamentali

Alla fine di questo corso ci si aspetta che lo studente conosca a memoria alcuni valori numerici approssimati, in particolare

$\pi \approx 3.14$ (pi greco)

$\mathrm{e} \approx 2.718$ (Numero di Eulero)

$\lg 2 \approx 0.3$ (logaritmo decimale di 2, cioè $\log_{10} 2$)

$\lg \mathrm{e} \approx 0.4343$ (logaritmo decimale di e, cioè $\log_{10}\mathrm{e}$)

$\phi_{0.975} \approx 1.96$ (un quantile normale)

e quest'altro, esatto:

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.33333333333\ldots\ (\textit{periodico})$$

Indice delle 4 Sezioni e dei 12 Capitoli

Segue l'Indice delle 64 lezioni.

Alla fine del testo si trova un capitolo di esercizi e poi l'Indice Analitico con Approfondimenti.

0 Indice delle 64 lezioni

PARTE A — MATEMATICHE DELLA CERTEZZA
Sezione A1 – Matematiche elementari

I ——— Insiemistica e logica

II —— Algebra e piano

III —– Funzioni elementari, con equazioni e disequazioni

IV —– Statistica descrittiva

Sezione A2 – Calcolo infinitesimale

PARTE B — MATEMATICHE DELL'INCERTEZZA

Sezione B1 – Calcolo delle probabilità

"Non c'è niente di più pratico di una buona teoria", cit.

Nota sugli esercizi

Legendaa

$\star$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

PARTE A — MATEMATICHE DELLA CERTEZZA

Sezione A1 – Matematiche Elementari

I – Insiemistica e logica

1 I numeri

1.1 Perchè numeri, se ci interessano farmaci?

“Se non misuri le cose non puoi migliorarle” Lord Kelvin (quello della scala termometrica assoluta).

Citazione completa, da https://it.wikiquote.org/wiki/William_Thomson:

> Io spesso dico che quando tu puoi misurare ciò di cui parli, ed esprimerlo in numeri, sai qualcosa di esso; ma quando non lo puoi misurare, ed esprimerlo in numeri, la tua conoscenza è di tipo povero ed insoddisfacente; può essere l’inizio di conoscenza, ma sei a mala pena avanzato, nei tuoi pensieri, allo stadio di ”scienza”, di qualunque cosa si tratti.

(Alla fine di questa trattazione, vedremo che misurarle non basta più, bisogna sottoporre i numeri ad analisi statistica).

Detto molto approssimativamente, la Medicina moderna e con essa la Farmacia, tende sempre più a ridurre

la Medicina a Biologia
la Biologia a Biochimica
la Biochimica a Chimica
la Chimica a Fisica
la Fisica a Matematica.
(*Scientismo*).
Da ciò seguono molti successi. E pure insuccessi, anche perchè ad ogni “riduzione” si fa un’approssimazione, più precisamente si sostituisce una realtà con un suo *modello*, inevitabilmente approssimato. Nondimeno, appare chiarissimo che i modelli matematici riaffiorano costantemente in tutte le sopraelencate Scienze Applicate, *e in tutte le altre.* In qualche modo, come osservava Galilei nel Seicento, il linguaggio della Natura appare effettivamente “scritto” in termini matematici.

Citazione completa, da https://it.wikiquote.org/wiki/Galileo_Galilei:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l’universo), ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

E già Pitagora 25 o 26 secoli fa: "Ogni cosa si adatta al numero".

1.2 Gli insiemi numerici

Supponiamo noti:
- $\mathbb{N}$: i numeri naturali: 0, 1, 2...
- $\mathbb{Z}$: i numeri interi: sono di 3 tipi:
  - i numeri naturali diversi da 0, detti *interi positivi*: 1, 2, 3...
  - i loro *opposti*, detti *interi negativi*: -1, -2, -3...
  - lo 0.
- $\mathbb{Q}$: i numeri razionali: sono di 2 tipi, riconoscibili dalla loro scrittura decimale (ma la distinzione è poco significativa perchè dipende dalla base 10 scelta per la scrittura dei numeri):
  - i numeri decimale limitati, come 2018 e -2.018
  - un numeri decimali illimitati periodici, come $0.\overline{142\,857} = \frac{1}{7}$, ed eventualmente con *antiperiodo*: $0.08\overline{3} = \frac{1}{12}$

    → entrambi i tipi ammettono una scrittura sotto forma di frazione: $\frac{2018}{1}$, $-\frac{2018}{1000}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{12}$, rispettivamente
- $\mathbb{R}$: i numeri reali: sono di 2 tipi:
  - i razionali, qua sopra esposti
  - gli irrazionali: la loro scrittura decimale è un numero decimale illimitato non periodico, come

$$\sqrt{2} = 1.4142... \approx 1.41 \qquad \pi \approx 3.14$$

(Esistono poi i numero complessi $\mathbb{C}$ che non tratteremo, e pure altri insiemi "numerici").

1.3 Punto e virgola decimali, e punto a mezza altezza

Nella scrittura dei numeri con le cifre decimali (numeri "arabi", di origine indiana)

$$0,\ 1,\ 2...9$$

ci sono 2 questioni:
– separare la parte intera dalle cifre decimali
– separare eventualmente le terne di cifre per facilitare la lettura.

Per risolvere le 2 questioni vengono *variamente usati* 4 simboli:
- la virgola
- il punto
- lo spazietto
- il punto a mezza altezza ·

Sulle calcolatrici, e nei testi tecnici, scientifici e divulgativi il punto e la virgola sono entrambi usati da alcuni come separatore delle migliaia, e da altri come separatore della parte intera dalle cifre decimali.
Di per sè la scrittura

$$9{,}800$$

ci lascia nel dubbio di che numero si tratti, se circa 10 o circa 10 000, e in testi e su calcolatrici diverse ha proprio quei 2 diversi significati!

Sì, è incredibile, ma di fatto questa è la situazione attualmente.

E potrebbe trattarsi di una quantità – espressa in qualche unità di misura – di una sostanza *necessaria* al corpo umano in piccolissime quantità, ma *tossica* in dosi molto maggiori; senza voler qua fare medicina, si consideri per esempio il selenio.

Incredibilmente *a tutt'oggi non esiste uno standard internazionale per il separatore della parte decimale.*

Il lettore troverà facilmente sulla rete che il numero e
vale circa 2.718 secondo quasi tutti i testi in inglese
vale circa 2,718 secondo la maggioranza dei testi in italiano.
Negli stati di lingua inglese e negli articoli scientifici internazionali in inglese di solito si usa il punto, e in Italia spesso la virgola.

Molti Autori che usano il punto come separatore decimale, usano la virgola come separatore delle migliaia... e viceversa:

Wikipedia in italiano dice che 1 tesla equivale a 10.000 gauss

Wikipedia in inglese dice che 1 tesla equivale a 10,000 gauss.

Ebbene, si tratta di *diecimila*.

E su calcolatrici diverse, materiali o virtuali, disponibili qua in Italia, il punto e la virgola hanno proprio quei 2 diversi significati! **Attenzione!**

Spesso si riesce a capire il significato del punto, o della virgola, dal contesto, e, sulla calcolatrice, provando a scrivervi numeri.

Usando il punto decimale si segue il miglior standard che sperabilmente si ritroverà negli articoli scientifici internazionali di Farmacia, in lingua inglese. (Ma non può qua essere garantito).

Invece in farmacia in Italia in generale si troverà quasi l'opposto:

virgola per separare la parte intera dai decimali: $\pi \approx 3{,}141$

punto per separare le migliaia: 1.250 per milleduecentocinquanta.

Giustamente la *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e* *simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano ci ricorda che

> **L'uso non standardizzato di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli, può indurre in errore e causare danni ai pazienti**

Senza qua voler fare *legislazione farmaceutica*, argomento articolatissimo e complessissimo, citiamo comunque da quel testo:

> usare il punto per separare i tre zeri delle migliaia o usare parole come 1 milione per favorire la corretta interpretazione (ad esempio, 1000 unità va scritto 1.000 unità, 10000 unità va scritto 10.000 unità)

Si veda ancora questo esempio, su come scriveremo noi:

il punto a mezzo indica la moltiplicazione→ $3 \cdot 673 = 2\,019$ ← *si noti lo spazietto*

(Altri separano con lo spazietto le cinquine di cifre).

Il punto a mezza altezza come punto/virgola decimale. Su certi testi tecnico-scientifici, talvolta antiquati ma talvolta modernissimi $3 \cdot 673$ indicherebbe quel numero minore di 4 che in italiano scriverebbero 3,673: cioè, alcuni usano il punto a mezza altezza come se fosse un punto/virgola decimale: ecco un esempio in articolo (sul cancro infantile, 2017) su rivista scientifica internazionale di alto livello, The Lancet Oncology: `Link->`

Questo testo fa una scelta drastica: usa entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale, per abituare lo studente, e, volendosi limitare, considererà solo occasionalmente lo standard del punto a mezza altezza.

Inoltre, seguendo il N.I.S.T. (National Institute of Standards and Technology) statunitense, di solito userà lo spazietto come separatore delle terne di cifre.
Ma talvolta, per abituare lo studente, si userà come separatore delle terne di cifre la virgola o il punto, stranamente usati solo prima del punto/virgola decimale: 1,414.21356 o 1.414,21356([3]).
Per esempio per la costante di Faraday il N.I.S.T. dà

$$96\,485.332\,12\ldots\ \mathrm{C\ mol^{-1}}$$

(Che veramente parrebbe la scrittura migliore, N.d.S.).

1.4 Note sugli errori medici e farmaceutici

Leggiamo sul sito dell'Organizzazione Mondiale della Sanità in http://www.emro.who.int/emhj-volume-17/issue-2/article9.html

> The issue of medication prescribing errors was little discussed until (...) Barker and McConnell in the United States of America (USA) first demonstrated that medication errors occur more frequently than suspected. They estimated a rate of 16 errors per 100 doses (...) errors by pharmacists in dispensing drugs are an important cause of medication error, and many factors have been identified. The reported rate of dispensing errors ranges from 3.8% to 12.4% [Enfasi aggiunta]

SONO PERCENTUALI MOSTRUOSE [N.d.S.], speriamo siano ben state ridotte dagli anni a cui si riferiscono quelle ricerche

[3] Si tratta della radice quadrata di due milioni, ovviamente approssimata, come può apparire su diverse calcolatrici.

(1962 e 1991).

Leggiamo riportato su sito governativo statunitense in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9559708 (articolo del 1998)

> Forty-two percent of errors were considered to put the patient at risk for a serious or severe preventable adverse outcome. Errors in decimal point placement, mathematical calculation, or expression of dosage regimen accounted for 59.5% of dosage errors. The dosage equation was wrong in 29.5% of dosage errors. [Enfasi aggiunta]

1.5 Numeri romani.

Per i numeri interi positivi esiste anche la scrittura in numeri romani. In questa trattazione elementare ci limitiamo ai primi 12, che si trovano nella numerazione dei capitoli:
1 I – 2 II – 3 III – 4 IV – 5 V – 6 VI – 7 VII – 8 VIII – 9 IX – 10 X – 11 XI – 12 XII
Per esempio un cancro al IV stadio è più grave di uno al III stadio. E si consideri l'ossido di titanio (IV) o titanio diossido (il comunissimo colorante E171 di molti farmaci e vernici per muri, ben sospettato di tossicità([4])), e addirittura

manganese(II) oxide
manganese(II,III) oxide
manganese(III) oxide
manganese(IV) oxide

[4]Si veda per esempio in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/28106049 Food-grade TiO2 impairs intestinal and systemic immune homeostasis, initiates preneoplastic lesions and promotes aberrant crypt development in the rat colon. Scientific reports (2017), 7, 40373. Bettini S, Boutet-Robinet E, Cartier C, Coméra C, Gaultier E, Dupuy J, Naud N, Tachè S, Grysan P, Reguer S, Thieriet N, Rèfrègiers M, Thiaudiére D, Cravedi JP, Carriére M, Audinot JN, Pierre FH, Guzylack-Piriou L, Houdeau E.

manganese(VI) oxide
manganese(VII) oxide.

(Sarebbe anche bello ricordare il simbolo ss per $\frac{1}{2}$).

In Farmacia raramente servono numeri romani maggiori di 12, per esempio
– nella numerazione dei volumi delle riviste scientifiche
– nella scrittura dell'anno delle riviste scientifiche
– nella numerazione delle pagine fra la seconda di copertina e la pagina 3 di molti libri, per esempio European Pharmacopoeia, eighth edition, volume 1, Council of Europe, Strasbourg, ISBN: 978-92-871-7525-0, online in `LINK->` (Attenzione: questa online, del 2013, non è l'ultima versione).

Per numeri maggiori di 12 si possono
– studiare le (semplici) regole della numerazione romana
– online su WolframAlpha digitare

`roman number` *numero decimale o romano da convertire*

1.6 Notazione scientifiche dei numeri

Su molte calcolatrici e testi tecnico-scientifici, `E` (ma purtroppo anche `e`) indica 10^, con esponente positivo o negativo, per esempio
`6.022E23` $= 6.022 \cdot 10^{23} = 602\,200\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
`1.38E-23` $= 1.38 \cdot 10^{-23} = 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,013\,8$
(Approssimazioni del Numero di Avogadro e della Costante di Boltzmann, private delle unità di misura).
Ci si aspetti di trovare scritto anche `E+23` invece di `E23`, e purtroppo anche `e+23` ed `e-23`, con facile equivoco[5] col numero e.

(Ma non si confonda questo simbolo `E` con l'uguale simbolo che alcune calcolatrici danno... in caso di errore di calcolo! Per esempio immettendo `1/0`).

Sono scritture equivalenti

[5] Su testi diversi, $3\,\mathrm{e} - 2$ può indicare $3 \cdot 10^{-2} = 0.03$ oppure $3\,\mathrm{e} - 2 \approx 6.154\,85$. Su WolframAlpha si eviti del tutto la notazione con `E` ed `e` perchè entrambi i simboli vengono usati *anche* per il numero e, con facile possibilità di errori; si scriva invece `6.022 10^23`.

`2.019E3` e anche `2.019E+3` ma si evitino `2.019e3`, `2.019e+3`
$\mathtt{2.019} \cdot \mathtt{10}^3$ e anche `2.019 · 10^3`
$\mathtt{2.019*10}^3$ e anche `2.019*10^3`
`2.019 10^3` ← scrivete così su WolframAlpha ma non altrove
$\mathtt{2.019} \times \mathtt{10}^3$ e anche `2.019 × 10^3`
e nell'ultima si badi di non confondere il *per* con una *ics*, specialmente scrivendo a mano un'equazione come

$$2.3 \times 10^3 + 5.4\, x\, 10^2 = 0$$

1.7 Varia

Nella pratica, su internet spesso si trovano scritture grezze come
`2.019x10-3`, da intendendersi come `2.019E-3` = `2.019` $\times\, 10^{-3}$.

Si noti che in certi contesti si usa il simbolo `K` o `k` per indicare le migliaia e cioè esso significa ·1 000, per esempio le 2.5 `K` *views* ossia visualizzazioni della pagina web della farmacia Cuore Integerrimo, ma bisogna essere pronti a trovare con lo stesso significato anche THD, cioè *thousand*.

Si troverà anche MM e perfino mm per "milione".

E quant'altro... – *estote parati*.

1.8 I decimali sono gratuiti – usiamoli

Nella Farmacia che arriva all'utilizzatore finale ben difficilmente si daranno più di 3 cifre significative:
37.8 °C
35%
0,5 g,
con rispettivamente 3, 2 e 1 cifra significativa.

Come indicazione generalissima, cercheremo i fare i calcoli con

5 o 6 cifre significative, e di dare i risultati con 3 o 4 cifre significative. Calcoli successivi degradano via via la precisione.

L'operazione che più degrada la precisione è la sottrazione fra numeri vicini. Per esempio

$$\frac{1}{\sqrt{10} - \pi}$$

calcolato come $\frac{1}{3.16-3.14}$ è sbagliato del 3%, sgradevole;
calcolato come $\frac{1}{3.1623-3.1416}$ è sbagliato solo dello 0.07%.
Nei 2 casi gli errori assoluti sono rispettivamente 1.7 e 0.04 circa.

1.9 Cifre significative

In Matematica 0.5 e 0.50 sono uguali a $\frac{1}{2}$, e 0.50 non si scrive.

Invece nelle Scienze Applicate
0.5 rappresenta una quantità fra 0.045 e 0.55
0.50 rappresenta una quantità fra 0.0445 e 0.505
Si capisce che 0.50 si ritiene conosciuto con maggior precisione.

2019 ha 4 cifre significative
20.20 ne ha 4
2020 ha 3 o 4 cifre significative – ahimè
20.2 ne ha 3
20 ne ha 1 oppure 2 – ohibò
21 ne ha 2
0.21 ne ha 2
0.210 ne ha 3
0.021 ne ha 2
In pratica gli zeri iniziali non sono cifre significative.
Quelli finali di numeri interi – sono un mistero.
Si veda questo LINK->

La problematica è complessa perchè in generale non si sa la precisione con cui è scritto un dato.

La terza parte di un chilogrammo sarà
0.3333 kg se 1 era da intendersi 1.000
0.333 kg se 1 era da intendersi 1.00
0.33 kg se 1 era da intendersi 1.0
0.3 kg se 1 era da intendersi proprio solo 1

Possono formarsi varie problematiche, per esempio quando si fanno conversioni di unità di misura. Per esempio a proposito del Coronavirus (2020) circola ampiamente il consiglio di tenere una distanza di 1.82 m da ogni altra persona. Addirittura in un articolo scientifico di molto precedente[6] leggiamo, su altro virus:

> Adult volunteers who sat 1.82 m from an infected child did not become infected.

Di fronte a tale precisione viene il sospetto che la rivista scientifica richiedesse – com'è usuale – il Sistema Metrico Decimale, mentre la ricerca era stata fatta misurando 6 piedi, poi trasformati in 1.82 metri – non bene in effetti: corrispondono a circa 1.83 m – con *fittizia* precisione di 3 cifre significative.

1.10 Scrittura percentuale dei numeri

Altra forma di scrittura dei numeri è la forma percentuale, che si ottiene moltiplicando il numero per 100 e posponendovi il simbolo %:

$$x \equiv 100\,x\,\% \quad \text{per esempio } \frac{3}{2} = 150\%. \text{ E ancora:}$$

$$0 = 0\% \quad 1 = 100\% \quad \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$-0.3 = -30\% \quad \frac{4}{3} = 1.\overline{3} = 133.\overline{3}\% \approx 133.3\% \quad 0.05 = 5\%$$

[6] Am J Respir Crit Care Med. 2016 Aug 1;194(3):308-16. doi: 10.1164/rccm.201509-1833OC. Evidence of Respiratory Syncytial Virus Spread by Aerosol. Time to Revisit Infection Control Strategies? Kulkarni H, Smith CM, Lee Ddo H, Hirst RA, Easton AJ, O'Callaghan C.
In https://www.atsjournals.org/doi/pdf/10.1164/rccm.201509-1833OC

Non si confondano questi 3 numeri:

5%=0.05=1/20 numero classico della Statistica Inferenziale

0.5%=0.005=1/200 o 5 per mille

0.05%=0.0005=1/2000 o 0.5 per mille

Per le probabilità, che sono numeri fra 0 e 1, la scrittura percentuale è tipica, per esempio

$$P(\text{un dado regolare dà 3}) = \frac{1}{6} \approx 16.7\%.$$

Dalla scrittura percentuale si ottiene quella decimale dividendo per 100 e togliendo il simbolo %, per esempio

$$75\% = 0.75 \qquad 175\% = 1.75$$

Ma si faccia attenzione che nelle Scienze Applicate la scrittura

$$a \pm 10\%$$

non indica affatto i 2 numeri $a \pm 0.1$ (che sarebbe il significato pedissequo in Matematica) nè l'intervallo $[a-0.1, a+0.1]$ bensì l'intervallo $[a - 0.1\,a, a + 0.1\,a]$.
E nel caso generale, con una percentuale qualunque fra 0% e 100%,

$$a \pm t\,\% \text{ indica l'intervallo } [(1 - t\,\%)\,a, (1 + t\,\%)\,a]$$

Naturalmente invece se si tratta di 2 percentuali il significato è quello ovvio:

$$42\% \pm 5\% \text{ indica l'appartenenza all'intervallo } [37\%, 47\%]$$

1.11 Scrittura reciproca dei numeri

La scrittura reciproca dei numeri è del tutto indicata per le probabilità minori dell'1%. Per esempio

invece di probabilità 0.0005 ovvero 0.05%

si può dire 1 probabilità su 2000

decisamente più intelligibile.
Similmente 0.0001% corrisponde a 1 (probabilità) su un milione.

Si fa così: divido 0.0001 per 100 e ottengo 0.000001 senza %:

$$0.0001\% = 0.000001$$

e poi calcolo il reciproco con 1:, trovando il milione detto.

Tuttavia può presentarsi una problematica praticamente insolubile al livello di questa trattazione elementare:

0.000 7% corrisponderebbe a (circa) 1 (probabilità) su 142 857 ma questo potrebbe far pensare ad una conoscenza del dato originario con una precisione che in realtà non si aveva, proprio come se si fosse avuto 0.000 700 000%, con 6 cifre significative.

In Farmacia. Se l'utilizzatore finale, il cliente o paziente, legge il contenuto di magnesio per grammo in questi tipici integratori alimentari

Magnesio Citrato 0,160 g
Magnesio Cloruro 0,120 g
Magnesio Gluconato 0,058 g
Magnesio Orotato 0,077 g

potrebbe trovarsi in difficoltà a capire la situazione:

quanto magnesio effettivamente c'è nel prodotto?

Con la scrittura reciproca la situazione può risultare più chiara:

Magnesio Citrato circa 1 parte su 6
Magnesio Cloruro circa 1 parte su 8
Magnesio Gluconato circa 1 parte su 17
Magnesio Orotato circa 1 parte su 13

Questi numeri si calcolano con il passaggio al reciproco: 1:0,160=6,25.

1.12 Simboli simili

Nella scrittura a mano, ma anche in molti font digitali su carta o su schermo o display (di calcolatrice o macchina diagnostica), è facile confondere – vieppiù se non si vede tanto bene – alcuni simboli, con possibili errori, in particolare:

• numeri:
  ∅ Θ `8` zero barrato, zero barrato, otto
• numeri e lettere:
  0 O zero, o maiuscola; altro font: `0, O`
  `6, b` sei, bi muniscola
  1 l I uno, elle minuscola, i maiuscola; altro font: `1 l I`
  `5 s S` cinque, esse minuscola, esse maiuscola
  `q g 9`, in certi font, con aggravamento per testo sottolineato.

Si noti che negli U.S.A. non usano la scrittura italiana, a mano, del numero sette col taglietto orizzontale.

1.13 Scrittura a mano

Sull'ulteriore problema della pessima calligrafia dei medici che scrivono le ricette mediche si veda "Poor handwriting remains a significant problem in medicine" del Journal of the Royal Society of Medicine, riportato su sito governativo statunitense: Link->

Citiamo anche dal Time, http://content.time.com/time/health/article/0,8599,1578074,00.html

> Doctors' sloppy handwriting kills more than 7,000 people annually. It's a shocking statistic, and, according to a July 2006 report from the National Academies of Science's Institute of Medicine (IOM), preventable medication mistakes also injure more than 1.5 million Americans annually. Many such errors result from unclear abbreviations and dosage indications and illegible writing

(Enfasi aggiunta).
Con l'informatizzazione del sistema sanitario e farmaceutico è verosimile che quel dato (7000 morti/anno negli USA) diminuisca, e similmente in Italia.
E certo, se dei medici si ostinano a scrivere ,5 per 0,5 "risparmiando" uno zero, anche l'informatizzazione potrebbe non bastare. Tale scrittura è esplicitamente vietata dalla predetta Raccomandazione (settembre 2018) del Mistero della Salute italiano.

In essa leggiamo anche:

U (significato unità)
può essere erroneamente
interpretato come
“0” (zero)
causando un sovradosaggio
di 10 volte
ad esempio, 4U può essere
interpretato come 40

Se i problemi della scrittura a mano sono in diminuzione, invece con l’incombente anglicizzazione del linguaggio, può presentarsi un nuovo problema, con la lettura al telefono dei nomi dei farmaci. (La parola *ypsilon*, per fare un esempio, appare avere 8 pronunce: Link->).

1.14 Falsi amici – e pure confusionari

La questione di bilione e billion, trilione e trillion, è talmente ingarbugliata, che qua ci limitiamo a linkare Wikipedia, l’enciclopedia libera, LINK->, e a... diffidare quando si leggono quei termini.

1.15 Note finali sulla scrittura dei numeri

Praticamente in tutto il mondo per scrivere i numeri si usano le “cifre arabe”

0, 1, 2...9

e questa è una buona notizia. Anche gli arabi, che scrivono da destra a sinistra, scrivono i numeri nel verso “nostro”, cioè 243 significa 243 anche in un testo in arabo – buono a sapersi, per un farmacista che si troverà a operare in una missione più o meno di pace in una zona di lingua, o anche solo scrittura alfabetica, araba.

Superato questo livello minimo di unitarietà, la difformità nella scrittura dei numeri, in questo inizio di XXI secolo, è *sconcertante.*

Un testo italiano sarà sufficientemente scientifico perchè il numero 654.321 sia circa 654, o è di livello così divulgativo che quel numero è... un migliaio di volte più grande?

Veramente, nella pratica, c'è da aspettarsi un po' di tutto: attenzione!

L'intelligenza artificiale online WolframAlpha – di cui in generale si può dire più che bene – usa il simbolo E sia per il numero e, sia per la notazione scientifica dei numeri, con serie possibilità di errori per l'utente:

WolframAplha interpreta l'input 3 E6 come $3 \times 6 \times \mathrm{e}$ cioè $18\,\mathrm{e} \approx 48.93$

WolframAlpha interpreta l'input 3E6 come $3 \cdot 10^6$ cioè $3\,000\,000$

(WolframAlpha interpreta l'input 2E6 come Groton Municipal Airport; è un eccesso di intelligenza e di interpretazione, si direbbe...)

Non vogliamo qua estendere più di tanto il discorso, ma si noti che se dai *dati grezzi* risulta che un farmaco è stato somministrato dal 11/3 al 12/8, calcoliamo che è stato somministrato

154 giorni se è avvenuto in Europa: dal 12 marzo al 12 agosto

35 giorni se è avvenuto negli Stati Uniti: dal 3 novembre all'8 dicembre.

Altre problematicità sorgono dalle unità di misura, e qua accenniamo soltanto a questa:

Il fantasmagorico microgrammo. Da alcuni indicato con $\mu\, g$, da altri con mcg, e da altri con ug...
La predetta Raccomandazione ministeriale esige la parola *microgrammi* completa.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> The microgram is typically abbreviated "mcg" in pharmaceutical and nutritional supplement labelling, to avoid confusion, since the μ prefix is not always well recognized outside of technical disciplines (...) In the United Kingdom, because serious medication errors have been made from the confusion between milligrams and micrograms when micrograms has been abbreviated, the recommendation given in the Scottish Palliative Care Guidelines is

> that doses of less than one milligram must be expressed in micrograms and that the word microgram must be written in full [Enfasi aggiunta]

Ma attenzione ai testi antichi, perché, ci avverte la stessa pagina di Wikipedia,

> The expression ”mcg” is also the symbol for an obsolete CGS unit of measure known as the ”millicentigram”, which is equal to 10 μg

Ancora, la stessa pagina ci avverte in nota che

> The practice of using the abbreviation ”mcg” rather than the SI symbol ”μg” was formally mandated in the US for medical practitioners in 2004 by the Joint Commission on Accreditation of Healthcare Organizations (JCAHO) in their ”Do Not Use” List: Abbreviations, Acronyms, and Symbols because ”μg” and ”mg” when handwritten can be confused with one another, resulting in a thousand-fold overdosing (or underdosing).

1.16 Bottom line

Bene Lord Kelvin ha individuato l'*utilità* delle misure numeriche per il progresso delle Scienze, avendo peraltro già Galilei e Pitagora individuato l'universalità – in qualche modo *ontologica* – dei numeri nella realtà. Un'altra affermazione del pur ottimo Lord Kelvin, è che il futuro non è degli aeroplani ma delle mongolfiere: “non ho la minima molecola di fede nella navigazione aerea diversa da quella aerostatica"*Link–>*. Non per dire male dell'ottimo scienziato, ma per iniziare questo testo indirizzando lo studente verso lo spirito critico, che già le problematiche della semplice scrittura dei numeri dovrebbero avergli ispirato.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 1

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
≈ Si consideri una pillola ipotetica ma comunque di apparenza alquanto normale – non viene qua seguito alcuno standard legale o industriale – il cui volume interno abbia la forma di un cilindro di diametro 0,4 cm e lunghezza 1,2 cm completato con due semisfere.
Calcolatone il volume, lo si riduca di $^1\!/_4$.
Si ricordi che cilindri e prismi hanno volume *area di base* × *altezza* qualunque forma abbia la base.

SVOLGIMENTO
Chiaramente qua è stato seguito lo standard della virgola decimale.
Prima di tutto osserviamo che nel testo viene dapprima chiamata *lunghezza* del cilindro quella che di solito in geometria elementare, e in particolare nella formula, viene chiamata *altezza* del cilindro: abituiamoci a tale ambiguità.
Ricordiamo la formule dell'area del cerchio e del volume della sfera in funzione dei raggi:

$$\pi\, r^2 \qquad \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

La base del cilindro è un cerchio di raggio pari alla metà del diametro

$$r = 0{,}2\,\text{cm}$$

e quello è anche il raggio delle semisfere.
Avendosi 2 semisfere, calcoleremo il volume di 1 sfera e lo sommeremo al volume del cilindro, la cui area di base è $\pi\, r^2$, facendo i calcoli dapprima senza unità di misura:

$$V_{sfera\,unione\,delle\,2\,semisfere} + V_{cilindro} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 + \pi\, r^2\, h =$$

$$\approx \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^3 + 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1{,}2 \approx 0{,}184213$$

che ora riduciamo *di* $^1\!/_4$, come richiesto, con la formula $x \mapsto x - \frac{1}{4}\,x$ (da tenere ben distinta dalla $x \mapsto \frac{1}{4}\,x$ corrispondente a "ridurre *a* $^1\!/_4$")

$$\approx 0{,}184213 - \frac{0{,}184213}{4} \approx 0{,}13816$$

e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{0{,}138\ \text{cm}^3}$$

(Si tratta di 138 mm^3, molto approssimativamente $\frac{1}{7}$ di centimetro cubo ovvero millilitro).

NOTA. Le scritture frazionarie come $^1\!/_4$ e $\frac{1}{7}$ vengono escluse dalla *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano:

> evitare l'uso delle frazioni (ad esempio, $^1\!/_2$ compressa ovvero "metà compressa" puè essere frainteso con 1 o 2 compresse) e sostituire, ove possibile, il farmaco con altra forma farmaceutica avente il dosaggio necessario

ma esse continueranno a trovarsi in un'infinità di testi, anche di Farmacia.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

≈ Il punto e la virgola sono entrambi usati da alcuni come separatore delle migliaia, e da altri come separatore della parte intera dalle cifre decimali, ma spesso si riesce a capire quale dei significati ha il punto, o la virgola, dal contesto. Si considerino questi dati relativi a particelle ovvero corpuscoli, da considerare semplificatamente dischetti piani:

	PARTICELLE A	PARTICELLE B	PARTICELLE C
Diametro (nm)	987	12,140	92,500
Vita media (h)	14.5	56	122

Si ipotizzi una particella della stessa forma, che abbia un diametro ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C. Qual è l'area di questa particella, in nm^2 (che sono i nanometri quadrati)? Si esprima la soluzione usando lo spazietto per separare le migliaia e il punto decimale se ci sono decimali.

SVOLGIMENTO

La presenza del dato 14.5 ci indica che il punto non è usato come separatore delle migliaia ma come punto decimale; e invece la virgola è usata come separatore delle migliaia, in particolare nel diametro delle particelle C:

$$d = 92\,500\,nm$$

(qua meglio trascritto con lo spazietto invece della confondente virgola come spaziatore delle migliaia; ma purtroppo i testi tecnici e scientifici continuano a presentare queste problematiche e bisogna abituarsi ad affrontarle; per esempio si veda la tabella in
`https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/`).

Ora però dobbiamo occuparci dell'ipotetica particella col diametro d' ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C

$$d' = d - \frac{1}{5}\,d = \frac{4}{5}\,d = \frac{4}{5}\,92\,500\,nm =$$

$$= \frac{4 \cdot 92\,500}{5}\, nm = 74\,000\, nm$$

e allora raggio (la metà)

$$r = 37\,000\, nm$$

e ricordando che l'area del cerchio è πr^2 e che $\pi \approx 3.14$

$$\boxed{\approx 4\,298\,660\,000\, nm^2}$$

ma in effetti la precisione è illusoria, infatti con $\pi \approx 3.14$ intendiamo precisamente

$$3.135 \leq \pi < 3.145$$

e allora per l'area $A = \pi\, r^2$ vale

$$4\,291\,815\,000 \leq A < 4\,305\,505\,000$$

e allora come risultato preferiremo dare piuttosto

$$\boxed{\approx 4\,300\,000\,000\, nm^2}$$

(Eviteremo per adesso scritture come 4.3E9 o l'equivalente $4.3 \cdot 10^9$, e 4.30E9 o l'equivalente $4.30 \cdot 10^9$, e 4.300E9 o l'equivalente $4.300 \cdot 10^9$, eccetera, che dal punto di vista matematico rappresentano lo stesso numero ma nelle scienze applicate corrispondono a diversi livelli di precisione ovvero di *cifre significative*).
Usando un'approssimazione di π molto più precisa otterremmo

$$\boxed{\approx 4\,300\,840\,342.764\, nm^2}$$

con precisione sostanzialmente inutile (e pure fuorviante, perchè *verosimilmente* il dato 92 500 è esso stesso un'approssimazione).
(Ma in generale per π usiamo la semplice approssimazione 3.14).

Come indicazione generalissima, cercheremo i fare i calcoli con 5 o 6 cifre significative, e di dare i risultati con 3 o 4 cifre significative.
(92 500 ha 3 cifre significative se non si specifica che ne ha 4 o 5).

2 Logica delle proposizioni

(Contro)esempi stupefacenti ci indicano che le affermazioni matematiche vanno dimostrate, non basta fare un “mostra e dimostra” come i Peanuts[7]. (Ma in generale qua non faremo dimostrazioni).

Le illusioni ottiche ci indicano che è inappropriato usare solo figure per fare dimostrazioni.

Le ambiguità linguistiche ci indicano che è inappropriato usare solo testo libero del linguaggio comune per fare dimostrazioni.

La varietà delle lingue ci induce a cercare un **preciso linguaggio matematico simbolico** che prescinda dalle lingue.

Prima di tutto consideriamo il simbolo = da intendersi nel senso “è lo stesso elemento”. (Due rette perpendicolari r e s sono senz’altro *uguali* nel senso del linguaggio comune ma dal punto di vista matematico sono *diverse*: $r \neq s$, non è la stessa retta). Per esempio $area_\Delta = \frac{1}{2}\, b\, h$.
In generale scriveremo 3 varianti del simbolo di uguaglianza:

$:=$ nelle definizioni, per esempio $f(x) := x^2$,

$\equiv$ nelle identità, per esempio $(x+1)^2 \equiv x^2 + 2\,x + 1$.

$\stackrel{EQ}{=}$ nelle equazioni, per esempio
$(x+1)^2 \stackrel{EQ}{=} x^2 + 5\,x + 1$, equazione con (unica) *soluzione* $x = 0$.

Supporemo concetto primitivo (noto) le *proposizioni*. Esempi:

2 è pari

3 è pari (non è molto vero ma non importa, è proposizione)

X ha il diabete

[7] Per esempio $n^2 + n + 41$ dà un numero primo per $n = 0, 1, 2, \ldots, 38, 39$ ma non per $n = 40$. E si consideri la tragica disillusione del tacchino induttivista.

Y è iperteso

Introdurremo alcuni simboli logici rigorosi.

Indicheremo con $\Rightarrow$ l'*allora*, ovvero meglio *implica*:
per esempio
$1009 \cdot 2 = 2018 \Rightarrow 2018$ è pari.
Inversamente, il *non implica*:
per X quadrilatero
equilatero $\nRightarrow$ equiangolo. Controesempio: rombo non quadrato.
Il *controesempio* è un esempio che dimostra falsità.
Esempio in Medicina, anzi in effetti in Statistica Medica:

> the scientific story of COVID-19 conflicts with the widespread view of science as a source of certainties. For the general public, if something is described by an equation, it is exact. Epidemiological modelling is a dramatic counter-example. https://www.nature.com/articles/s42254-020-0188-2.pdf

(Le affermazioni matematiche sono *assolutamente vere per l'eternità*, ma i modelli matematici – che sono equazioni – descrivono una realtà loro propria che solo parzialmente la realtà segue; l'implicazione *"il futuro dell'epidemia è descritto da una formula* $\Rightarrow$ *sarà così"* è stata rivelata falsa dal controesempio dell'epidemia del 2020.)

Indicheremo con $\Leftarrow$ il *perchè*:
per esempio
2018 è pari $\Leftarrow 1009 \cdot 2 = 2018$
Si noti che p$\Rightarrow$q si può scrivere q$\Leftarrow$p.

Indicheremo con $\Leftrightarrow$ il *se e solo se*
Per esempio:
X triangolo:
equiangolo $\Leftrightarrow$ equilatero

Supponiamo noti il *vero* e il *falso*.
Li denoteremo V e F ma internazionalmente possono trovarsi indicati T e F e in vari altri modi.

Una **congettura (indimostrata)** è un'affermazione che non è dimostrata vera e non è dimostrata falsa. (Ma è creduta vera da qualche persona significativa, sennò non ne parleremmo).

Esempio. Congettura di Glodbach (Eulero e Goldbach, 1742)
ogni numero pari è somma di 2 numeri primi.

Connettivi logici. Vediamo 4 *connettivi logici*: *non*, *et*, *vel*, *aut*. (Il primo a rigo-
re è un operatore logico *unario*).

Tavola di verità del *non* ovvero ¬ ovvero ˜ ovvero NOT
p $\neg p$ scritto anche $\tilde{p}$ o semplicemente *non* p
V F
F V
Per esempio $p :=$"3 è pari" ha il *valore di verità* F, $\tilde{p}$ invece V.
$\tilde{p}$ potremo scriverla "non 3 è pari" o meglio "3 non è pari" e in ogni caso è equivalente alla "3 è dispari".

Continuiamo con l'*et* ovvero ∧ ovvero AND che significa *e*:
"A gennaio sosterrò Matematica e Fisica."
(Se farò solo 1 o 0 di essi mi accuseranno di falsità).
Tavola di verità dell'*et*:
p q p *et* q ... proposizione *composta*
V V V
V F F
F V F
F F F

Continuiamo col *vel* ovvero ∨ ovvero OR che significa *o* ovvero

oppure:
"A gennaio sosterrò Matematica o Fisica."
(Se sosterrò entrambi nessuno mi accuserà di falsità).
Questa è la tavola di verità del *vel*:

P q $p \vee q$
V V V
V F V
F V V
F F F

Purtroppo sia il *vel* che l'*et* talvolta vengono resi con una virgola, e *sperabilmente* si capisce il senso dal contesto:

$\{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0\}$ qua vale $\wedge$: è il I quadrante
$\{(x, y)|x = \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ qua vale $\vee$, cioè $x = \sqrt{2} \vee x = \sqrt{3}$: sono 2 rette verticali

Il *vel* è molto diverso dall'*aut*, l'*o esclusivo*, in italiano (linguaggio comune) ugualmente espresso con *o* oppure *oppure* come il *vel*:
"Mi fidanzerò con con Asdrubala o Berenice."
Questa è la tavola di verità dell'*aut*:

p q p *aut* q
V V F
V F V
F V V
F F F

In Excel in italiano, i 4 connettivi sono NON, E, O, XOR.

L'ambiguità notazionale è notevole per tutti gli operatori logici: per l'*aut* Wikipedia in inglese alla voce *Exclusive or* dà 10 simboli.

Si dice *tautologia* una proposizione sempre vera.
Esempio: $p \vee \neg p$

Si dice *contraddizione* una proposizione sempre falsa.
Esempio: $p \wedge \neg p$

Proposizioni *equivalenti*: hanno la stessa tavola di verità.
Esempio: (p aut q) ≡ (p et non q) vel (q et non p)

ESERCIZIO$_{\mu 2018\, modificato}$
Una certa condizione patologica X, è diagnosticata se:
c'è il sintomo A
e
c'è il sintomo B oppure (vel) il sintomo C
oppure (vel)
c'è il sintomo D ma non il sintomo A.
Cioè, indicando la negazione con la tilde, con ovvio significato dei simboli,

$$(a \wedge (b \vee c)) \vee (d \wedge \tilde{a}).$$

Indicando con V e F il *vero* e il $falso$, si conduca di passaggio in passaggio il calcolo relativo ad un paziente che ha i soli sintomi A, C, D, concludendo la diagnosi.
(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).

SVOLGIMENTO

Si ha
sintomo A presente: a è vera, V
sintomo B non presente: b è falsa, F
sintomo C presente: c è vera, V
sintomo D presente: d è vera, V
e si calcola

$$(V \wedge (F \vee V)) \vee (V \wedge \tilde{V})$$

$$(V \wedge V) \vee (V \wedge F)$$

$$V \vee F$$

$$V$$

e in conclusione abbiamo la diagnosi

$$\boxed{\text{La condizione patologica } X \text{ è presente}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast$ Una certa terapia verrà supportata da un governo se (e solo se)
è molto efficace e costa molto
OPPURE se

è solo abbastanza efficace e non costa molto.
(Supponendo in qualche modo determinati i significati precisi dei termini).
Con ovvio significato dei simboli

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q).$$

Nel caso specifico di una terapia che sia solo abbastanza efficace e costi molto si attribuiscano i valori di verità V o F a p, q, r, e si valuti di passaggio in passaggio fino al risultato finale il valore di verità dell'espressione soprascritta, concludendo se la terapia verrà supportata o no.
(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).

SVOLGIMENTO

Si hanno queste 3 proposizioni, coi loro valori di verità nel caso specifico:

F p =“la terapia è molto efficace”
V q =“la terapia costa molto”
V r =“la terapia è solo abbastanza efficace”

Si ha quindi successivamente

$$(F \wedge V) \vee (V \wedge \neg V)$$

$$F \vee (V \wedge F)$$

$$F \vee F$$

F (falso)

La terapia non verrà supportata

Nota sulla Logica

Lo studio della Logica vorrebbe insegnarci a ragionare correttamente. È impressionante l'illogicità usata abitualmente dalle persone che hanno studiato poco – ma ancor più colpisce quella usata da persone di alto grado nelle istituzioni, che hanno responsabilità sulla vita di tutti.

Gli esempi sarebbero innumerevoli.

Leggiamo sul sito del Ministero della Salute italiano([8])
Mangiare tante arance e limoni previene il contagio perchè la vitamina C ha azione protettiva nei confronti del nuovo coronavirus
Falso
Non ci sono evidenze scientifiche che provino un'azione della vitamina C sul virus
Ma allora è congettura indimostrata, e quindi forse è falso ma forse è vero, oppure è certamente falso come sopra affermato?

[8] http://www.salute.gov.it/portale/malattieInfettive/dettaglioNotizieMalattieInfettive.jsp?lingua=italiano&id=4276 letto il 15 giugno 2020.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle lezioni appropriata

2.1 Scrittura percentuale dei numeri

Altra forma di scrittura dei numeri è la forma percentuale, che si ottiene moltiplicando il numero per 100 e posponendovi il simbolo %:

$$x \equiv 100\,x\,\% \quad \text{per esempio } \frac{3}{2} = 150\%. \text{ E ancora:}$$

$$0 = 0\% \quad 1 = 100\% \quad \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$-0.3 = -30\% \quad \frac{4}{3} = 1.\overline{3} = 133.\overline{3}\% \approx 133.3\% \quad 0.05 = 5\%$$

e l'ultimo è un numero classico della Statistica Inferenziale (che potrebbe venir confuso con 0.5%).
Per le probabilità, che sono numeri fra 0 e 1, la scrittura percentuale è tipica.

Dalla scrittura percentuale si ottiene quella decimale dividendo per 100 e togliendo il simbolo %, per esempio

$$75\% = 0.75 \qquad 175\% = 1.75$$

Ma si faccia attenzione che nelle Scienze Applicate la scrittura

$$a \pm 10\%$$

non indica affatto i 2 numeri $a \pm 0.1$ (che sarebbe il significato pedissequo in Matematica) nè l'intervallo $[a - 0.1, a + 0.1]$ bensì l'intervallo $[a - 0.1\,a, a + 0.1\,a]$.

E nel caso generale, con una percentuale qualunque fra 0% e 100%,

$$a \pm t\,\% \text{ indica l'intervallo } \left[(1 - t\,\%)\,a, (1 + t\,\%)\,a\right]$$

Naturalmente invece se si tratta di 2 percentuali il significato è quello ovvio:

$$42\% \pm 5\% \text{ indica l'appartenenza all'intervallo } [37\%, 47\%]$$

3 Prime nozioni sugli insiemi

L'insiemistica dà una concettualizzazione univoca[9] per rappresentare un'infinità di situazioni della realtà, e permette una modellizzazione in grado di rendere chiare relazioni fra enti vari – persone, malattie, farmaci, soldi, di tutto – che sarebbero semplicemente *invisibili* nell'elencazione bruta di, poniamo, 60milioni di casi.

3.1 Nozioni di insieme, elementi e appartenenza

In questa trattazione elementare, la nozione di *insieme* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*. Possiamo dire che un insieme è, in qualche modo, una *raccolta* di elementi, o *classe* (di elementi). Ma anche la nozione di *elemento* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*, e anche la nozione di *appartenenza* di un elemento ad un insieme.
Agli insiemi *di solito* si dà nome una lettera latina maiuscola, come A e X, ma per alcuni insiemi si usano grafie particolari, per esempio l'insieme dei numeri naturali viene denotato con $\mathbb{N}$.
L'*appartenenza* (concetto primitivo) di un elemento ad un insieme si indica col simbolo $\in$, per esempio con $3 \in I\!N$, e la sua negazione con $\notin$: $-3 \notin I\!N$. Scriveremo equivalentemente prima $\mathbb{N}$ e poi 3, col simbolo $\in$ scritto specularmente, e similmente per $\notin$.
Come *variabili* atte a rappresentare un elemento indeterminato

[9] Salvo le attualmente purtroppo numerose ambiguità notazionali, ma questa è altra questione, ora di minor importanza.

di un insieme, *di solito* si usano lettere latine minuscole: a, x...
È ovvio che un insieme si può considerare assegnato se è univocamente *chiaro*([10]) se un elemento vi appartiene o no, per esempio le persone *simpatiche* non costituiscono un insieme. Quelle *sane*, o *povere*, o *diabetiche*, o *ipertese*, sì, se si suppone che da qualche parte siano stati ben definiti quegli attributi.
Un insieme può essere determinato *per elencazione* (*principio di estensione*) elencandone gli elementi fra parentesi graffe, per esempio $\{3, 5, 8\}$, eventualmente con puntini di sospensione per indicare elementi non trascritti ma che si suppone il lettore possa capire quali sono, per esempio $\{0, 1, 2, 3...\}$, l'insieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali*.
Tipici insiemi sono i *singoletti*, come $\{x\}$, $\{diabete\}$, $\{0\}$, eccetera, con un solo elemento.
Gli insiemi si possono anche rappresentare (*principio di astrazione*) con la *proprietà caratteristica*, cioè *caratterizzante*, degli elementi, per esempio $\{x \in I\!N | x\, pari\}$, che magari talvolta scriveremo solo $\{pari\}$, che però potrebbe lasciarci nel dubbio, se non è chiaro dal contesto, che si intendesse $\{x \in \mathbb{Z} | x\, pari\}$, comprendendo per esempio -8. Il simbolo $|$ si legge "tale che" e altre volte si scrive $:$ o t.c..
Naturalmente gli insiemi poi possono rappresentarsi graficamente con ovali racchiudenti i loro elementi (*diagrammi di Eulero-Venn*).
Si provi a rappresentare con un rettangolo l'umanità, si *ripartisca* in *poveri*, *benestanti* e *ricchi*, e con un ovale nel rettangolo si rappresentino i *malati* – sempre supponendo definite la qualità.

3.2 Uguaglianza; insieme vuoto; inclusione

Due insiemi si dicono uguali se hanno gli stessi elementi. Anche se hanno diverse definizioni, per esempio

$$X := \{divisori\ di\ 6\} = \{1, 2, 3, 6\} =$$

[10]La questione della menzionata *chiarezza* non è banale, ma qui non la approfondiremo; si noti comunque che, per esempio, i divisori di $1+2018^{2019}$ costituiscono un insieme, nonostante possa essere improbo stabilire se qualche determinato numero vi appartenga.

$$= Y := \{numeri\, di\, 3\, lettere\, in\, italiano\}$$

Esiste un unico insieme privo di elementi, l'*insieme vuoto*, denotato a stampa $\varnothing$ o, scrivendo a mano, qualcosa come ϕ.

Se ogni elemento di X appartiene a Y si dice che X è *contenuto* in Y:

$$X \subseteq Y \qquad \text{(equivalente a } Y \supseteq X\text{, contiene)}$$

Esempi.

{titolari tessera fedeltà farmacia} ⊆ {aventi diritto allo sconto}

{invalidi} ⊆ {aventi diritto allo sconto} ⊆ {umanità}

Si rappresentino i diagrammi di Eulero-Venn (facendo attenzione che ci possono essere invalidi titolari di tessera fedeltà).

3.3 Cardinalità, insiemi finiti e infiniti

In questa trattazione elementare la *cardinalità* di un insieme finito è il numero dei suoi elementi.
La cardinalità è indicata con $\#E$ (e da altri con card$E$ o $|E|$).
Per esempio $\#\{a, b, c\} = 3$.
Supponiamo noti i concetti di insieme finito e insieme infinito↑.

3.4 Insieme delle parti

L'insieme delle parti $\mathscr{P}(A)$ di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. (Compresi ovviamente l'insieme vuoto e A stesso). In simboli

$$\mathscr{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}\,.$$

L'insieme delle parti di A si chiama anche *insieme potenza* di A.
Trattazione elementare valida per i soli insiemi finiti.
Per esempio se $A := \{a, b, c\}$ allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}\,.$$

Se un insieme ha n elementi allora (teorema) il suo insieme delle parti ha 2^n elementi. Cioè, usando il simbolo # della cardinalità, qua nel significato semplice di *numero di elementi*,

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^{\#A}\,.$$

Nell'esempio $\mathscr{P}P(A)$ ha 8 elementi, cioè 2^3, perchè A ha 3 elementi.
È possibile una trattazione ad un livello superiore↑, valida per tutti gli insiemi, finiti e infiniti.

ESERCIZIO$_\mu$
Supponiamo che ad un farmacista, cui normalmente arrivano un centinaio di persone al giorno, una volta ne arrivino un migliaio, lamentando svariati sintomi fra una mezza dozzina di sintomi. Volendo individuare l'insieme di sintomi più caratteristico della nuova situazione, per affrontarla validamente, si propone di elencare tutti i possibili sottoinsiemi di sintomi, da 2 sintomi fino a 6 sintomi. Quanti elementi avrà questa lista di liste di sintomi?

SVOLGIMENTO
I sottoinsiemi dell'insieme di 6 sintomi sono (insieme delle parti) 2^6 ma dobbiamo escludere i 6 insiemi costituiti da 1 solo sintomo e 1 insieme costituito da 0 sintomi (l'insieme vuoto) e allora in tutto

$$2^6 - 6 - 1 =$$

(che naturalmente significa $(2^6 - 6) - 1$: cioè in assenza di parentesi facciamo le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, non faremo certo prima $6 - 1$, che produrrebbe un errore, bensì prima $(2^6 - 6)$)

$$\boxed{57}$$

Ecco per completezza alcuni elementi della lista con 57 liste di sintomi, denotati con S1,...,S6:

S1 S2 ← 1^ lista
S1 S3
...
S1 S6
S2 S3
S2 S4
...
S9 S10

S1 S2 S3
S1 S2 S4
...
S1 S2 S3 S4 S5 S6 ← 57^ lista

3.5 Operazioni insiemistiche e logiche a confronto

Consideriamo gli insiemi come sottoinsiemi di un *insieme universo*, in generale chiamato U ma non necessariamente, che potrebbe essere per esempio $\mathbb{R}$, oppure {clienti della nostra farmacia}, oppure {residenti in Italia}.

Insieme complementare di 1 insieme:
$A^C := \{x \in U | x \notin A\}$ cioè $\neg(x \in A)$

Insieme intersezione di 2 insiemi:
$A \cap B := \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$

Insieme unione di 2 insiemi:
$A \cup B := \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$

Insieme differenza simmetrica di 2 insiemi:
$A \Delta B := \{x \in U | x \in A \, aut \, x \in B\}$

Si hanno allora queste 4 corrispondenze fra insiemistica e logica:
^{C} $\neg$
$\cap$ $\wedge$
$\cup$ $\vee$
Δ *aut*

Valgono molte altre[11] corrispondenze.

[11] Per il lettore interessato: valgono (teorema) queste ulteriori corrispondenze fra simboli insiemistici e logici:
2 *involuzioni*:
$(A^C)^C = A$
$\neg(\neg p) = p$
4 *proprietà distributive* (corrispondentisi a coppie)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si definisce poi l'*insieme differenza* di 2 insiemi:
$A \setminus B := \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$

Due insiemi si dicono *disgiunti* se hanno intersezione vuota.
Per esempio
$\{italiani\ sani\}$ e $\{italiani\ diabetici\}$
$\{colesterolo \leq 200\}$ e $\{colesterolo > 200\}$ (sottinteso, "persone con", e l'unità di misura è pure sottintesa, e anche l'insieme universo, che potrebbe essere quello degli italiani, degli europei, degli esseri umani... dipende dal contesto considerato).

Si definisce *partizione* di un insieme una sua suddivisione in sottoinsiemi disgiunti. Quella soprascritta dei sani e dei diabetici non dà certo una partizione dell'insieme $\{italiani\}$, ma quella secondo colesterolemia sì, come pure
$\{\{sani\}, \{malati\}\}$
$\{\{poveri\}, \{benestanti\}, \{ricchi\}\}$
$\{\{bambini\}, \{adolescenti\}, \{adulti\}, \{anziani\}\}$
(al solito, supposti ben definiti i termini) tutte di evidente interesse epidemiologico.

3.6 Nota sull'insiemistica

L'insiemistica – che trattatiamo al livello minimo per gli scopi della Farmacia – è materia sottile, che raggiunge vertici di inverosimile complessità. Già migliaia di anni fa sono emersi problemi che a tutt'oggi sono studiati intensamente:

Il barbiere del villaggio, colui che rade coloro
che non si radono da sè, si rade da sè?

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2 proprietà associative, 2 Leggi di De Morgan, che il lettore interessato troverà facilmente, eccetera.

Suggerimento: si evitino insiemi che contengono se stessi come elemento:

$$\alpha \in \alpha$$

4 Altra logica e altra insiemistica

4.1 Predicati e insieme di verità

Un predicato è una sorta di proposizione ma con una o più variabili, le quali potranno essere denotate con qualunque lettera e in particolare x, y, z..., come per esempio

$$q(z) := \text{“}x \text{ è sano” (si supponga definito il concetto)}$$

$$p(z) := \text{“}z \text{ è una retta obliqua del piano cartesiano”}$$

$$r(z) := \text{“}z \text{ ha diritto allo sconto del 10\%”}$$

che di per sè non sono nè vere nè false, dipende da z. Per esempio

$$q(\text{Asdrubala}) \text{ è vera (speriamo per lei, è un caso ipotetico)}$$

$$p(\text{asse } x) \text{ è falsa}$$

$$p(\text{bisettrice del I e III quadrante}) \text{ è vera}$$

(12)

L'*insieme di verità* di un predicato è il sottoinsieme del dominio in cui il predicato è vero.(13)

[12] Ecco altri predicati, col loro dominio:
$x \in \mathbb{N}$, $p_1(x) :=$“x è un numero pari” ($p(-8)$ non ha senso)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_2(x) :=$“x è un numero pari” ($p(-8)$ è vera)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_3(x) :=$“$x^2 = 2$”
$x \in \mathbb{R}^+$, $p_4(x) :=$“$x^2 = 2$” ($\mathbb{R}^+$ è l'insieme dei reali positivi)
$x \in \mathbb{R}$, $p_5(x) :=$“$x^2 = 2$”
$x \in \{\text{residenti in Italia}\}$, $q_1(x) :=$“x è sano” (si supponga definito)
$x \in \{\text{residenti in Italia}\}$, $q_2(x) :=$“x è diabetico” (come sopra)
$x, y \in \mathbb{Z}$ $t_1(x, y) :=$“x divide y”
$x, y \in \{\text{residenti in Italia}\}$ $t_2(x, y) :=$“x e y sono coniugi”

[13] Insiemi di verità relativi alla nota precedente:
insieme di verità di p_3: $\varnothing$
insieme di verità di p_4: $\{\sqrt{2}\}$
insieme di verità di p_5: $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

4.2 Quantificatori

Esistono questi 2 *quantificatori*, dal significato ovvio:
quantificatore *per ogni*, $\forall$
quantificatore *esiste*, $\exists$

Riprendendo la $q(z)$ dell'esser sano, di cui sopra, certamente

$$(\exists\, t \in \{\text{esseri umani}\})q(t)$$

cioè esiste (almeno) un sano.
Riprendendo la $r(z)$ del diritto allo sconto, di cui sopra, potrebbe darsi il caso che

$$(\forall x \in \{invalidi\})r(x)$$

cioè che ogni invalido abbia diritto allo sconto del 10%.
Naturalmente si possono considerare esempi matematici.[14]

Indicheremo con $\exists!$ l'espressione “esiste un unico”.

4.3 Regole di negazione

La negazione di
“(tutti) i paperopolesi sono onesti”
non è
“(tutti) i paperopolesi sono disonesti”, no, affatto!
bensì

---

[14] Qua si fa riferimento ai predicati definiti in una nota precedente.
Esempio 1:
“$(\exists x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$” (cioè “$(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione vera
Esempio 2:
“$(\forall x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$” (cioè “$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione falsa
Esempio 3:
“$(\exists x \in \mathbb{Z})\, t_1(x,y)$” (cioè “$(\exists x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y
(fra l'altro sempre vero, cioè vero $\forall y \in \mathbb{Z}$)
Esempio 4:
“$(\forall x \in \mathbb{Z})\, t_1(x,y)$” (cioè “$(\forall x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y
(fra l'altro sempre falso, cioè falso $\forall y \in \mathbb{Z}$)

"esiste (almeno) un paperopolese disonesto".

Cioè, in simboli e più in generale,
$\neg((\forall x \in E)p(x)) = (\exists x \in E)\neg p(x)$
e vale anche l'altra negazione
$\neg((\exists x \in E)p(x)) = (\forall x \in E)\neg p(x)$

Esercizio. Si trascriva quest'ultima come sopra, con "italiani" e "sani".
Esercizio. Si neghi "per ogni malattia esiste una cura".

4.4 Logica – bottom line Farmaceutico

La trattazione della Logica che si è potuta fare al livello di questo testo elementare – una trattazione completa delle attuali conoscenze riempirebbe parecchi corsi universitari – vorrebbe insegnarci
a ragionare bene
o in subordine almeno
a non ragionare male. (Meglio tacere piuttosto).

Più del 90% delle migliaia di persone morte a Milano nel dicembre 2019 era entrata in contatto con quantità significative di monossido di diidrogeno nelle 24 ore precedenti la morte, ma **questa affermazione vera non implica alcuna indicazione di pericolosità del monossido di diidrogeno**.
(Che infatti nessuno bandisce).

Molti credono che evitare farmacologicamente e/o chirurgicamente una malattia che causa morte riduca la mortalità: **e chi l'ha detto? Dove sta scritto?** Che effettivamente quella terapia riduca la mortalità andrà dimostrato scientificamente, per esempio con uno **studio prospettico randomizzato in doppio cieco.** Non con il predetto pseudo-ragionamento, ritenuto logico, che evitare una malattia che causa morte riduca la mortalità.

Fra i vari esempi possibili si consideri il seguente, che ha suscitato clamore mediatico anche in riferimento all'attrice Angelina Jolie.

Esistono mutazioni genetiche (BRCA1 e BRCA2) che rendono *enormemente* più probabile il cancro al seno.

Asportare quasi del tutto il seno evita quasi del tutto quel cancro.

Ma si riduce la mortalità? Leggiamo in un articolo scientifico:(15)

> (...) bilateral risk-reducing mastectomy (BRRM) (...) During a mean follow-up of 10.3 years, 722 out of 1712 BRCA1 (...) and 406 out of 1145 BRCA2 (...) underwent BRRM. For BRCA1 mutation carriers hazard ratios were 0.40 for overall mortality (...) For BRCA2 mutation carriers (...) hazard ratio for overall mortality was 0.45

Detto semplificatamente, mortalità doppia fra le operate.

Incidentalmente, si noti che l' impossibilità nel caso specifico di fare uno studio prospettico randomizzato in doppio cieco limita addirittura intrinsecamente la possibilità di raggiungere una certezza sulla questione, se non assoluta almeno del livello di *gold standard* della Medicina e della Farmacia, che è appunto quel tipo di studio.

4.5 Prodotto cartesiano

Si chiama *prodotto cartesiano* di 2 insiemi X e Y l'insieme denotato con $X \times Y$ delle *coppie ordinate*(16) (x, y) con $x \in X$ e $y \in Y$. In simboli

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \; et \; y \in Y\} .$$

L'insieme X può essere finito o infinito, e così pure Y.
Se X e Y sono finiti allora (teorema(17), ovvio)

$$\#(X \times Y) = (\#X) \cdot (\#Y)$$

15 Heemskerk-Gerritsen, Bernadette A M et al. "Survival after bilateral risk-reducing mastectomy in healthy BRCA1 and BRCA2 mutation carriers." Breast cancer research and treatment vol. 177,3 (2019): 723-733. doi:10.1007/s10549-019-05345-2
in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC6745043/

16 Una definizione rigorosa di coppia ordinata (x, y) è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ma in questa trattazione supponiamo di per sè chiaro il concetto.

17 Questo teorema è vero anche per insiemi infiniti ma allora la cardinalità risultante è infinita e non ha più il significato elementare qua considerato di *numero di elementi.*

cioè la cardinalità del prodotto cartesiano di 2 insiemi è il prodotto delle cardinalità dei 2 insiemi. Per esempio

$$\{a, b, c\} \times \{\alpha, \beta\} = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\}$$

ha $2 \cdot 3 = 6$ elementi, che sono coppie ordinate.
Similmente si definisce il prodotto cartesiano di 3 insiemi, composto dalle terne ordinate, e di n elementi, composto dalle n-uple; e si estende banalmente il soprascritto teorema sulle cardinalità.

ESERCIZIO$_\mu$ Supponiamo in via del tutto ipotetica che una certa molecola possa completarsi in un punto con uno qualunque fra gli elementi con numero atomico da 58 a 71 (lantanoidi diversi dal lantanio) e in altro punto con uno qualunque fra in primi 5 di essi. (Senza voler qua fare Farmacologia, si pensi comunque ai *farmaci chelanti*). In quanti modi può completarsi la molecola? E se aggiungiamo l'ipotesi che in ogni caso non si completa con due atomi uguali?

SVOLGIMENTO

I lantanoidi diversi dal lantanio, con numeri atomici

$$58, 59, ..., 70, 71$$

sono $71 - 57$ cioè 14.
La coppia ordinata di atomi atta a completare la molecola può costituirsi (prodotto cartesiano) in $14 \cdot 5 =$

$$\boxed{\text{a) } 70 \text{ modi}}$$

Se aggiungiamo l'ipotesi che la molecola non può completarsi con due atomi uguali, dobbiamo escludere 5 casi, restandone $70 - 5$ cioè

$$\boxed{\text{b) } 65 \text{ modi}}$$

ESERCIZIO.$_\mu$ Consideriamo una serie di cassetti in una farmacia etichettati con un codice composto da una lettera (inglese) maiuscola o da una lettera seguita da una cifra (decimale). Quanti sono i possibili cassetti etichettabili?

SVOLGIMENTO

L'insieme dei codici di 2 caratteri è in corrispondenza biunivoca col prodotto cartesiano

$$\{A, B, ..., Z\} \times \{0, ..., 9\}$$

che ha $26 \cdot 10 = 260$ elementi. Considerando anche i 26 codici di un carattere (lettera maiuscola)

si hanno in tutto 286 possibili cassetti

4.6 Diagrammi e grafici

Ogni rappresentazione grafica di dati la diremo *diagramma*. Fra essi ci sono i ben noti diagrammi a torte per le percentuali, i grafi usati per le mappe cognitive, gli istogrammi che vedremo, e **i *grafici* in senso matematico** (sebbene a nelle Scienze Applicate spesso tutti i diagrammi vengano chiamati grafici) così definiti:

grafico è un sottoinsieme G di $X \times Y$ tale che

$$(\forall x)\,(\exists!\,y)\,(x, y) \in G$$

(È sottinteso che $x \in X$ e $y \in Y$, e fra la quarta e la quinta parentesi è implicito un "tale che").

4.7 Funzioni

Una legge che ad ogni elemento di un insieme D detto *dominio* associa 1 elemento di un insieme C detto *codominio* si chiama *funzione* definita in D a valori in C:

$$f : D \to C$$

Ad ogni funzione daremo un nome, di solito di 1 lettera([18]), per esempio f oppure y oppure a, e la *variabile indipendente*, che varia nel dominio, la indicheremo con un nome qualsiasi, di solito di 1 lettera, per esempio scriveremo

$$f(x) := x^2$$

e poi sarà per esempio $f(2y) = 4y^2$, e $f(\alpha + 1) = \alpha^2 + 2\alpha + 1$ con variabili y e poi α, mentre la f è la funzione di prima.

[18] Una funzione con nome di più lettere, anche con la variabile di più lettere, potrebbe per esempio essere $area(lato) = lato^2$, che dà l'area del quadrato in funzione del lato.

Al di fuori della Matematica, per esempio in Chimica e soprattutto in Informatica, è normale dare alle funzioni nomi di più lettere, per esempio pH, `STIPENDIO`, `IVA_2019`.

Esempi di funzioni non da numeri a numeri:

$$W: \text{ essere umano } \mapsto \text{ suo codice fiscale}$$

$$Y: \text{codice fiscale} \mapsto \text{numero di acquisti eseguiti nella farmacia}$$

Vediamo adesso alcuni esempi di funzioni definite in $\mathbb{R}$, o, volendo, suoi sottoinsiemi, e a valori in $\mathbb{R}$.

4.8 Passaggio a opposto, reciproco, e valore assoluto

• $a(x) := -x$ *passaggio all'opposto*, $x \mapsto -x$. (Definita da $\mathbb{Z}$ in poi). Questo meno non indica affatto negatività ma passaggio all'opposto, per esempio l'opposto di -3 è il positivo 3. (Si noti allora che $-x$ può essere positivo).
Da un punto di vista fisico, il tempo $-2\,h$ significa 2 ore *prima* del tempo 0 dell'inizio di un esperimento.

• $b(x) := \frac{1}{x}$ *passaggio al reciproco*, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Notazione deprecabile: x^{-1}. Definita per i numeri diversi da 0 da $\mathbb{Q}$ in poi.

Figure	su WolframAlpha `Link->`	su WolframAlpha `Link->`

• *Valore assoluto.* Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

che normalmente viene definita in $\mathbb{R}$, in vari modi equivalenti↑.

- *Segno di un numero.* Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione segno

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \textit{se } x < 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \\ 1 & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

che normalmente però viene definita([19]) in $\mathbb{R}$; per esempio è $\operatorname{sgn}(3 - \pi) = -1$.

Valore assoluto e segno sono correlate dall'identità $x \equiv |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$.

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

4.9 Immagine, controimmagine, composta

Si definiscono 2 insiemi e 1 funzione:
• $\operatorname{im} f : \{f(x) \in \operatorname{codom} f | x \in \operatorname{dom} f\}$ immagine di f
• $f^{-1}(E) := \{x \in \operatorname{dom} f | f(x) \in E\}$ controimmagine di un sottoinsieme E di $\operatorname{codom} f$ (ma attenzione→ alla simbologia del $^{-1}$)
• $f(g(x))$ la funzione composta: si "f-izza" la "g-izzazione" degli elementi, per esempio con $a(t) := t^2$ e $b(t) := t + 1$ si ha

$$a(b(t)) = (t + 1)^2 \qquad b(a(t)) = t^2 + 1$$

4.10 Funzioni definite per numeri naturali: le successioni

Per la variabile indipendente spesso useremo i nomi n, m, h, k se il dominio è un insieme di numeri interi, per esempio $\mathbb{N}$. In questo caso potremmo dare a tali funzioni nomi $y(n)$ o $a(n)$ ma più spesso useremo le notazioni y_n, a_n e in ogni caso le funzioni definite su $\mathbb{N}$ (o anche su una sua semiretta e cioè per $n \geq n_0$) le chiameremo *successioni*.

[19] Con qualche ambiguità: per alcuni non è definita in 0. In questa trattazione è definita in 0 e vi vale 0, che è lo standard ISO.

Un'infinità di dati epidemiologici si possono inquadrare come successioni, con l'indice che è l'anno, per esempio da 1861 in poi e teoricamente estendibile all'infinito almeno nell'immaginazione, e i valori a rappresentare il numero di nati, di morti, la mortalità infantile, e quant'altro:

$x_{1861} = \dots$
$x_{1862} = \dots$
$\dots$

Esempio 1. La *successione di Fibonacci*, definita di solito[20] *per ricorrenza*:

$$\begin{cases} a_1 := 1 \\ a_2 := 1 \\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

Valori:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...$$

Figura | su WolframAlpha Link-> |

Essa è in qualche modo correlata al tipo di ampliamento di una popolazione di organismi – fu studiata da Fibonacci nel medioevo per modellizzare l'accrescimento di una popolazione di conigli – ovvero anche all'espansione di un'epidemia nella fase iniziale.

Esempio 2. Una successione che ricorre molto nella Matematica è quella dei *fattoriali*↑

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040...$$

[20] Esiste anche una definizione *in forma chiusa*:

$$\begin{cases} a_n := \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad \phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \\ n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

(e φ è la nota *sezione aurea*)

Figura	su WolframAlpha Link->

e si noterà che

si passa da 1 a 2 moltiplicando per 2
si passa da 2 a 6 moltiplicando per 3
si passa da 6 a 24 moltiplicando per 4

e così via:

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & se \quad n > 0 \\ 1 & se \quad n = 0 \end{cases}$$

ovvero, per ricorrenza, $a_0 := 1$, $a_n := n\, a_{n-1}$ per $n > 0$.

Esercizio.$_\mu$ Calcolare con 5 cifre significative con la calcolatrice i primi 12 valori di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ relativi alla successione di Fibonacci.

4.11 Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva, inversa

Funzione **iniettiva**: “mai 2 vanno in 1”. Per esempio x^3 e 2^x ma non x^2 intesa come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarla).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

Funzione **suriettiva**: “riempie il codominio”. Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

Funzione **biiettiva**: iniettiva *et* suriettiva. Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

La funzione biiettiva dà luogo in modo ovvio alla *funzione inversa*. Per esempio $\sqrt[3]{x}$ è la funzione inversa di x^3. E viceversa.

Figure	su WolframAlpha Link->

II – Algebra e piano

5 Algebra – I parte

Nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto generale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:

qualitativa ("bollendo *un po'* otterrai *un po' di* precipitato")
numeri
operazioni (numeriche)
funzioni (numeriche)
analisi statistica dei dati (numerici)

Vogliamo qua occuparci delle operazioni sui numeri, per esempio a/b, che potrebbe dare la *densità* se a è una massa e b un volume, e che diventa una funzione $f_1(a)$ o $f_2(b)$ se a o rispettivamente b è considerato variabile. (E addirittura una funzione $f_3(a, b)$ di 2 variabili se sono considerati variabili sia a che b, caso di cui ora non ci occuperemo).

5.1 Operazioni binarie (interne) dell'algebra dei numeri

Le *operazioni binarie* da 2 *operandi* producono 1 *risultato*.
Ne considereremo 5: somma, sottrazione←, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza.
Tutte hanno un'infinità di ricorrenze nelle Scienze Applicate. (Un solo esempio: la *densità*, definita con una divisione: massa/volume).

(1) $a + b$, scritto col + e anche col simbolo di sommatoria $\sum$: dati dei numeri a_3, a_4, a_5, la somma

$$a_3 + a_4 + a_5 \quad \text{la scriveremo anche} \quad \sum_{k=3}^{5} a_k$$

e i numeri 3 e 5 possono essere sostituiti da qualsiasi altri, e così pure l'*indice di sommatoria* k: una forma comoda per rappresentare somme di moltissime *variabili indiciate*: $\sum_{i=n}^{m} a_i$.

(2) $a - b$

(3) $a\,b$ ovvero $a \cdot b$; sulle calcolatrici e nei linguaggi informatici anche $*$; lo standard ISO ammette anche la scrittura $a \times b$, che però espone alla confusione con la variabile x.
La notazione $a\,b$ purtroppo dà luogo ad un'ambiguità di scrittura: $y\,(x+1)$ denota sia una funzione y calcolata in $x+1$ che $y \cdot (x+1)$: perciò noi scriveremo sempre, nel caso del prodotto, $(x+1)\,y$ oppure $y \cdot (x+1)$. Inoltre la scrittura $a\,b$ può essere equivocata con una quantità di nome $a\,b$, di 2 lettere, cosa che in questa trattazione succederà raramente, ma nelle Scienze Applicate è normale usare nomi di più lettere. (Si pensi per esempio al pH della Chimica).

(4) $\frac{a}{b}$ ovvero a/b, nelle proporzioni $a : b$, sulle calcolatrici $\div$

(5) a^b, sulla calcolatrici a^b (nell'informatica anche $a{*}{*}b$).
In ambito medico e farmaceutico, talvolta per indicare la potenza
non essendo disponibile la scrittura a^b
non essendo disponibile il simbolo ^
non conoscendo il simbolo informatico $**$ per l'elevamento a potenza
si tralascia tutto (!) e si lascia all'intuito del lettore l'intelligenza delle formule.
Per esempio la formula (di Mosteller) che approssima l'area della superficie corporea (usata per il dosaggio dei chemioterapici) da peso W e altezza H

$$\frac{1}{6}(W \cdot H)^{0.5} \qquad \textit{ovvero } \tfrac{1}{6}\sqrt{W \cdot H}$$

si trova trascritta sul sito governativo statunitense PubMed, che riporta l'abstract di un articolo scientifico, in questo modo:

1/6(WH)0.5 `LINK->`

(e si noti anche l'(1/6) riportato senza parentesi, con seria ambiguità).
Altro esempio, con 2 esponenti, a questo `LINK->`

Si noti anche che un numero tipograficamente ad esponente non sempre indica una potenza, per esempio x^0 può denotare sia la variabile x elevata alla 0 sia una variabile di nome proprio x^0.

Così per esempio nel documento sul prezzo equo delle risme di carta (nelle strutture pubbliche, compresi gli ospedali) all'indirizzo https://www.anticorruzione.it/portal/rest/jcr/repository/collaboration/Digital%20Assets/anacdocs/Attivita/Atti/Delibere/2019/2_Allegato_A_aggiornamento%20carta_2019.pdf nella formula $P^{2019}_{ref} = P^{2018}_{ref} * 1.03448$ ovviamente 2018 e 2019 fanno parte dei nomi delle variabili, non indicano potenze.

Si faccia attenzione all'ambiguità della "frazione mista" o "numero misto" che si usa per esempio per i voti scolastici, come $7\frac{1}{2}$: il valore è $7 + \frac{1}{2}$ e cioè 7.5, non $7 \cdot \frac{1}{2}$ cioè 3.5. Cerchiamo di evitare come la peste tali frazioni miste. Ma potremo trovarle su questionari dove i pazienti valutano $7\frac{1}{2}$ il loro stato di salute (o la soddisfazione del servizio della farmacia), e allora nella raccolta dati trascriveremo sul computer 7.5.

E si faccia attenzione alla scrittura *del marketing* 3×2 che non ha nulla a che vedere con la moltiplicazione e rappresenta uno *sconto*, precisamente $m \times n$ significa che di m articoli/confezioni non ne pagheremo $m - n$ e allora lo sconto percentuale è

$$sconto = 100 \cdot \frac{m - n}{m} \%$$

Esempio$_\mu$ Una farmacia vende confezioni di filo interdentale in offerta 4×3: calcoliamo lo sconto.
1 su 4 confezioni non viene pagata e allora lo sconto è $\frac{1}{4}$ cioè 25%.

La divisione presenta qualche problematica:
44 diviso 6

fa $7.\overline{3} \approx 7.333$ in $\mathbb{R}$,

fa $\frac{44}{6}$ ovvero meglio $\frac{22}{3}$ in $\mathbb{Q}$,

fa *7 col resto di 2* in $\mathbb{Z}$, come ora approfondiremo.

5.2 Divisione euclidea in Z

Come ci ricorda la canzoncina *Quarantaquattro gatti*, che si disponevano *in fila per 6*, ma *col resto di 2*, è $44 = 6 \cdot 7 + 2$.[21] Diremo a il *dividendo* e b il *divisore*. Scriviamo per massima chiarezza:

$dividendo = divisore{\times}quoziente{+}resto \quad 0 \le resto < |divisore|$.[22]

Esempio$_\mu$ Una scatola di pillole ha 4 blister di 6×4 pillole. Dopo averne consumate 7 al giorno, ad un certo punto non gliene restano più così tante: quante precisamente?

Le pillole sono in tutto $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$. Con la calcolatrice (o a mano) troviamo

$$96/7 = 13.7...$$

e allora la persona ha consumato 7 pillole al giorno per 13 giorni, in tutto $13 \cdot 7 = 91$. Allora restano alla fine $96 - 91$ cioè 5 pillole.
Con WolframAlpha `Remainder[4*6*4,7]`

5.3 Proprietà delle 4 operazioni

Con *le 4 operazioni* si intendono $+ \; - \; \times \; /$.

Il $-$ non è commutativo: per esempio 6-2 fa 4 ma 2-6 fa -4.
E non è neanche associativo; ovvio ma meglio dirlo:

$11 - 6 - 2$ si calcola nell'ordine $5 - 2$ e infine 3 (il 5 è $11 - 6$)

---

[21] Più in generale, come leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Divisione euclidea*

> Dati due numero interi a e b con $b \neq 0$ esiste un'unica coppia di interi q ed r detti *quoziente* e *resto* tali che
> $a = b \times q + r$
> $0 \le r < |b|$

[22] Si noti che il resto è minore del divisore in valore assoluto, ma non necessariamente del quoziente in valore assoluto, per esempio $11 = 4 * 2 + 3$ (ed effettivamente il resto 3 è minore del divisore 4, ma non del quoziente 2), e stiamo dividendo 11 per 4, mentre se dividiamo 11 per 2 abbiamo $11 = 2 * 5 + 1$ (ed effettivamente il resto 1 è minore del divisore 2).
(Si noti ancora che tutto ciò vale anche con numeri negativi, per esempio -21 diviso 9 dà quoziente -3 e resto 6, cioè $-21 = 9 \cdot (-3) + 6$, come troviamo subito online con WolframAlpha con `Quotient[-21,9]` e `Remainder[-21,9]`).

assolutamente non $11 - 4 = 7$ (computando prima $6 - 2$)

cioè

$$11 - 6 - 2 \quad \text{significa} \quad (11 - 6) - 2.$$

(Le parentesi indicano precedenze nel calcolo).

Il / ha esattamente le stesse problematiche dette per il $-$, non è commutativo, per esempio 6/3 fa 2 ma 3/6 fa 0.5 ovvero $\frac{1}{2}$, e non è neanche associativo:

$$(x/y)/z \neq x/(y/z).$$

La scrittura $x/y/z$ senza parentesi sarebbe meglio evitarla in Matematica ma è usata in Farmacia:

$$\text{mg/kg/die}$$

è da utilizzarsi in questo modo:

$$Y \text{ mg/kg/die}$$

si calcola

$$Y \times \text{ (peso [del paziente, o della cavia...] in chilogrammi)}$$

e il risultato è in
mg/die,
cioè milligrammi da assumere ogni giorno. (Da un punto di vista matematico, intendono cioè (mg/kg)/die, implicitamente, come per il $-$ si fanno le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, il che è massimamente ragionevole).

Il + e il $\cdot$ sono commutativi e associativi, in tutti gli insiemi numerici (precisazione che in generale ometteremo):

$$x + y = y + x \qquad x\,y = y\,x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{che scriveremo di solito } x + y + z$$

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \text{che scriveremo di solito } x\,y\,z$$

(Come detto, le parentesi↓ indicano precedenze nel calcolo).

Valgono 4 proprietà distributive:

$$(x+y)\,z = x\,z + y\,z$$

$$(x-y)\,z = x\,z - y\,z$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x+y)/z = x/z + y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x-y)/z = x/z - y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$

ma in generale $\frac{x}{y+z}$ è diverso da $\frac{x}{y} + \frac{x}{z}$, e similmente coi $-$.

$$-(-x) = x \qquad e\ \ \forall\, x \neq 0 \ \ \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

e più completamente

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} \qquad \forall\, y, z, w \neq 0\,.$$

Poi

$$x + (-x) = x - x = 0 \qquad e\ \forall\, x \neq 0 \ \ x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$x + 0 = 0 + x = x \quad (0\ \textit{elemento neutro rispetto al} +)$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad (1\ \textit{elemento neutro rispetto al} \cdot)$$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad (0\ \textit{elemento assorbente rispetto al} \cdot)$$

$$\frac{0}{x} = 0 \ \ \forall\, x \neq 0 \qquad \frac{x}{0}\ \textbf{non esiste mai, neppure}\ \frac{0}{0}\,.$$

5.4 Precedenze algebriche e parentesi

Precedenze implicite delle operazioni, da seguire in mancanza di parentesi che le modifichino, dalla precedenza più debole:

$+\ e\ -$ ← precedenza più debole

/ e $\cdot$ anche se non trascritto: in $x + 3\,y$, prima calcolare $3\,y$.
^ anche se non trascritto: in $2\,x^3$, prima calcolare x^3.

Le parentesi possono modificare le precedenze:
$(x+3)\cdot y$ ci fa prima sommare x e 3. Invece senza parentesi in $x + 3 \cdot y$ prima si moltiplicano 3 e y, poi si fa la somma.

Sempre meglio scrivere parentesi che lasciare incertezze.

Si possono usare quante si vogliano coppie di parentesi "annidate" una dentro l'altra

$$(...(...(...)...)...)$$

ma spesso per chiarezza si usano anche parentesi quadre e graffe:

$$\{...[...(...)...]...\}$$

Rimarchiamo lo sconcertante fatto che il software Excel, di ampio uso nelle Scienze Applicate, contro le convenzioni di tutta la comunità matematica, per `-3^2` dà `9` invece che `-9`, come se fosse da intendere $(-3)^2$. Quindi attenzione se si copia in Excel una formula da un altro software, dove normalmente il risultato sarebbe `-9`, avendo l'elevazione a potenza la precedenza sul meno, e attenzione ancora a questo:

per calcolare $-\,3^2 {}_{\textit{che fa} -9}$ in Excel si deve scrivere `-(3^2)`

5.5 Le potenze

In questa trattazione elementare delle potenze supponiamo nota una conoscenza di base delle radici. Sarebbe possibile fare prima una trattazione elementare delle radici, presupponendo note le potenze. Evitare del tutto queste problematiche è possibile ma al prezzo di complicazioni che qua vogliamo evitare.

Scriviamo

x^2 per $x \cdot x$
x^3 per $x \cdot x \cdot x$
x^4 per $x \cdot x \cdot x \cdot x$
e più in generale definiamo $a \in I\!R$ *elevato alla* $n \in I\!N$, $n > 0$, il numero

$$a^n = a \cdot \ldots \cdot a \quad (n\, volte)$$

e ponendo per $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

la potenza è definita per tutti gli esponenti non nulli di $\mathbb{Z}$; e per l'esponente 0 si pone se $a \neq 0$ (rimanendo non definito 0^0)

$$a^0 := 1\,.$$

Si definisce $a \in I\!R$ *elevato alla* $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, $m, n > 0$, il numero

$$a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$$

che esiste se $a \geq 0$ *vel* m è dispari. Per esempio $x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.
Per la potenza con esponente $q \in I\!R$ si richiede $a \geq 0$, e se q è razionale vale quanto sopra, e se è irrazionale si dà una definizione complessa che si può quasi immaginare sostituendo q con una sua *"straordinariamente buona"* approssimazione razionale: $a^{\sqrt{2}}$ sarà *"circa"* $a^{1.41}$ a sua volta uguale a $\sqrt[100]{a^{141}}$. Ancor meglio $\sqrt[1000]{a^{1414}}$.

Ecco su WolframAlpha i grafici di alcune funzioni potenza: `Link->`

L'elevamento a potenza non è nè commutativo, per esempio $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, nè associativo. Valgono invece queste 8 proprietà:

(1) $\quad x^{y+z} = x^y \cdot x^z$

(2) $\quad x^{y \cdot z} = (x^y)^z$

(3) $\quad (x \cdot y)\hat{\ }z = (x\hat{\ }z) \cdot (y\hat{\ }z) \quad$ *ossia* $(x\,y)^z = x^z y^z$ (*distributiva*)

(4) $\quad (x/y)\hat{\ }z = (x\hat{\ }z)/(y\hat{\ }z) \quad$ *ossia* $\left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{x^z}{y^z}$ (*distributiva*)

(5) $1^x = 1$

(6) $x^1 = x$

(7) $x^0 = 1 \quad \forall\, x \neq 0$

(8) $0^x = 0 \quad \forall\, x \neq 0$

e attenzione poi che

$$0^0 \textbf{ non esiste.}$$

Si noti la notazione, ovvero convenzione sulla notazione:

$$_{\textit{usualmente scritto}\rightarrow}\; x^{y^z} := x^{(y^z)} \;_{\leftarrow \textit{raramente scritto}}$$

per esempio 2^{2^3} è 2^8 cioè 256, non è 4^3 cioè 64, che$_{\downarrow}$ è $(2^2)^3$.

Esempio sulla proprietà (2).
Volume di un cubo di lato $10^{-10}\,m$. Essendo $volume_{cubo} = lato^3$, si ha $(10^{-10})^3$ cioè $10^{-30}\,m^3$.

Esempio sulle proprietà (2), (4), (5).
Modellizziamo la diluizione omeopatica in acqua con
1 CH : $\frac{1}{100}$ cioè 1 parte di sostanza su 100 totali, e 99 sono acqua
2 CH : $\frac{1}{100}\frac{1}{100}$
e così via, sempreché si riuscissero ad evitare contaminazioni:

$$\text{n CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

(Abbiamo modellizzato solo la questione della diluizione, non l'inevitabile effetto placebo nè l'ipotetica "memoria dell'acqua" affermata dagli omeopati).
A cosa corrisponde 10 CH?

Con le proprietà delle potenze

$$10 \text{ CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^{10} =$$

$$= \frac{1^{10}}{100^{10}} = \frac{1}{100^{10}} =$$

$$= \frac{1}{(10^2)^{10}} =$$

$$= \frac{1}{10^{20}}$$

cioè 1 parte su 10^{20} che è

$$100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

cioè 1 parte su cento miliardi di miliardi. (Ogni 9 zeri c'è un miliardo).

5.6 Esempi di funzioni numeriche

Esempi di funzioni definite in $\mathbb{R}$, o, volendo, suoi sottoinsiemi, e a valori in $\mathbb{R}$, definite con le 4 operazioni e altre:

$a(x) := (1 - 20\%)\,x = 0.8\,x$ scontare del 20% un prezzo x

$b(x) := (1 + 20\%)\,x = 1.2\,x$ aumentare del 20% un prezzo x

$f(x) := 3\,x$ triplicare, per esempio il dosaggio, o un prezzo

$g(x) := \frac{2}{3}\,x$ ridurre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$, per esempio un dosaggio, ovvero scontare un prezzo del 33% (circa)

$h(x) := \frac{x}{3}$ ridurre a un terzo ovvero al $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$k(x) := \frac{4}{3}\,x$ aumentre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$m(x) := 2.4\,x$ portare al 240% del valore iniziale ovvero aumentare del 140%

$r(x) := x^3$ elevare alla terza ovvero al cubo

$s(x) :=\sqrt[3]{x}$ estrarre la radice terza ovvero cubica, che vedremo

$u(x) := \sqrt{x}$ estrarre la radice quadrata, $\mathrm{dom}\,u$: $x \geq 0$

Vedendo la difficoltà che hanno alcuni nel distinguere espressioni come *ridurre di un terzo* e *ridurre a un terzo* ci vorrebbe forse molta cautela nell'usarle per descrivere una variazione di posologia farmacologica (N.d.S.)

Ma pensateci bene: preferireste
che una multa venga ridotta *di* un decimo, o
che venga ridotta *a* un decimo?

5.7 Crescenza e decrescenza delle funzioni numeriche

Crescenza (globale) e decrescenza (globale) su intervalli, eventualmente sull'intero dominio di una funzione.
Ci sono 4 casi di cui più importanti il 1° e il 3°.

1) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ allora f si dice crescente.
Esempi: x^3, arctan, lg, ln, exp, $\sqrt{x}$. Anche x^2 per $x \geq 0$.

2) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ allora f si dice non decrescente, o crescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono crescente).
Esempio: $\lfloor x \rfloor$.

3) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ allora f si dice decrescente.
Esempio: e^{-x}. Anche $\frac{1}{x}$ per $x > 0$. Anche x^2 per $x \leq 0$.

4) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ allora f si dice non crescente, o decrescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono decrescente).

Nota 1. x^2, $\sin x$ e $\cos x$ non ricadono in alcuna delle 4 categorie.

Nota 2. x^3 è crescente su $\mathbb{R}$ (globalmente) ma non è crescente in 0 (puntualmente; e infatti la sua tangente in 0 è orizzontale).

6 Algebra – II parte

6.1 Precedenze algebriche e parentesi

QUESTO PARAGRAFO FINIRÀ NELLA LEZIONE PRECEDENTE

Precedenze implicite delle operazioni, da seguire in mancanza di parentesi che le modifichino, dalla precedenza più debole:

$+\ e\ - \leftarrow$ precedenza più debole
/ e $\cdot$ anche se non trascritto: in $x + 3y$, prima calcolare $3\,y$.
^ anche se non trascritto: in $2\,x^3$, prima calcolare x^3.

Le parentesi possono modificare le precedenze:
$(x + 3)\ \cdot y$ ci fa prima sommare x e 3. Invece senza parentesi in $x + 3 \cdot y$ prima si moltiplica 3 e y.

Sempre meglio scrivere parentesi che lasciare incertezze.

Si possono usare quante si vogliano coppie di parentesi "annidate" una dentro l'altra

$$(...(...(...)...)...)$$

ma spesso per chiarezza si usano anche parentesi quadre e graffe:

$$\{...[...(...)...]...\}$$

Rimarchiamo lo sconcertante fatto che il software Excel, di ampio uso nelle Scienze Applicate, contro le convenzioni di tutta la comunità matematica, per `-3^2` dà `9` invece che `-9`, come se fosse da intendere $(-3)^2$. Quindi attenzione se si copia in Excel una formula da un altro software, dove normalmente il risultato sarebbe `-9`, avendo l'elevazione a potenza la precedenza sul meno, e attenzione ancora a questo:

per calcolare $-\,3^2{}_{\ \textit{che fa} -9}$ in Excel si deve scrivere `-(3^2)`

6.2 Frazioni generatrici

Per scritture decimali limitate la *frazione generatrice* si trova subito: per esempio

$$0.2 \text{ cioè 2 decimi, è } \frac{2}{10} \text{ cioè, semplificando, } 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$0.25 \text{ cioè 25 centesimi, è } \frac{25}{100} \text{ cioè, semplificando, } 0.25 = \frac{1}{4}$$

e similmente coi millesimi si troverà per esempio che 0.125 è $\frac{1}{8}$, e così via.
Fra le scritture decimali illimitate periodiche, bisognerà conoscere

$$\tfrac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.33333333333\ldots\ (\textit{periodico})$$

Un suo valore approssimato, 0.333 oppure 0.3333, si può trovare con la calcolatrice con $1 \div 3$, ma, inversamente, bisogna anche saper riconoscere

$$0.333 \approx \frac{1}{3} \qquad 0.3333 \approx \frac{1}{3}$$

Per altre scritture decimali illimitate periodiche, non riusciremo – in questa trattazione elementare – a trovare la frazione generatrice:

$$0.\overline{142857} = \frac{?}{?} \qquad \left(\text{in effetti è } \frac{1}{7} \text{ ma non è banale}\right)$$

6.3 Le radici

In questa trattazione elementare, considereremo le radici solo in $\mathbb{R}$ e non nei numeri naturali, interi e razionali.
Sono funzioni (e allora anche operazioni unarie ma non è il modo migliore di considerarle).

- *Radice quadrata* $\sqrt{a}$. Ovvero, ma in generale non scriveremo così, $\sqrt[2]{a}$. (Su WolframAlpha `Sqrt[a]`, in altri software `sqrt(a)`).

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\sqrt{\cdot} \; : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Per $x \geq 0$ la $\sqrt{x}$ è definita come il numero $y \geq 0$ tale che $y^2 = x$. Si noti che

$$\sqrt{9} = 3$$

nel modo più assoluto la radice quadrata di 9 non è ± 3. (Come invece affermano testi che seguono un'antiquata definizione di radice quadrata).

• *Radice quarta, sesta, ottava...* $x \mapsto \sqrt[4]{x}$, $x \mapsto \sqrt[6]{x}$... Con considerazioni analoghe alla radice quadrata. Per esempio la radice quarta di 16 è 2, e quella di 9 è $\sqrt{3}$. Sono definite in $[0, +\infty[$.

• *Radice terza (o cubica), quinta, settima...* $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[5]{x}$... La $\sqrt[3]{x}$ è definita come il numero y tale che $y^3 = x$, e similmente le altre radici con indice dispari: $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per esempio la radice cubica di -8 è -2.

Esempio$_\mu$
Usando la Formula di Keys che, fra i numerosi standard, calcola

$$\textit{peso ideale uomini} = (\textit{statura in metri})^2 \times 22.1$$

troviamo quale dovrebbe essere l'altezza corrispondente ai 53 kg:

$$53 =^{EQ} x^2 \times 22.1 \quad \Big/ : 22.1$$

$$x^2 = \frac{53}{22.1} \approx 2.39819 \quad \text{(con la calcolatrice)}$$

$x_1 = -\sqrt{2.39819}$ esclusa, dev'esser positivo (altezza)
$x_2 = \sqrt{2.39819}$
che con la calcolatrice troviamo esser circa 1.55 (in metri).

Nota. La radice quadrata esprime un'infinità di altre cose nelle Scienze Applicate, per esempio il tempo di caduta[23] di un grave. Fra quelle espresse

[23] La formula è $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

dalla radice cubica citiamo il raggio[24] di una sfera di massa m e densità d.
Per esempio si calcola che una sfera d'oro di 1 kg ha diametro $\approx 4.62\,cm$.
Fra le meno numerose ricorrenze nelle Scienze Applicate della quarta potenza ovvero equivalentemente della radice quarta, citiamo la Legge di Stefan-Boltzmann e la legge di Poiseuille.
Le radici dalla quinta in poi ricorrono moderatamente nelle Scienze Applicate.
Una radice sesta compare in un calcolo relativo al Potenziale di Lennard-Jones della Termodinamica, nel Capitolo 26.

6.4 Proprietà dei radicali ovvero radici

Considereremo queste 2 proprietà delle radici

$$x = \sqrt[3]{x^3} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ dispari$$

$$(non\ x) \quad |x| = \sqrt{x^2} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ pari$$

e queste altre 4 proprietà, molto simili fra loro:

$$\forall\, x \geq 0 \quad \sqrt{x\,y} = \sqrt{|x|}\,\sqrt{|y|} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ pari$$

$$\forall\, x \geq 0 \quad \sqrt{x/y} = \sqrt{|x|}/\sqrt{|y|} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ pari$$

$$\sqrt[3]{x\,y} = \sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{y} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ dispari$$

$$\sqrt[3]{x/y} = \sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{y} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ dispari$$

Esistono anche altre proprietà.[25]

Le radici dei numeri ≥ 0 possono essere intese come potenze con esponente frazionario e precisamente

$$\forall x \geq 0 \quad \left[\sqrt[1]{x} = x\right] \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \dots \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

---

[24]La formula è $r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}}$.

[25]Per il lettore interessato:

$$\sqrt[n\cdot m]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \quad per\ esempio \quad \sqrt[6]{x} = \sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}\,, \quad n, m = 2, 3, 4 \dots \text{ (si semplifica m)}$$

e di rarissimo uso $\sqrt[n]{x^\alpha} = (\sqrt[n]{x})^\alpha, \quad x \geq 0,\ \alpha \in I\!R,\ n = 2, 3, 4 \dots$

in particolare su WolframAlpha

$$_{numero}$$`^(1/n)` per esempio `11^(1/3)` calcola la $\sqrt[3]{11}$.

Ma si noti che

$\sqrt[3]{x}$ esiste per ogni x

$x^{\frac{1}{3}}$ esiste solo per ogni $x \geq 0$

(Però si troverà sicuramente qualche Autore che la pensa diversamente e dirà che $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ per ogni x, che non è una buona idea per sottili motivi).

Da adesso considereremo quasi solo la radice quadrata, cubica e quarta, e per l'ultima vale questa formula di riduzione:

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}.$$

6.5 La radice quadrata in Medicina e Farmacia

Esempio 1. Nella chemioterapia per il cancro spesso i dosaggi sono stabiliti non in funzione del peso del paziente – com'è per tanti farmaci – bensì dell'area della superficie corporea.
Una delle formule usate per stimarla è questa di Mosteller, che ha 3 versioni equivalenti:

$$BSA_{m^2} := area \approx \sqrt{\frac{altezza_{cm} \times peso_{kg}}{3\,600}} =$$

$$= \frac{\sqrt{altezza_{cm} \times peso_{kg}}}{60} = \frac{\sqrt{altezza_{m} \times peso_{kg}}}{6}$$

(che dà circa 2 m^2 per un maschio adulto normale).

Esempio 2. La radice quadrata rientra nel calcolo della varianza e dello stimatore della varianza, che vedremo.

Esempio 3. Nell'articolo scientifico il cui abstract è in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19712746 modellizzano l'accrescimento di una comunità microbica con l'uso della radice quadrata.

Esempio 4. Si voglia moltiplicare per 2 (o rispettivamente per 3, per 4, per qualunque $c > 0$) l'area di un cerotto terapeutico quadrato. Ciò si ottiene moltiplicando il lato per $\sqrt{2}$ (o rispettivamente per $\sqrt{3}$, per 2, per $\sqrt{c}$). Perchè da

$$area = lato^2$$

segue, essendo *lato* un numero positivo,

$$lato = \sqrt{area}$$

e sostituendovi *area* con $2 \cdot area$ si ottiene

$$lato_{new} = \sqrt{2 \cdot area} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{area} = \sqrt{2} \cdot lato$$

e similmente con 3, con 4, con c.

Tutto ciò è vero non solo per il quadrato e il suo lato, ma anche per il cerchio e il suo raggio, e pure per il cerchio e il suo diametro:

il quadrato di area quadrupla ha lato doppio
il cerchio di area quadrupla ha raggio doppio
il cerchio di area quadrupla ha diametro doppio

Con qualche precisazione sul significato delle parole tali corrispondenze (fra $n \times area$ e $\sqrt{n} \cdot misura\ lineare$) valgono per qualunque figura geometrica piana, e non solo per il quadrato e il cerchio.

6.6 La radice cubica in Medicina e Farmacia

Esempio. Supponiamo di voler *ottuplicare* il peso di pillole sferiche (omogenee) che andremo a produrre, rispetto al peso di quelle che già produciamo. Allora il raggio, e quindi il diametro, *raddoppieranno*. Infatti dalla formula del raggio della sfera di massa m e densità d (che non ci proponiamo di imparare a memoria)

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}}$$

sostituendo m con $8\,m$ abbiamo

$$r_{new} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 8\,m}{4\,\pi\,d}} = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{3\,m}{4\,\pi\,d}} =$$

per la quinta ovvero penultima delle proprietà sopra elencate

$$= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}} = 2\,r.$$

Con qualche precisazione sul significato delle parole, un tale raddoppio all'ottuplicare del peso (o equivalentemente del volume) vale per qualunque forma, non solo la sfera; per esempio per il cubo relativamente al suo lato, o per una cavia rispetto alla sua lunghezza – ammesso, in via approssimata, che l'accrescersi della cavia nel tempo ne conservi la "forma" (in senso tecnico geometrico si tratta della *similitudine*): la cavia che pesa l'ottuplo, è lunga il doppio. (E il 2 implicato, è la radice cubica dell'8).

Tutto ciò è vero non solo per i numeri 8 e 2, ma anche per 27 e 3, e per ogni $c > 0$ e $\sqrt[3]{c}$.

6.7 Esempi di calcolo con le radici.

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (perchè è $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$) e approssimeremo ≈ 2.828
$\sqrt{9} = 3$ (assolutamente non ± 3)
$\sqrt{10} \approx 3.162$ e lo troveremo con la calcolatrice
$\sqrt[3]{-8} = 2$ (perchè $(-2)(-2)(-2) = -8$)
$\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ (perchè è $\sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$)
$\sqrt[3]{5}$ lo lasceremo come sta. (WolframAlpha con `5^(1/3)` dà 1.7099...).
$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ (perchè è $\sqrt{\sqrt{4}}$) e approssimeremo ≈ 1.414
$\sqrt[4]{5} \approx 1.495$ (calcolato come radice quadrata della radice quadrata).

6.8 Scrittura dei numeri e approssimazioni

Nelle Scienze Applicate si preferisce evitare nei risultati finali le frazioni, i decimali periodici, e, π, le radici e le altre funzioni elementari, e tutto si esprime con scritture decimali esatte se si può e merita, o altrimenti approssimate, ma scrivendo = e non $\approx$.

In Matematica	**In questa trattazione.** La scrittura percentuale la daremo solo se ha senso. Esempio: per le probabilità	Nelle Scienze Applicate. La scrittura percentuale si dà solo se ha senso. Esempio: per le probabilità
$= \frac{1}{8} = 0.125$	$= \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$	$=0.125$ oppure $= 12.5\%$ ma anche $= 0.1250$ e $= 12.50\%$
$= \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	$= \frac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%$	$=0.3333$ oppure $= 33.33\%$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071...$	$= \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 = 70.71\%$	$=0.7071$ oppure $= 70.71\%$
$\frac{6}{\pi} = 1.9098...$	$= \frac{6}{\pi} \approx 0.9099 = 90.99\%$	$=0.9099$ oppure $= 90.99\%$
$\frac{1}{e} = 0.3678...$	$= \frac{1}{e} \approx 0.3679 = 37.79\%$	$= 0.3679$ oppure $= 37.79\%$

Si noti che $= 0.3678...$ è diventato ≈ 0.3679 perchè la prima cifra seguente è ≥ 5. (Fatto non conoscibile dalla scrittura $= 0.3678...$).
Si noti la scrittura 0.1250 delle Scienze Applicate, nelle quali questa scrittura indica – se usata appropriatamente – che il valore è conosciuto con 4 cifre significative, cioè è compreso fra 0.12495 e 0.12505, mentre 0.125 sarebbe conosciuto con sole 3 cifre significative e allora indicherebbe un numero compreso fra 0.1245 e 0.1255. La questione è sottile, perchè richiede di conoscere la precisione dei dati iniziali, che in generale è scarsamente nota.
Naturalmente possono considerarsi approssimazioni più precise, o meno.

6.9 Ordinamento dei numeri

Da $\mathbb{N}$ in poi esiste nei numeri un *ordinamento* (che sostanzialmente supponiamo noto) per cui dati 2 numeri, o il primo è $<$ del secondo, o $>$ del secondo, o sono uguali (*tricotomia*). In modo ovvio si definiscono il *maggiore o uguale* e il *minore o uguale*.
Da $\mathbb{N}$ in poi si può sommare ad ambo i membri di un'uguaglianza, o di una disuguaglianza, una stessa *quantità* (fissa, cioè un numero, o variabile, come una funzione) conservando l'uguagliaza,

o rispettivamente quella stessa disuguaglianza:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \quad e\, analoghe\, con\ \geq, <, \leq, =$$

Da $\mathbb{Z}$ in poi vale questa molteplice relazione fra moltiplicazione e ordinamento dei numeri:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & se\, c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac < bc & se\, c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

e del tutto similmente con $\geq$ e $\leq$

$$a \geq b \Rightarrow \begin{cases} ac \geq bc & se\, c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac \leq bc & se\, c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

Per esempio da $3 > 2$ segue moltiplicando per il numero positivo 10 che $30 > 20$, invece moltiplicando per il numero negativo -10 l'ordinamento si inverte: $-30 < -20$.

6.10 Altre formule classiche dell'algebra

Ecco alcune altre formule classiche dell'algebra:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \,\vee\, b = 0 \quad \text{Legge di annullamento del prodotto}$$

E ce ne sono moltissime altre([26])

[26]Per il lettore interessato eccone alcune:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

- $a(x) := -x$ *passaggio all'opposto*, $x \mapsto -x$. (Definita da $\mathbb{Z}$ in poi). Questo meno non indica affatto negatività ma passaggio all'opposto, per esempio l'opposto di -3 è il positivo 3. (Si noti allora che $-x$ può essere positivo).
Da un punto di vista fisico, il tempo $-2\,h$ significa 2 ore *prima* del tempo 0 dell'inizio di un esperimento.

- $b(x) := \frac{1}{x}$ *passaggio al reciproco*, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Notazione deprecabile: x^{-1}. Definita per i numeri diversi da 0 da $\mathbb{Q}$ in poi.

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

- *Valore assoluto.* Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione

$$|x| := \begin{cases} x & se \;\; x \geq 0 \\ -x & se \;\; x < 0 \end{cases}$$

che normalmente viene definita in $\mathbb{R}$, in vari modi equivalenti↑.

- *Segno di un numero.* Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione segno

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & se \;\; x < 0 \\ 0 & se \;\; x = 0 \\ 1 & se \;\; x > 0 \end{cases}$$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a\,b + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a\,b + b^2)$

$a^4 + b^4 = \left(a^2 - \sqrt{2}\,a\,b + b^2\right)\left(a^2 + \sqrt{2}\,a\,b + b^2\right)$... che sorprenderà più di qualcuno!

che normalmente però viene definita[27] in $\mathbb{R}$; per esempio è $\text{sgn}(3-\pi) = -1$.

Valore assoluto e segno sono correlate dall'identità $x \equiv |x| \cdot \text{sgn}(x)$.

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

[27]Con qualche ambiguità: per alcuni non è definita in 0. In questa trattazione è definita in 0 e vi vale 0, che è lo standard ISO.

7 Piano cartesiano – I parte

Premessa definizionale:

funzione: $f(x)$, p.es. $f(x) := x^2 - 2$, spesso scritta $y = x^2 - 2$;
equazione: $f(x) = g(x)$, p.es. $x^2 - 2 = 0$ ha *soluzione* $\pm\sqrt{2}$;
polinomio: $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, p.es. $x^2 - 2$, ha *radici* $\pm\sqrt{2}$;
disequazione in 1 variabile: $f(x) > g(x)$ (o $<$ o $\geq$ o $\leq$), p.es. $x^2 > 2$, ha *soluzione* $x < -\sqrt{2} \lor x > \sqrt{2}$.

Gli assi cartesiani sono una retta orientata detta asse delle ascisse e una retta orientata perpendicolare alla precedente, detta asse delle ordinate, che si intersecano in un punto detto origine e denotato con O.
L'orientazione del piano e degli angoli con vertice nell'origine è antioraria. L'asse delle ascisse si sovrappone all'asse delle ordinate con una rotazione di $+90°$.

Spesso l'asse delle ascisse ha nome x, ma t se rappresenta un tempo, e quello delle ordinate y, ma p se rappresenta un peso, eccetera.

Su ciascun asse è fissata un'unità di misura, che determina l'ascissa e l'ordinata (distanze con segno) dei loro punti.

Equazione del punto[28]:

$$P = (x_0, y_0) \quad \textit{ovvero} \quad P(x_0, y_0) \quad \textit{ovvero} \quad (x_0, y_0)$$

Il numero reale x_0 è l'ascissa di P e y_0 l'ordinata.

Da adesso, le relazioni geometriche fra figure diventano relazioni algebriche fra numeri, con enorme vantaggio pratico e applicativo.

[28] Altri Autori scrivono col punto e virgola: $(x_0; y_0)$

Già il D'Oresme[29] (XIV secolo), iniziatore del metodo, arrivò fino a produrre – sostanzialmente – l'equazione della retta. Oggi noi seguiamo la teoria, più completa, di Descartes (Cartesius, Cartesio, XVII secolo).

Esistono

- rette verticali, cioè parallele all'asse y: equazione $x = p$
- rette orizzontali, cioè parallele all'asse x: equazione $y = q$
- rette oblique, non parallele nè all'asse x nè all'asse y

Equazioni esplicita della retta passante per l'origine e non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale, per l'origine:

$$y = m\,x$$

e questa funzione è caratterizzate da
"al raddoppiare di x raddoppia y e viceversa."

La maggior parte delle funzioni di 1 variabile delle Scienze Applicate ha questa forma.
Per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con la temperatura assoluta

$$V = V_0\,\alpha\,T \qquad T\,temperatura\,assoluta \qquad retta\,per\,l'origine\,nel\,piano\,(T, V)$$

Equazioni esplicita della retta non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale:

$$y = m\,x + q$$

per esempio $giorni\_dal\_concepimento = 365.25\,anni + 273$ (Formula approssimativa).
q ci dice il punto di intersezione con l'asse y, precisamente $(0, q)$.

[29] Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Nicola d'Oresme: "matematico, fisico, astronomo ed economista, vescovo, filosofo, psicologo e musicologo francese (...) teologo appassionato, traduttore competente, influente consigliere di re Carlo V di Francia (...) ebbe l'idea di utilizzare ciò che dovremmo chiamare coordinate rettangolari nella terminologia moderna, una lunghezza proporzionale alla longitudo, l'ascissa di un dato punto e una perpendicolare a quel punto, proporzionale alla latitudo, l'ordinata (...) longitudo e latitudo possono variare o rimanere costanti."

m: coefficiente angolare, ci indica la pendenza della retta; se è 0 la retta è orizzontale.

A volte nelle ScienzeApplicate l'equazione della retta appare come

$$y = m\,(x + p)$$

che è esattamente come prima con $q = m\,p$ ovvero $p = q/m$. Per esempio una ricerca scientifica[30] dà questo peso ideale

$$\text{weight\_children\_aged\_1-5\_years} = 2 \times (\text{age\_in\_years} \; + 5)$$

che nella forma $y = m\,x + q$ sarebbe $\text{weight\_children\_aged\_1-5\_years} = 2 \times \text{age\_in\_years} \; + 10$. Addirittura può presentarsi scritta in una forma equivalente

$$y = a\,(b\,x + c)$$

per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con i gradi Celsius

$$V = V_0\,(1 + \alpha\,t) \qquad t\,temperatura\,{}^\circ C \qquad retta\,obliqua\,nel\,piano\,(t, V)$$

Equazione implicita della retta: $a\,x + b\,y + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

per esempio $2\,x - y + 10 = 0$ che è quella appena visto salvo diverse variabili.

Ogni punto $P(x, y)$ le cui coordinate verificano l'equazione della retta appartengono alla retta, e questo sarà un fatto generale, estendibile a tutte le *curve*, in rappresentazione esplicita o implicita. Per esempio $(1.7, 63.869)$ sta sulla curva del peso ideale maschile secondo Keys prima visto, che è la parabola (grafico di) $y = 22.1\,x^2$: altezza in metri 1.70 (ovvero 1.7, matematicamente), peso 63.869 in chilogrammi.

[30] Make your Best Guess: an updated method for paediatric weight estimation in emergencies, by Tinning K, Acworth J., in Emerg Med Australas. 2007 Dec;19(6):528-34.

Equazione della retta per 2 punti:

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

Formula della distanza di 2 punti:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono parallele } \Leftrightarrow m' = m$$

(e ovviamente 2 rette verticali $x = p$ e $x = p'$ sono parallele).

E si possono considerare molte altre formule.([31])

Grafico cartesiano G_f di una funzione $f(x)$ è (il disegno dell)l'insieme

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$$

e spesso le funzioni hanno nome $y(x)$ denotato anche semplicemente y, e già abbiamo visto le rette orizzontali e oblique $y = m\,x + q$, che di fatto sono proprio grafici, mentre le rette verticali non sono grafici di funzioni di x. (Ma sono grafici di funzioni di y).

Fra le rette che sono grafici di funzioni di x si distinguono queste:
$y = x$ bisettrice del I e III quadrante – funzione *identità*
$y = -x$ bisettrice del II e IV quadrante – passaggio all'opposto.
$y = 0$ asse x
e fra quelle che non sono grafici di funzioni di x
$x = 0$ asse y.

[31] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule.
2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono perpendicolari } \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

Formula della distanza punto-retta:

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

7.1 Funzioni e dis/equazioni di primo grado

Per ogni m la funzione $f(x) := m\,x$ si chiama *funzione lineare*, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x$.

> Esempio: l'indice di massa corporea: $BMI := \frac{peso}{altezza^2}$, in cui l'altezza possiamo ragionevolmente considerarla costante – per un fissato individuo – mentre un peso x può variare più facilmente, in pratica abbiamo $y = \frac{1}{altezza^2} \cdot x$; si usino chilogrammi e metri).

È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costantemente nulla* se $m = 0$.
Il grafico è una retta passante per l'origine.
Fissato $m \neq 0$, l'equazione $m\,x = 0$ ha soluzione $x = 0$ (basta dividere per $m \neq 0$), mentre la disequazione in 1 variabile

$$m\,x > 0$$

si risolve dividendo per m ciò che, se e solo se $m < 0$, inverte l'ordinamento. Allo stesso modo si risolve se si aveva $\geq$, $<$ o $\leq$.

Per ogni $m, q \in I\!R$ la funzione $f(x) := m\,x + q$ si chiama funzione *affine*, deprecabilmente detta lineare, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x + q$.
È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costante* se $m = 0$.
Il grafico è una retta, che *intercetta* (interseca) l'asse y in $(0, q)$.
Fissati $m \neq 0$ e q, l'equazione

$$m\,x + q = 0$$

ha soluzione $x = -\frac{q}{m}$. (Si sommi $-q$ e si divida per $m \neq 0$).
Le 4 disequazioni con $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ si risolvono sommando $-q$ e poi dividendo per m <u>invertendo l'ordinamento se $m < 0$</u>.
Fissati m e q, la disequazione in 2 variabili

$$y \geq m\,x + q$$

rappresenta il *semipiano chiuso* "sopra" la retta $y = m\,x + q$, compresi i punti della retta. Col $>$, il *semipiano aperto*, esclusi i punti

della retta.
Con $\leq$, e con $<$, si va "sotto" la retta, compresa (semipiano chiuso) o rispettivamente esclusa (semipiano aperto).
Ciò vale anche per la $y > m\,x$ e le 3 analoghe, che hanno $q = 0$.

Esempio. Con l'altezza h (in centimetri) e il peso p (in chilogrammi) la Formula di Broca definiva (oggi esistono vari altri standard)

$peso\,normale = (h - 100) \pm 10\%$ (secondo alcuni, $h \geq 130$)

ovvero, con la corretta interpretazione del $\pm 10\%$, in senso intervallare,

$peso\,normale \in$

$$[(h - 100) - (h - 100)10\%, (h - 100) + (h - 100)10\%]$$

e qua – a conti fatti – riconosciamo 2 rette e 3 regioni del piano Ohp:

sottopeso $p < 0.9\,h - 90$ (sotto la retta)

sovrappeso $p > 1.1\,h - 110$ (sopra la retta)

e la terza regione, dei normopeso, è quella fra le 2 rette. (Secondo certi Autori, $\pm 20\%$ invece che $\pm 10\%$.).

Come sarebbe la situazione di 53 kg e 1.70 m? (Si converta in centimetri).

In questo `Link->` una dozzina di rette, o per meglio dire segmenti e semirette a causa delle limitazioni del dominio, per stimare il peso normale dei bambini in base all'età (però l'ultima funzione non è lineare e il suo grafico non è rettilineo) da $w = 2\,a + 8$ a $w = 3\,a + 7$ per $1 \leq a \leq 10$, con w il peso e a l'età. weight, age.

L'esistenza di diversi standard per il peso ideale deve suggerire allo studente lo spirito critico.
Il fatto che la formula di Broca per il peso ideale certamente smetta di avere senso in qualche punto imprecisato – non esiste alcun peso ideale per persone alte un chilometro – ci ricorda che molte formule delle Scienze Applicate hanno un qualche dominio

di ragionevolezza in cui modellizzano bene la realtà sensibile, divenendo sempre meno sensate verso imprecisati estremi, e anche questo deve suggerire allo studente lo spirito critico.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 7

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 8:00 di mattina concentrazione 50 mg/dl e alle 6:00 di sera concentrazione 82 mg/dl. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura).
Trovare la retta per i 2 punti espressa in forma esplicita, senza unità di misura.
(Con essa si potrebbe ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione; ma qua non ne faremo nulla).

Svolgimento
Osservato che le 6:00 di sera sono le 18:00, cioè a 18 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(8\,h, 50\,mg/dl), (18\,h, 82\,mg/dl) \quad \text{ovvero meglio} \quad (8, 50), (18, 82)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 18}{8 - 18} = \frac{y - 82}{50 - 82}$$

$$\frac{t - 18}{-10} = \frac{y - 82}{-32} \quad \Big/ \cdot (-1) \cdot 10 \cdot 32$$

$$32\,(t - 18) = 10\,(y - 82)$$

$$32\,t - 576 - 10\,y = -820$$

$$-10\,y = -32\,t - 244$$

$$\boxed{y = 3.2\,t + 24.4}$$

anche esprimibile con

$$\boxed{y = \tfrac{16}{5}\,t + \tfrac{122}{5}}$$

(Da cui p.es. a mezzogiorno, $t := 12$, la concentrazione ipotetica 62.8 mg/dl).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 6:00 di mattina concentrazione 70 nmoli/L e alle 9:00 di sera 150 nmoli/L. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura, h e poi nmoli/L).
Con la retta per i 2 punti si può ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione. Con l'equazione esplicita di quella retta, senza unità di misura, calcolare l'ora in cui la concentrazione è salita a ≥ 110 (nmoli/L, unità di misura che non esprimiamo per semplicità).

Svolgimento

Osservato che le 9:00 di sera sono le 21:00, cioè a 21 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(6\,h, 70\,nmoli/L), (21\,h, 150\,nmoli/L) \qquad \text{ovvero meglio} \qquad (6, 70), (21, 150)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 21}{6 - 21} = \frac{y - 150}{70 - 150}$$

$$\frac{t - 21}{-15} = \frac{y - 150}{-80} \qquad \Big/ \cdot (-1) \cdot 15 \cdot 80$$

$$80\,(t - 21) = 15\,(y - 150)$$

$$80\,t - 1680 - 15\,y = -2250$$
$$-15\,y = -80\,t - 570$$

e dividendo per -15

$$y = \frac{16}{3}\,t + 38$$

e ora risolviamo la disequazione della concentrazione $y \geq 110$

$$\frac{16}{3}\,t + 38 \geq 110$$
$$\frac{16}{3}\,t \geq 110 - 38$$
$$\frac{16}{3}\,t \geq 72$$
$$t \geq 72 \cdot \frac{3}{16} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

cioè a 13.5 ore dalla mezzanotte, cioè 13 ore e mezza, cioè alle

$$\boxed{13{:}30}$$

8 Piano cartesiano – II parte

Il grafico della funzione *passaggio al reciproco*, già vista,

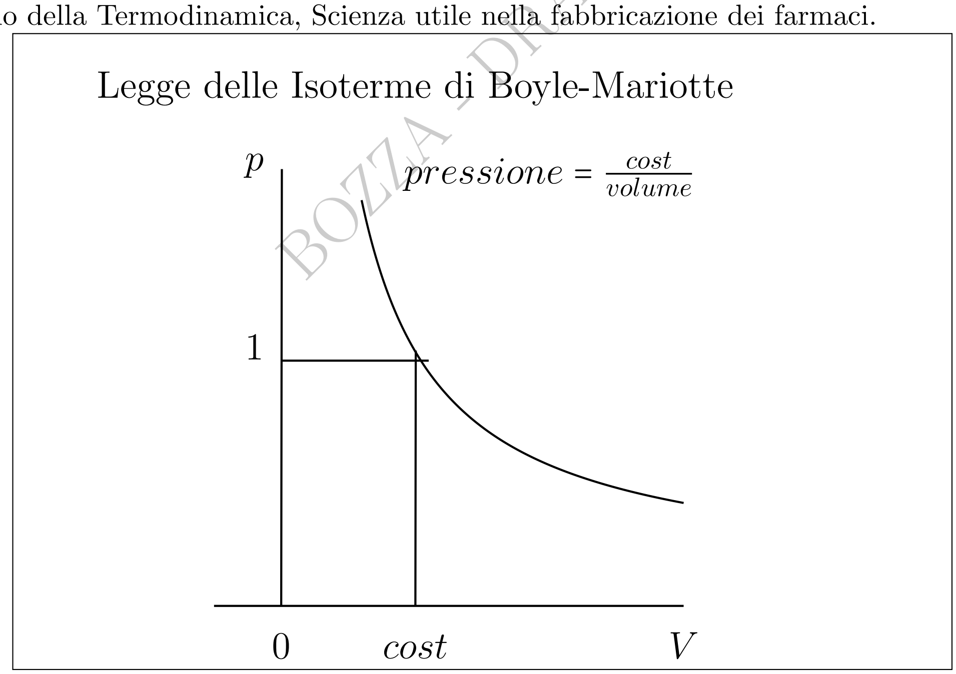
$$y = \frac{1}{x}$$

è una *curva*(32) e più in generale

$$y = \frac{cost}{x} \qquad cost \neq 0$$

ha grafico una curva detta *iperbole equilatera (riferita agli asintoti)* e questa è una delle formule di più ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate.

Esempio della Termodinamica, Scienza utile nella fabbricazione dei farmaci.



Queste funzioni $y(x) = \frac{cost}{x}$ sono caratterizzate da

$\leadsto$ *"al raddoppiare di x dimezza y e viceversa"*

Tutti i grafici sono *curve*,

---

[32] Una definizione rigorosa di *curva* è alquanto complessa, e in questa trattazione elementare supporremo noto il concetto. Le curve più semplici sono le rette.

e hanno un'equazione *esplicita* $y = f(x)$,
ma esistono curve che non sono grafici,
e hanno un'equazione *implicita* $f(x, y) = 0$.

In particolare il circolo di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio*.

Esercizio$_\mu$ Si verifichi se il punto $(2, 2)$ sta nel circolo

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y + 1 = 0$$

Esercizio$_\mu$ Esplicitare i 2 semicircoli costituenti il circolo.
(Si troverà $y = 5 \pm \sqrt{-x^2 - 2x + 24}$).

Altre curve in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}\,x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse} \text{ (in } \textit{forma canonica}^{(33)}\text{)}$$

e la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse*. Se $a > b$ l'ellisse appare "ribassata" e se $b > a$ l'ellisse appare "allungata verso l'alto".

[33] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard*.

Esercizio$_\mu$ Con $a := 3$ e $b := 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

Ora vediamo una curva in equazione esplicita: la generica **parabola** con asse verticale ha equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$

La disequazione

$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$

rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga >, e questo è un fatto generale).

E ovviamente

$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$

rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

La parabola è simmetrica rispetto ad una retta detta *asse* che interseca la parabola in un punto detto *vertice* della parabola.

8.1 Le curve a forma di J

La parabola ci offre un semplice modello del concetto, più generale, di *curva a forma di J*. Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *J curve*:

> In medicine, the 'J curve' refers to a graph in which the x-axis measures either of two treatable symptoms (blood pressure or blood cholesterol level) while the y-axis measures the chance that a patient will develop cardiovascular disease (CVD). It is well known that high blood pressure or high cholesterol levels increase a patient's risk. What is less well known is that plots of large populations against CVD mortality often take the shape of a J curve which indicates that patients with very low blood pressure and/or low cholesterol levels are also at increased risk.

8.2 Note finali sulle coniche

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[34] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.
Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*.

Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel piano – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O).

Sono intersezione del piano cartesiano con un *cono completo*.

8.3 Le curve più comuni, e le famiglie di curve

Con le rette[35] e le coniche, e il grafico di $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate.

Un esempio di *famiglia* (insieme) di curve in rappresentazione implicita ci viene dalla Termodinamica, con la Legge di van der Waals

$$\left(p + a\,\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = n\,R\,T$$

nel piano (V, p), con R, n, a, b costanti, al variare di T.

Si consideri come ulteriore esempio di *famiglia* (insieme) di curve in rappresentazione implicita il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

`x^3+y^3-3x y=0`

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

[34] Insieme. Termine usato in geometria.

[35] A rigore, le rette verticali del piano cartesiano $O(x, y)$ non sono grafici di funzioni della x, però sono grafici di funzioni della y.

8.4 Meglio i calcoli o i disegni?

Come norma generale, bisogna risolvere le equazioni analiticamente, cioè coi calcoli, per quanto possibile, perchè esistono casi in cui il disegno inganna.
Tuttavia fare i disegni è comunque utilissimo
- per verificare la correttezza dei risultati trovati
- per una comprensione complessiva della situazione
- per presentare divulgativamente i risultati, o per presentarli in modo chiaro in relazioni tecniche
- per un tentativo seppure incerto di soluzione almeno approssimata quando il calcolo analitico è impossibile o proibitivamente difficile.

Come esempio dell'ultimo caso si consideri il *sistema di 2 equazioni in 2 incognite di* 6° *grado*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal disegno (sperabilmente, e, in effetti, in questo caso non ingannevole) col folium di Cartesio sopra detto e il circolo unitario di centro l'origine, vediamo che ci sono 4 soluzioni, e abbiamo anche loro approssimazioni, tanto migliori quanto più grande e preciso è il disegno.

Esempio farmaceutico. In questo documento*link–>*della Food and Drug Administration (FDA), ente statunitense internazionalmente considerato autorevolissimo, ci si impegni a capire le ultime 2 righe a pagina 22, guardando attentamente le figure, riguardanti la produzione dei farmaci.
Si apprezzino poi le figure a pagina 24.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 8

Esercizio$_\mu$
$*$ [*disegno*] Si considerino 2 parametri fisiologici $p > 0$ e $q > 0$ per i quali si definisce *situazione normale* se (p, q) sta entro la curva

$$\frac{p^2}{100} + q^2 = 1$$

e *situazione anormale* altrimenti. (Per semplicità sono state omesse le unità di misura). Com'è la situazione coi valori $p = 5.6$ e $q = 0.73$? Si rappresenti graficamente la situazione.

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[4]{x}$. (Per esempio in $[-16, 16]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/4)`).

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[8]{x}$ in $[-1, 1]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Suggerimento: si calcolino con la calcolatrice le radici ottave di 0.1, 0.2,..., 0.9 con $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$, e a mano quelle di 0 e 1). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/8)`).

9 Piano cartesiano – III parte

9.1 Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Il sistema lineare (ovvero di primo grado) di 2 equazioni in 2 incognite x e y

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$$

se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$ rappresenta geometricamente l'intersezione di 2 rette nel piano cartesiano. Potrebbero non avere intersezione, se esse sono parallele e distinte, o infinite soluzioni, se esse sono coincidenti. Questi 2 casi sono caratterizzati dal *determinante* nullo

$$a\,b' - b\,a' = 0$$

e si risolveranno con cautela analiticamente e contemporaneamente facendo un disegno.
Ipotizziamo ora det $\neq 0$. Ognuna delle eventuali equazioni mancanti di 1 delle 2 variabili si risolve subito, e il valore di x o y trovato si sostituisce nell'altra equazione, se in essa c'è quella variabile, e così quell'equazione diventa un'equazione di primo grado in una sola variabile, e si risolve subito anch'essa.
Ipotizziamo ora che ci siano sia la x che la y in entrambe le equazioni: esplicitiamo y dalla prima e sostituiamola nella seconda, che diventa così un'equazione di primo grado nella sola x. Trovata la x, si trova la y dalla sua espressione precedentemente esplicitata dalla prima equazione.
Questo metodo si estende subito ai sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite[36] x, y e z (e poi anche di più): si esplicita z dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda e la terza, che insieme costituiscono a questo punto un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite x e y. Tuttavia, i sottocasi particolari, di 0 e infinite soluzioni, iniziano a diventare molteplici, e non sempre facilissimi da trattare.

I sistemi lineari ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate.

[36] Geometricamente rappresenta l'intersezione di 3 piani nello *spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$.

Esempio.

Abbiamo una provetta di 12 g contenente 2 fluidi non miscibili di volumi 7 ml e 6 ml con pesi specifici incogniti, e un'altra provetta di 14 g contenente gli stessi fluidi di volumi 5 ml e 9 ml.

Per trovare i pesi specifici incogniti x e y risolviamo il sistema lineare (di 2 equazioni in 2 incognite)

(x g/ml) 7 ml+ (y g/ml) 6 ml=12 g

(x g/ml) 5 ml+ (y g/ml) 9 ml=14 g
ovvero

7x+6y=12

5x+9y=14
e si troveranno i pesi specifici (qua dati senza l'unità di misura g/ml) $x = \frac{8}{11} \approx 0.727$ e $y = \frac{38}{33} \approx 1.151$.

9.2 Sistemi di dis/equazioni e sistemi generalizzati

Un **sistema di n equazioni** in 1 incognita x, con la parentesi graffa (grande) che vale *et*, è il predicato (con opportune funzioni)

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases}$$

e sostituendo gli = con segni di disuguaglianza si ha un **sistema di n equazioni** in 1 incognita. Naturalmente possono considerarsi **sistemi con 2 o più incognite**, e anche sia con equazioni che disequazioni.

I predicati del tipo $f(x) \neq g(x)$, che potremmo chiamare *"inequazioni"*, non li nomineremo per nome considerandoli implicitamente compresi nelle disequazioni data l'equivalenza con $(f(x) - g(x))^2 > 0$.

Non esiste un metodo generale per risolverli tutti ma in questa trattazione elementare vedremo come affrontare alcuni casi semplici.

Esempio. Questo **sistema di equazioni e disequazioni** in 2 incognite

$$\begin{cases} x\,y = 0 & \leftarrow \textit{rappresenta}\;2\;\textit{rette},\; x = 0\;e\;y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \le 0 & \leftarrow \textit{rappresenta}\;1\;\textit{cerchio},\; C(1,1),\; r = 1 \end{cases}$$

$$\text{equivale a} \quad \begin{cases} x = 0 \vee y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ (0-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + (0-1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

ha soluzione, come anche si vedeva subito graficamente,

$$\Big(x = 0 \wedge y = 1\Big) \vee \Big(x = 1 \wedge y = 0\Big).$$

Predicati come $(*)$ e $(**)$, ammettenti anche il *vel*, li chiameremo *sistemi generalizzati di equazioni e, in questo caso, disequazioni.*

Postilla alle precedenti lezioni

Antiperiodo di un numero decimale illimitato periodico:
per esempio “08” in $0.08\overline{3} = \frac{1}{12}$
(Scritta nella Lezione 1)

9.3 Funzioni e dis/equazioni di secondo grado

Le parabole con asse verticale hanno equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con qualche $0 \neq a, b, c \in I\!R$, e il loro asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$.
Definito il *discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$, la parabola interseca l'asse x in $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta \geq 0$ e altrimenti mai.
Se x_1 e x_2 sono
• le *radici* (eventualmente coincidenti) del *polinomio* $a\,x^2 + b\,x + c$,
• ovvero le *soluzioni* dell'*equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
• ovvero se $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ sono le *intersezioni* della parabola con l'asse x,
allora è

$$a\,x^2 + b\,x + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Con uno *schema di prodotto dei segni* risolviamo la disequazione

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0 \qquad \textit{oppure} \ \geq \quad \textit{oppure} \ < \quad \textit{oppure} \ \leq$$

Per esempio per $-x^2 - 2\,x + 8 \leq 0$ usando la *formula ridotta*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad\qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

utile se b è intero pari, si trova

$$\Delta = 1^2 - (-1) \cdot 8 = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-1} \qquad x_1 = +2 \quad x_2 = -4$$

$$-x^2 - 2\,x + 8 = -1 \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) \leq 0$$

$-1 > 0 \quad \textit{mai}$
$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \qquad\qquad \textit{Soluzione}: \ x \leq -4 \vee x \geq 2\,.$

È meglio risolvere le 3 disequazioni con $>$ e poi individuare l'insieme soluzione a seconda se nella disequazione iniziale si aveva $>$, $\geq$, $<$ o

$\leq$. (Altri Autori fanno diversamente). Questo è un procedimento generale che in seguito varrà anche per più di 3 termini.

Si noti che la soluzione di

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

è esattamente la stessa di quest'*equazione razionale fratta*

$$\frac{a(x - x_1)}{x - x_2} > 0$$

e similmente avviene col $<$. Si userà lo stesso *schema di prodotto dei segni*.
Se invece di $>$ si ha $\geq$ dopo aver risolto come sopra si aggiungano alla soluzione tutti i valori di x che annullano il numeratore. Similmente con $\leq$.

L'equazione della parabola ricorre un'infinità di volte[(37)] nelle Scienze Applicate. Nel seguente esercizio vediamo un'applicazione di tipo medico.

Esercizio$_\mu$
La Formula di Keys – fra i numerosi standard – calcola

$$peso\,ideale\,uomini = (statura\,in\,metri)^2 \times 22.1 \qquad (*)$$

Per quale statura (realistica) essa dà – per gli uomini – lo stesso peso della Formula di Broca

$$peso\,ideale = (statura\,in\,centimetri - 100) \pm 10\%$$

intesa senza la tolleranza del 10%?

[37] Per esempio, dà lo spazio

$$s(t) = 9.81\,t^2 + v_0\,t$$

percorso al tempo t da un corpo partito verso il basso con velocità v_0, nel campo gravitazionale terrestre, da altezza non troppo elevata, supposta la forma tale da rendere insignificante l'attrito con l'aria.

Svolgimento
La Formula di Broca intesa senza la tolleranza del 10% è ovviamente

$$peso\,ideale = statura\,in\,centimetri - 100$$

ovvero

$$peso\,ideale = (statura\,in\,metri - 1) \times 100 \qquad (**)$$

da mettere a sistema con la $(*)$:

$$\begin{cases} p = 22.1\,h^2 & \text{che è la } (*) \\ p = 100\,(h-1) & \text{che è la } (**) \end{cases}$$

e uguagliando si ha successivamente

$$22.1\,h^2 = 100\,(h-1)$$

$$22.1\,h^2 - 100\,(h-1) = 0$$

$$22.1\,h^2 - 100\,h + 100 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 22.1 \cdot 100}}{22.1}$$

$$h \approx 3.03 \quad \vee \quad h \approx 1.49$$

e ovviamente la prima soluzione non ha senso dal punto di vista della realtà sensibile (è ovvio che tutte queste formule hanno un certo dominio entro il quale funzionano bene, e poi perdono significato nella realtà).

$$\boxed{\approx 149\,cm}$$

(Il peso ideale corrispondente sarebbe $\approx 49\,kg$).

9.4 Valore assoluto, e relative dis/equazioni

Il valore assoluto in $\mathbb{R}$ è una funzione definita da

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

ma che può considerarsi anche nascere dall'elevamento al quadrato e dall'estrazione della radice quadrata perchè $\sqrt{x^2} = |x|$ e allora è una funzione elementare essendo composizione di funzioni elementari. Essa verifica molte proprietà, oltre alle ovvie

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

fra cui

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\Big(\forall\, y \neq 0\Big) \quad |x/y| = |x|/|y|$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$$

$$\Big(\forall\, a \geq 0\Big) \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a \quad \textit{e analoga con } \geq$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \;\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \;\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

e i 3 = possono sostituirsi con tutti e 4 i segni di disuguaglianza; e molte altre formule[38].

Il valore assoluto ricorre un'infinità di volte nelle Scienze Applicate. Fra le altre cose, $|t|$ rappresenta una distanza temporale dall'istante 0, sia dopo che prima di 0.

[38] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule sul valore assoluto:

$$||x|| = |x|$$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$|x^n| = |x|^n \qquad \forall\, x \in I\!R,\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$|x^\alpha| = |x|^\alpha \qquad \forall\, x \in I\!R^+,\ \ \forall\, \alpha \in I\!R$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l'ultima si chiama *disuguaglianza triangolare*.

Esercizio$_\mu$ Il *ritmo circadiano* della concentrazione sanguigna di un certo ormone (umano o animale) sia modellizzato – prescindendo dalle unità di misura – da

$$u(t) := -2.5\,|t-14| - |t-7| + 50 \qquad 0 \le t \le 24$$

Trovare in quale periodo del giorno la concentrazione è maggiore di 30.

9.5 Errore assoluto, relativo e percentuale

Nelle successive 3 formule, si noti che bisogna conosce il valore esatto di una grandezza considerata.

Si definiscono

$$\text{errore assoluto [rispetto l'esatto]} := |approx - esatto|$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} := \frac{|approx - esatto|}{esatto}$$

$$\text{errore percentuale [rispetto l'esatto]} :=$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} :=$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto] [in forma percentuale]} :=$$

$$\frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

Quest'ultimo errore relativo, e quello della seconda formula, sono lo stesso numero, ma espresso in 2 modi diversi.

Nelle Scienze Applicate ci vorrà grande cautela nell'applicare queste 3 formule perchè i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*.

Esempio$_\mu$ All'inizio i 46 cromosomi umani furono erroneamente conteggiati come 44.

$$errore\ assoluto\ [rispetto\ l'esatto] : 2$$

$errore\,relativo\,[rispetto\,l'esatto]:\ \frac{1}{23}$

$errore\,percentuale\,[rispetto\,l'esatto]:\approx$ 4.3% (diciamo pure 4%).

Esempio$_\mu$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore percentuale

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|3.14-\pi|}{\pi}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14-3.14159265...|}{3.14159265...}\cdot 100\% \approx$$

$$\approx \frac{|3.14-3.14159265|}{3.14159265}\cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

9.6 Proporzioni

Si dice *proporzione* la *relazione quaternaria* (cioè fra 4 numeri)

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{w} \qquad \text{classicamente scritta}\quad \mathrm{x:y=z:w}$$

ma talvolta si trova anche :: invece del segno =.
Non sottolineeremo qua la corrispondenza del concetto con la realtà sensibile, dovuta essenzialmente alla natura del prodotto e della divisione, supponendola nota dagli studi elementari.

Osserviamo invece che per l'operazione di divisione, oltre alle 4 notazioni già viste,

$$\frac{x}{y} \qquad x/y \qquad x:y \qquad x\div y$$

in ambito farmaceutico se ne usa anche una quinta, la parola (latina) **per**, che noi sempre trascriveremo come frazione.

$$\text{Per esempio:}\quad 12\text{ mg per ml}\quad \text{scriveremo}\quad \frac{12\text{ mg}}{1\text{ ml}}$$

ESERCIZIO Si abbia una boccetta di 10 ml di un farmaco X etichettata “15 mg per ml”. Quanti millilitri (ml) bisognerà iniettare per somministrare una dose di 75 mg?

Svolgimento. Riscriviamo l’indicazione in etichetta nella forma

$$\frac{15\text{ mg}}{1\text{ ml}}$$

e produciamo la proporzione

$$\frac{15\text{ mg}}{1\text{ ml}} = \frac{75\text{ mg}}{x\text{ ml}} \qquad \Big/ \cdot \frac{1\text{ ml}\cdot x\text{ ml}}{15\text{ mg}}$$

$$x\text{ ml} = \frac{75\text{ mg}\cdot 1\text{ ml}}{15\text{ mg}} =$$

$= 5$ ml (e li abbiamo: la boccetta ne contiene 10).

$$\boxed{5\text{ ml}}$$

Sul web si ritrovano diffusamente scritte col “per”, come “5 mg per 40 ml”, e il “per” chiaramente significa / ma a quanto pare in Italia una tale scrittura non si usa, risulta praticamente sconosciuta.

NOTA 1. È ben evidente l’importanza di **calcolare esattamente i dosaggi** in Farmacia. Ci sono stati errori fatali. (Plausibilmente sono numerosissimi e solo in minima parte vengono scoperti).

Ecco cosa consiglia il Royal College of Nursing inglese online:

> When you have completed your calculation, remember to check your work. Here’s a reminder of the ways you might do this:
>
> - repeat the calculation

- ask a colleague to check your answer
- try to calculate the answer again using a different method
- check against the recommended dose range (e.g. using the British National Formulary)
- look for unusually big or small answers.

NOTA 2. Sebbene esuli dagli obiettivi di questo testo elementare di matematica, si noti che il millilitro (corrispondente al centimetro cubo) può trovarsi indicato **online di fatto** (nei cataloghi di farmaci) sia con ml che mL ma qualcuno scrive anche *diversamente*, in un modo che potrebbe in via ipotetica confondersi con altro multiplo del litro. E si faccia anche ben attenzione a distinguere la l minuscola dal numero 1...

ESERCIZIO$_{\mu}$
Una pillola contiene una polvere costituita da $2.5\,mg$ di principio attivo e $300\,mg$ di eccipiente. Quanto principio attivo contiene $1\,kg$ della polvere?

SVOLGIMENTO
Una pillola contiene $(300+2.5)\,mg$ di polvere e allora si ha subito la proporzione

$$2.5\,mg : 302.5\,mg = x\,mg : 1\,kg$$

ovvero con scrittura più moderna

$$\frac{2.5\,mg}{302.5\,mg} = \frac{x\,mg}{1\,kg} \qquad \Big/ \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg}$$

trovandosi

$$x = \frac{2.5}{302.5} \cdot \frac{1\,mg}{1\,mg} \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg} =$$

essendo ovviamente $1\,kg = 1\,000\,g = 1\,000\,000\,mg$

$$= \frac{2.5}{302.5} \cdot 10^6 =$$

$$\boxed{8\,264.46\,mg}$$

(Circa 8 grammi e un quarto).

Esercizio$_\mu$ Trovare l'unico numero $x > 0$ che sia *medio proporzionale* fra 1 e $1 + x$. (Cioè soluzione di $1 : x = x : (1 + x)$).
Riscriviamo la proporzione

$$1 : x = x : (1 + x)$$

in questa forma

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \qquad \Big/ \cdot x \cdot (1 + x)$$

$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

ed escludendo la radice negativa

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \qquad \text{(mnemonico: } O_1\ \textit{numero}_6!\ E'_1\ \textit{notevole}_8.\text{)}$$

che è la *sezione aurea* φ. Si noti che $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \approx 0.618$.
Questo numero φ tende a ricorrere nelle Scienze Naturali.

ESERCIZIO$_\mu$
Qual è la misura in radianti di un angolo di 150°?
SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x°$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : 150°$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{x_{rad}}{150^\circ} \qquad \Big/ \cdot 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} \cdot 150^\circ = x_{rad}$$

$$x_{rad} = \frac{15}{18}\pi_{rad}$$

$$\boxed{\tfrac{5}{6}\pi}$$

ESERCIZIO$_\mu$
Qual è la misura in gradi di un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti?
SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = \frac{2}{3}\pi_{rad} : x^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{\frac{2}{3}\pi_{rad}}{x^\circ} \qquad \Big/ \cdot \frac{180^\circ \cdot x^\circ}{\pi_{rad}}$$

$$x^\circ = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ$$

$$\boxed{120^\circ}$$

III – Funzioni elementari, con equazioni e disequazioni

10 Funzioni trigonometriche

Le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate: Astronomia, Geofisica, Topografia... In ambito farmaceutico e medico in generale, tendono a ricorrere meno, in generale in 3 forme:

• qualitativa, semplicemente con riferimento alla forma([39]) della sinusoide (ovvero della cosinusoide, che ha la stessa forma).

• quantitativa, cioè il calcolo esatto, per esempio nelle determinazioni posizionali dell'MRI.

• quantitativa nella complessa Analisi di Fourier che sta dietro l'elaborazione digitale delle radiografie.

Ma la cosa più interessante in questa trattazione elementare è la funzione arcotangente perchè dà una distribuzione di probabilità (di Cauchy) simile alla ben più importante distribuzione normale, ma per certi versi più semplice.

La trigonometria tocca marginalmente la Farmacia anche con la Legge di Bragg e la Legge di Snell, utili nella Cristallografia a raggi X, usata per l'analisi dei cristalli di sostanze chimiche solide. `LINK->` `LINK->` `LINK->`

10.1 Definizioni

Nel piano cartesiano di assi X, Y e origine O consideriamo il circolo di centro O e raggio 1 (*circolo goniometrico).*
Consideriamo un arco (del circolo) che inizia in $(1,0)$ procedendo in senso antiorario. Esso determina un *angolo goniometrico* di vertice O. La lunghezza x dell'arco si dice *misura in radianti* dell' *angolo goniometrico.* E si possono considerare misure negative con archi che procedono in senso orario. Chiamiamo $P(x)$ il secondo estremo dell'arco. La misura in radianti a priori $\in [-2\pi, 2\pi]$, e poi in effetti *facendo anche più di 1 giro*, $x \in \mathbb{R}$. Si definiscono

[39] Leggiamo per esempio in Sinusoidal heart rate pattern: Reappraisal of its definition and clinical significance, di Modanlou HD, Murata Y, su The journal of obstetrics and gynaecology research 2004 Jun;30(3):169-80: Sinusoidal heart rate (...) was called 'sinusoidal' because of its sine waveform (...) A true SHR is an ominous sign of fetal jeopardy needing immediate intervention.

le funzioni *seno* e *coseno*, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e la *tangente*

$$\sin(x) := ordinata(P(x)) \qquad \cos(x) := ascissa(P(x))$$

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

e quest'ultima è l'ordinata del punto d'intersezione della retta $OP(x)$ con la retta tangente al circolo goniometrico in $(1,0)$.

$$(E\ anche\ la\ cotangente\ \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$

Per esempio si ha (banalmente le prime 2, difficilmente la terza)

$$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1 \qquad \sin 1 \approx 0.84 \tag{1}$$

10.2 Periodicità, simmetrie, gradi e radianti

Il punto goniometrico è palesemente 2π−periodico, $P(x + 2\pi) = P(x)$ e allora $P(x + 2k\pi) = P(x)$ per ogni k intero, dal che si vede subito la periodicità del seno e del coseno, mentre con considerazioni meno elementari si trova che la tangente è π-periodica:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\tan(x + k\pi) = \tan(x), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Dalla disegno del circolo goniometrico capiamo subito che

il seno è dispari: $\sin(-x) = -\sin x$
il coseno è pari: $\cos(-x) = -\cos x$
la tangente è dispari: $\tan(-x) = -\tan x$

La misura dell'angolo piatto di π radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di 180°, e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ \tag{2}$$

che consente di passare da un sistema all'altro. Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$

e un qualche interesse ha anche 1 rad $\approx 57°$, e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (9). Quasi mai[40] si scrive *rad*.

La metà di un angolo di $\pi/4$ radianti ha $\pi/8$ radianti. La metà di quello stesso angolo, espresso in gradi, cioè di $45°$ gradi, ha $22.5°$ ma spesso si scrive diversamente: come

per 22 ore e mezza scriviamo $22^h30'$

cioè

si usano i 60 minuti primi che suddividono 1 ora, similmente

si usano i 60 primi (di grado) che suddividono 1 grado

così

per $22.5°$ (22 gradi e mezzo) si può anche scrivere $22°\,30'$.

Esempio della Chimica.
Angolo di legame del metano: $\approx 109°28'$.

10.3 Alcuni valori notevoli

Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$ π	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

[40]Per il lettore interessato, alcuni valori numerici interessanti:

$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{4}\,rad \approx 0.785\,rad$)
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{3}\,rad \approx 1.05\,rad$)
$\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{2}\,rad \approx 1.57\,rad$).
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ (per esempio $\cos\frac{\pi}{4}$)
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ (per esempio $\cos\frac{\pi}{3}$)
$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$ (per esempio $\tan\frac{\pi}{3}$)

Nello schema soprastante è da intendersi che

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(270°)$$

assolutamente non si intenda che $-\frac{\pi}{2}$ **sia uguale a** $270°$.
La considerazione del quadrato inscritto nel circolo goniometrico e coi lati paralleli agli assi, che per il Teorema di Pitagora ha lato $\sqrt{2}$, dà subito, con analogo *caveat* come sopra (e anche dopo),

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$ $\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$ $\frac{7}{4}\pi$
$x°$	$45°$	$135°$	$225°$	$315°$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1	-1	1	-1

Con la considerazione di 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico e altre figure, ci sono molti altri valori classicamente considerati *angoli notevoli*.([41])

10.4 Alcune formule goniometriche notevoli

Nel corso dei secoli sono state dimostrate moltissime formule. Ecco alcune delle principali.
Identità goniometrica fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{3}$$

[41]La considerazione dei 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico, con un vertice in $(0,1)$ e rispettivamente in $(1,0)$, dà subito, dividendoli in triangoli equilateri di lato 1 e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$ $\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$ $\frac{11}{6}\pi$
$x°$	$30°$	$150°$	$210°$	$330°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$ $\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$ $\frac{5}{3}\pi$
$x°$	$60°$	$120°$	$240°$	$300°$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

La considerazione di decagoni regolari darebbe ancora altri valori.

Formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y\\ \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y\end{aligned}$$

Ce ne sono poi moltissime altre([42]).

10.5 Funzioni goniometriche inverse

Arcotangente:
$\arctan x$ è l'angolo α la cui tangente è x, con $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Cioè è l'inversa della restrizione della tangente a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\arctan := \left(\tan\big|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1}$$

[42] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule:
Formule di duplicazione:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

$$\cos(2x) = \begin{cases}\cos^2 x - \sin^2 x\\ 2\cos^2 x - 1\\ 1 - 2\sin^2 x\end{cases}$$

$$\tan(2x) = \tfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2 x}, \qquad x \neq \tfrac{\pi}{4} + k\tfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}\\ \sin x - \sin y &= 2\cos\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}\\ \cos x + \cos y &= 2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2}\\ \cos x - \cos y &= -2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Formule di bisezione della tangente:

$$\tan\frac{x}{2} = \begin{cases}\frac{\sin x}{1+\cos x}, & x \neq (2k+1)\pi\\ \frac{1-\cos x}{\sin x}, & x \neq k\pi\end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Vi sono poi le *formule parametriche razionali*, e molte altre.

Similmente, vi sono poi anche l'arcoseno e l'arcocoseno. ([43]) ([44])

Esempio di Chimica. Per esempio $\arccos(-1/3) \approx 1.910633$, che convertendo da radianti in gradi è $\approx 109°28'$: è l'angolo di legame del metano.

Alcuni valori notevoli. Dalla definizione si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono.

Altri valori si ottengono dalla disparità dell'arcotangente:

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

10.6 Trigonometria – la goniometria dei triangoli

In un triangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti α, β, γ valgono queste 3 proprietà.

Teorema dei Seni.([45])

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

[43]**Arcoseno:**
$\arcsin x$ è l'angolo α il cui seno è x, con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.
Arcocoseno:
$\arccos x$ è l'angolo α il cui coseno è x, con $\alpha \in [0, \pi]$.
In simboli:

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}$$

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

[44]**Alcuni valori notevoli.** Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\nexists$

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono. (Per esempio $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.61548$).

[45]Nasir al-Din al-Tūsī, persiano, XIII sec. d.C. "He is often considered the creator of trigonometry as a mathematical discipline in its own right", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Teorema del Coseno.([46])

$$c^2 = a^2 + b^2 - a\, b \cos\gamma.$$

Se il triangolo è rettangolo con $\gamma = 90°$

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha$$

Ed esistono poi innumerevoli altre formule.

[46] Euclide, greco, III sec. a.C., ben noto, e Jamshīd al-Kāshī, persiano, XIII sec. d.C. "Much of al-Kāshī's work was not brought to Europe, and much, even the extant work, remains unpublished in any form", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 10

ESERCIZIO$_\mu$
$\star$ La concentrazione sanguigna di una certa sostanza sia modellizzata nelle 24 ore del giorno da

$$u_a(t) := 2\,a\ + a\,\sin\frac{\pi\,t}{12} \qquad 0 \le t \le 24$$

essendo a un parametro fissabile farmacologicamente. In quale orario la concentrazione è ≥ 2.5 per $a := 1$?

Svolgimento.
Seppure non sia necessario per risolvere il problema, vediamo su WolframAlpha il grafico della concentrazione per $a := 1$ scrivendovi

```
plot 2+Sin[Pi t/12], t from 0 to 24
```

Ora (con $a := 1$) abbiamo la disequazione

$$2 + \sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 2.5 \qquad \Big/ + (-2)$$

$$\sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 0.5$$

$$\text{poniamo } x := \frac{\pi\,t}{12} \text{ ottenendo } \sin x \ge \frac{1}{2}$$

e ci interessano solo i tempi

$$0 \le t \le 24 \qquad \Big/ \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$0 \le \frac{\pi\,t}{12} \le 2\,\pi \text{ cioè } 0 \le x \le 2\,\pi$$

e allora in $[0, 2\,\pi]$ dobbiamo risolvere $\sin x \ge \frac{1}{2}$, che si fa dise- gnando il circolo goniometrico, trovando subito (sono valori notevoli)

$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi\,t}{12} \le \frac{5}{6}\pi \Big/ \cdot \frac{12}{\pi}$$
$$2 \le t \le 10$$

e in conclusione

$$\boxed{\text{Fra le 2 e le 10 di mattina}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, corrispondenti appunto a $\sin x = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(Si notino le periodicità).

ESERCIZIO$_{\mu}$ Approssimare $\cos(1)$ usando le (1) e (3).
Si verifichi poi su WolframAlpha con `Cos[1]`

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Svolgimento
Con la formula di addizione del coseno

$$2\Big(\cos x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\left((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\cos x - \sqrt{3}\sin x$$

e con il secondo membro così riscritto la disequazione equivale a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < -\cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < -\sqrt{3}\sin x$$

$$-\sqrt{3}\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big/ : (-\sqrt{3}) < 0$$

$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da $-\frac{5}{6}\pi$ fino a $-\frac{\pi}{6}$, estremi esclusi, corrispondente appunto a $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

equivalentemente scritta

$$\boxed{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Naturalmente si potrebbero considerare esercizi ↑ più complessi.

11 Funzioni e dis/equazioni ir/razionali

11.1 Polinomi e funzioni razionali intere

Un polinomio è una *scrittura* come $2\,x^7 - \frac{3}{2}\,x^5 + \sqrt{3}\,x^2 - x + 2$ e in generale

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

ed esso definisce una funzione *razionale intera* (o *polinomiale*), e n è il *grado* se $a_n \neq 0$.
Esistono similmente polinomi in più variabili, come $x^2 + x^8\,y^2 - 1$, che ha grado 10.

11.2 Funzioni e dis/equazioni razionali intere

Limitandosi ad 1 variabile, un'**equazione razionale intera** è il predicato che uguaglia 2 polinomi in 1 variabile $P_1(x) = P_2(x)$ ovvero dopo le opportune riduzioni, che uguaglia un polinomio (in 1 variabile) a 0:

$$P(x) = 0$$

e la **disequazione razionale intera** si ottiene sostituendo il segno di uguaglianza con uno di disuguaglianza, per esempio

$$x^2 + 5x + 6 \leq 0\,.$$

Abbiamo visto come risolvere equazioni e disequazioni razionali intere di primo e secondo grado.
Per quelle di grado superiore, consideriamo per esempio

$$2\,x^4(-x^2 - 2x + 8)(2 - x)(1 - x + x^2) = 0 \qquad \text{o, disequazione, } > 0,$$

oppure altra disequazione con $\geq$ oppure $<$ oppure $\leq$.
Per risolvere *fattorizziamo* il polinomio in fattori di primo grado e/o di secondo grado *irriducibili* ovvero con discriminante negativo. E poi si risolve con uno schema di prodotto dei segni.([47])

[47] Ecco qualche dettaglio per il lettore interessato. Il monomio $2\,x^4$ si fattorizza in $2\,x{\cdot}x{\cdot}x{\cdot}x$ ma in effetti i fattori che sono monomi x^n conviene lasciarli stare come sono. Il polinomio di

L'equazione e le 4 disequazioni

$$2\,x^9 - 2\,x^8 - 22\,x^7 + 56\,x^6 - 56\,x^5 + 32\,x^4 \qquad = 0,\ > 0,\ \geq 0,\ < 0, \leq 0$$

si risolvono come prima una volta che si riconoscesse che questo è proprio il polinomio di prima, ma ora è molto lontano dalla fattorizzazione. Il problema di fattorizzare un polinomio può essere facile, come è in questo caso, o difficile, o impossibile.
Prima di tutto *raccogliamo* il fattore x^4, subito visto:

$$x^4\,(2\,x^5 - 2\,x^4 - 22\,x^3 + 56\,x^2 - 56\,x + 32)$$

e ci resta da fattorizzare il polinomio $P_5(x)$ di 5^ grado. In questo caso si può fare[48] abbastanza facilmente ma in questa trat-

secondo grado $-x^2 - 2x + 8$, con discriminante positivo, abbiamo visto che è $-1 \cdot (x-2)(x+4)$. Il fattore di primo grado $2 - x$ è già a posto. E $1 - x + x^2$ è irriducibile avendo discriminante negativo, e allora non ha zeri. Si ha allora la fattorizzazione

$$2\,x^4(-1)(x-2)(x+4)(2-x)(1-x+x^2)\,.$$

L'equazione con $= 0$ equivale, considerato che $x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$$x = 0 \ \vee\ x - 2 = 0 \ \vee\ x + 4 = 0 \ \vee\ 2 - x = 0$$

che dà $x \in \{-4, 0, 2\}$. La disequazione si fa con lo schema di prodotto dei segni visto in precedenza trovandosi (per ≤ 0) la soluzione $x \leq -4 \vee x = 0 \vee x = 2$. Per > 0 si troverebbe $-4 < x < 0 \vee 0 < x < 2 \vee x > 2$.

[48] Per il lettore interessato: prima si raccoglie 2

$$2\,(x^5 - 2\,x^4 - 11\,x^3 + 28\,x^2 - 28\,x + 16)$$

in modo da avere un polinomio *monico*, cioè con *coefficiente principale* 1, poi si procede con la Regola di Ruffini, se si può. Cercheremo qua *solo* fattori $x - m$ con m un divisore intero del termine costante: ±1, ±2, ±4, ±8, ±16. Allora basta cercare un numero m fra quelli, il quale annulli il polinomio. È $P_5(2) = 0$ e allora dividiamo per $x - 2$ con la Regola di Ruffini:

i coefficienti →	+1	−1	−11	+28	−28	+16
la radice → +2	↓	+2	+2	−18	+20	−16
	+1	+1	−9	+10	−8	0 ← sempre così

che dà i coefficienti del quoziente, e allora la fattorizzazione

$$(x-2)(x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8)$$

e riprendendo il monomio x^4 e il fattore 2

$$2\,x^4(x-2)(x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8)\,.$$

tazione ci limiteremo solo ai casi in cui, arrivati a questo punto, si abbia un polinomio di grado al più 2 (invece qua è 5) e allora si procede come prima.

Esempio$_\mu$ La Formula di Livi per il peso ideale è
$peso\, ideale = (2.37 \times altezza\, in\, metri)^3$
La Formula di Keys per il peso ideale per le donne è $pesoidealedonne = (altezza\, in\, metri)^2 \times 20.6$
Per quali altezze (realistiche) danno lo stesso peso, e quale?

Detta h l'altezza in metri – unità di misura che metteremo nella soluzione ma ometteremo nei calcoli – abbiamo l'equazione di 3^ grado

$$(2.37\, h)^3 = 20.6\, h^2$$

e successivamente

$$2.37^3 \cdot h^3 - 20.6\, h^2 = 0$$

$$h^2 \cdot (2.37^3 \cdot h - 20.6) = 0$$

$$h = 0\ (non\ realistica) \qquad 13.312053\, h = 20.6$$

e allora

$$h = \frac{20.6}{13.312053}$$

$$p = \left(\frac{20.6}{13.312053}\right)^2 \cdot 20.6$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h \approx 1.55\, m \\ p \approx 49.3\, kg \end{array}}$$

Si continua cercando un fattore $x - m'$ con m' fra i divisori interi di -8, e si trova che 2 annulla il polinomio di quarto grado $P_4(x)$, e allora lo si divide per $x - 2$ con la Regola di Ruffini trovando

$$2\, x^4 (x-2)(x-2)(x^3 + 3x^2 - 3x + 4)$$

poi cercando fra i divisori interi di 4 si trova l'annullamento di $P_3(x)$ in -4 da cui con la Regola di Ruffini applicata a $P_3(x)$

$$2\, x^4 (x-2)(x-2)(x+4)(x^2 - x + 1)$$

che è come prima (un fattore è opposto ma congloba il (-1)).

11.3 Funzioni e dis/equazioni razionali fratte

Ovviamente la *disequazione razionale fratta*

$$\begin{array}{l}\scriptstyle polinomio\rightarrow \\ \scriptstyle polinomio\rightarrow\end{array} \quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0$$

ha la stessa soluzione dell'equazione razionale intera $N(x){\cdot}D(x) > 0$ e allora si risolve con lo stesso schema di prodotto dei segni.
Se invece di $>$ di ha $\geq$ dopo aver risolto come sopra si aggiungano alla soluzione tutti i valori di x che annullano il numeratore.([49])

11.4 Funzioni e dis/equazioni irrazionali

• Le radici di indice dispari (cubiche, quinte...) sono crescenti su $\mathbb{R}$ e allora l'equazione o disequazione

$$\sqrt[dispari]{f(x)} \;\; _{qualunque\ segno\ di\ dis/uguaglianza} \;\; g(x)$$

si può affrontare semplicemente elevando ambo i membri all'indice (dispari) della radice (che così scompare). Allora si hanno queste 5 semplici equivalenze, che si ricavano subito appunto elevando a potenza conservando l'uguaglianza o l'ordinamento, e allora in definitiva non c'è niente da veramente "imparare a memoria":

$$\begin{array}{rcccl} \sqrt[3]{f(x)} & = & g(x) \Leftrightarrow f(x) & = & g^3(x) \\ & > & & > & \\ & \geq & & \geq & \text{in tutte} \\ & < & & < & \text{l'ordinamento} \\ & \leq & & \leq & \text{si conserva} \end{array}$$

e il 3 della radice può sostituirsi con ogni indice dispari.

[49] Se invece si ha $\leq$ o $\geq$ si moltiplichino ambo i membri della disequazione per -1 e cosí il $<$ diventa $>$ e il $\leq$ diventa $\geq$ e il -1 lo si conglobi nel numeratore, e si risolva come sopra. Naturalmente se la disequazione razionale fratta si presenta inizialmente in forma non canonica

$$\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{C(x)}{D(x)}$$

prima si portino le x a sinistra, e si metta a denominatore comune riconducendosi alla forma canonica sopra scritta, e così per tutti i segni di disuguaglianza.

• Il caso delle radici di indice pari (radici quadrate, quarte...) è meno semplice perchè sono definite solo sui numeri non negativi. Quelle equazioni e disequazioni sono regolate da queste 2 formule

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \qquad \text{(che diremo \textbf{``radice minore''})}$$

e da varie altre che non tratteremo([50]).

Esercizio$_\mu$ Si risolva $x > \pi + \sqrt{x^2 - 10}$.

Esercizio$_\mu$ Useremo la Formula di Mosteller per l'area della superficie corporea, in questa versione:

$$area \approx \frac{\sqrt{altezza_m \times peso_{kg}}}{6}$$

Considerato un soggetto per un certo tempo, in cui possiamo ritenere costante la sua altezza, può ben variare il suo peso.
Per quel soggetto abbiamo allora una funzione

$$f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{h \cdot x}$$

essendo h l'altezza (in metri, costante),

[50]Per il lettore interessato ecco le altre formule limitatamente alla radice quadrata. Prima di tutto il caso **"radice minore o uguale"**, similissimo a quello "radice minore":

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

e poi 2 casi (similissimi) **"radice maggiore"** e **"radice maggiore o uguale"**:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Si risolva per esempio$_\mu$ $\sqrt{x^2 - 9} \geq x - 1$.

x il peso (in chilogrammi),

$f(x)$ la superficie corporea (in metri quadrati).
Per quali pesi la superficie corporea sarebbe minore di 2 metri quadrati in questo modello?

SVOLGIMENTO
Abbiamo la disequazione

$$\frac{1}{6}\sqrt{h \cdot x} < 2 \qquad \Big/ \cdot 6 > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)}$$

$$\sqrt{h \cdot x} < 12$$

che risolviamo come detto sopra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h \cdot x \geq 0 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \\ 12 > 0 & \text{sempre verificata} \\ h \cdot x < 12^2 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{(ovvio, è un'altezza)} \\ x < \frac{144}{h} \end{cases}$$

$$\big(0 \leq \big)\, x < \frac{144}{h}$$

Per esempio con un'altezza di 1.71 m, $x < 84.2$. (Sotto gli 84 kg, circa).
Per esempio con un'altezza di 1.82 m, $x < 79.1$. (Sotto i 79 kg, circa).

ESERCIZI SULLA LEZIONE 11

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
Si risolva la seguente disequazione:

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8}$$

SVOLGIMENTO
Essendoci una radice quadrata, cercheremo di ricondurci al caso "radice maggiore" oppure al caso "radice minore", e in effetti in questo caso

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8} \quad \Big/ + (-\mathrm{e})$$

$$x - \mathrm{e} > \sqrt{x^2 - 8}$$

$$\sqrt{x^2 - 8} < x - \mathrm{e}$$

proprio al caso "radice minore", e allora la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ x - \mathrm{e} > 0 \\ x^2 - 8 < (x - \mathrm{e})^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{8} \vee x \geq \sqrt{8} \\ x > \mathrm{e} \\ x^2 - 8 < x^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -2\sqrt{2} \vee x \geq 2\sqrt{2} \approx 2.82 \\ x > \mathrm{e} \approx 2.718 \text{ che sappiamo a memoria} \\ 2\,\mathrm{e}\,x < \mathrm{e}^2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \approx 2.831 \text{ con la calcolatrice dal soprastante} \end{cases}$$

e mettendo in ordine crescente i capisaldi (ovvero valori delimitanti) trovati

$$\ldots\ldots\ldots -2\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \mathrm{e} \ldots\ldots\ldots 2\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \ldots\ldots\ldots$$

..............|.............|.............|...............|............. schema d'intersezione

~~~~~ − − − − − − − −− ~~~~~~~~~~

− − − − − − − −− ~~~~~~~~~~~~~~~ $\cap$

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ − − −−

otteniamo il soprastante schema d'intersezione che ci dà la soluzione

$$\boxed{2\sqrt{2} \leq x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}}$$

12 Esponenziali e logaritmi – I parte

12.1 Vecchie funzioni potenza e nuove esponenziali

Già sappiamo il significato della

$$\text{potenza} \quad 2^3 \quad \text{e in generale } b^a$$

di base $b > 0$ ed esponente $a \in \mathbb{R}$

(Se $a > 0$ allora esiste anche per $b = 0$ e vale 0).

Notoriamente, se "liberiamo" la base abbiamo le **funzioni potenza**

$$x^a \qquad \text{per esempio } x^2,\, x^3,\, x^{10},\, x^{\frac{1}{2}}$$

Ma se "liberiamo" l'esponente abbiamo le **funzioni esponenziali**

$$b^x \qquad \text{per esempio } 2^x,\, 3^x,\, 10^x,\, \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

di base 2, di base 3, eccetera;
e questa funzione è caratterizzate da
"al crescere di 1 della x la b^x si moltiplica per b"
per esempio al crescere di 1 della x la 2^x raddoppia, e la 10^x decuplica.

Le funzioni esponenziali modellizzano un'infinità di processi delle Scienze Applicate, con crescenza sempre più rapida se la base è $b > 1$, e decrescenza verso 0 se $0 < b < 1$.

> Si noti che, in buona sostanza, esiste "solo una" funzione esponenziale, e tutte le altre si ottengono riscalando l'argomento. Per esempio la funzione 3^t, essendo t un tempo in mesi, dà esattamente gli stessi valori della funzione 9^t con t misurato in bimestri: la prima al mese 4 vale 81 come la seconda al bimestre 2, che è lo stesso tempo nella realtà sensibile.

Le **basi** più significative sono queste 4, e vediamo alcuni esempi:

•2: la 2^x dà il num. di sottoinsiemi di un insieme di x elementi;
•10: per la notazione scientifica dei numeri, $x \cdot 10^n$, con n intero;
•φ: la $\frac{\phi^x}{\sqrt{5}}$ approssima per intero $x \gg 0$ la successione di Fibonacci,

$$\text{e } \varphi \text{ è la } \textit{sezione aurea, } \varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618; \tag{4}$$

•e: e^x è la **funzione esponenziale** – senza dire "di base e" – ed

e è il numero di Nepero, in inglese Euler's number, la "somma infinita" (serie) dei reciproci dei fattoriali dei numeri naturali.

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \approx \mathbf{2.718}^{\nearrow}$$

La funzione esponenziale e^x viene denotata anche con un suo simbolo specifico:

e^x si denota $\exp x$ o meglio $\exp(x)$.

Raramente, e in questo testo mai, si scrive anche

$$\exp_b a \text{ per intendere } b^a.$$

12.2 La logistica e le funzioni sigmoidee

Un'altra questione interessante è quella della logistica standard

$$f(t) := \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$$

correlata allo sviluppo di una popolazione (animale, microbica...) quando si consideri che, ad un certo punto – e a differenza di quel che si considera nel modello ultra-semplificato della successione di Fibonacci – i vari organismi iniziano ad ostacolarsi a vicenda.

Si calcolino i suoi valori in -2, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, e si disegni un grafico approssimativo.
Si veda il grafico su Wikipedia.

Le funzioni che come la logistica standard e l'arcotangente crescono da un valore finito ("in $-\infty$") a un altro ("in $+\infty$") si chiamano **funzioni sigmoidee**, almeno se sono sufficientemente regolari, e il loro grafico si dice (curva) sigmoide.
(Ma una definizione rigorosa non la vogliamo considerare. `LINK->`).
Questo tipo di grafico ha un'ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate e in Calcolo delle Probabilità.
Per esempio si vedano le Figure 2 e 4 in `https://toxtutor.nlm.nih.gov/06-003.html`

12.3 Logaritmi

La funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b e la vedremo bene nella prossima lezione.

Per intanto si noti che tutti gli esponenziali in 0 valgono 1, e allora tutti i logaritmi in 1 valgono 0.
Si disegnino i grafici degli esponenziali e simmetricamente – rispetto alla bisettrice del I e III quadrante – dei logaritmi, fissando le basi 2 e poi 10.

La funzione logaritmo in base 10 è caratterizzate da
"al decuplicare della x il $\log_{10} x$ cresce di 1"
e similmente al raddoppiare della x il $\log_2 x$ cresce di 1.
Cresce pianissimo! ("Striscia come un logaritmo").

13 Esponenziali e logaritmi – II parte

13.1 Logaritmi naturali e decimali; esponenziale

Come abbiamo anticipato, la funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b.
Facciamo un passo indietro, verso l'algebra.
Per introdurre i logaritmi algebricamente, possiamo vedere

$$\log_2 8 = 3 \qquad \text{come una } \textit{scrittura alternativa} \text{ di} \qquad 2^3 = 8.$$

Il logaritmo in base b di x è l'esponente da dare a b per avere x. (Ma) dev'essere $x > 0$, e $0 < b \neq 1$. Ecco due esempi:

(51) $$\log_2 8 = 3 \Leftarrow 2^3 = 8 \qquad \log_{10} 100 = 2 \Leftarrow 10^2 = 100.$$

Considereremo quasi solo 2 basi: di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi usato in Chimica,

il *logaritmo decimale*, in base 10,

$$\lg x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_{10} x \qquad \text{(ma purtroppo anche } \log x\text{)},$$

e il *logaritmo naturale*, in base e,

$$\ln x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_e x \qquad \text{(ma purtroppo anche } \log x\text{)}.$$

La base 10 è stata di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi è usata in Chimica.
La base e è oggi preferita in Matematica e Fisica.

Ecco due valori che dobbiamo imparare a memoria:

$$\lg 2 \approx \mathbf{0.3} \quad (52) \tag{5}$$

[51] Più espressivamente, il logaritmo $\log_2 8 = 3$

è l'**esponente giu**sto	3	mnemonico:
per **la** sua **ba**se	2	È GIÙ aL BAAR!
per avere il suo **ar**gomento	8	

[52] O meglio ≈ 0.301. Il numero 0.3 ha errore (percentuale rispetto l'esatto) <0.5%.

$$\lg \mathrm{e} \approx \mathbf{0.4343} \tag{6}$$

Tutti i logaritmi in 1 valgono 0. I logaritmi in base $b > 1$ sono funzioni crescenti ("verso $+\infty$"), e in base $0 < b < 1$ decrescenti ("verso $-\infty$"). In ogni caso il crescere in valore assoluto avviene con straordinaria lentezza, per esempio $\log_{10} 1000 = 3$. I limiti in 0 sono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. In ogni caso è $\log_b : I\!R^+ \to I\!R$.
(Per ogni possibile base b) il logaritmo in base b è una funzione biiettiva, e la sua inversa è la funzione esponenziale in base b, cioè b^x.
L'inversa del logaritmo naturale è la *funzione esponenziale*, ed è definita su tutto $\mathbb{R}$, cioè $\exp : I\!R \to I\!R$:

$$\exp = \ln^{-1} \qquad \ln = \exp^{-1},$$

ed è la funzione esponenziale di base e:

$$\exp x = \mathrm{e}^x.$$

Questi $^{-1}$ denotano l'inversa, assolutamente non il reciproco.

(L'inversa di $\ln x$ come detto è $\exp x$, la reciproca di $\ln x$ è $\frac{1}{\ln x}$, una funzione completamente diversa, neanche definita per $x < 0$).

L'esponenziale in 0 vale 1, ed è crescente "verso $+\infty$" con grande rapidità, per esempio, $\exp(20)$ è più o meno mezzo miliardo.

13.2 Prima proprietà del logaritmo decimale

"Trasforma prodotti in somme":

$$\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y$$

In particolare $\lg(10\,x) = 1 + \lg x$ e più in generale $\lg(x\,10^n) = \lg x + n$, con il che il logaritmo decimale dell'enorme numero di Avogadro è semplicemente $23 + \lg 6.022$. E quell'ultimo logaritmo si può calcolare – o per meglio dire approssimare, da un punto di vista matematico – in vari modi che vedremo. Ma intanto è chiaro che ci basta avere i valori dei logaritmi dei numeri fra 1 e 10 e gli altri si trovano subito di conseguenza.

Esempio di uso del logaritmo: il pH. Il pH è una complessa questione chimica, per la quale si rinvia comunque ai testi specialistici. Qua vogliamo illustrarne qualche proprietà matematica. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce pH:

> pH is defined as the decimal logarithm of the reciprocal of the hydrogen ion activity, a_H+, in a solution
>
> $$\mathrm{pH} = -\log_{10}(a_{H^+}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right)$$

Se il pH diminuisce di 1 questo equivale al decuplicare di a_H:

$$\begin{aligned} pH - 1 &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right) - 1 = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right) + (-1) = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right) + \log_{10}\frac{1}{10} = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}} \cdot \frac{1}{10}\right) = \\ &= \log_{10}\left(\frac{1}{10\, a_{H^+}}\right) \end{aligned}$$

Così il suo diminuire di 2 corrisponde al centuplicare di a_H.

13.3 Seconda e terza proprietà del logaritmo decimale

"Trasforma divisioni in sottrazioni":

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y$$

in particolare $\lg(1/y) = \lg 1 - \lg y = 0 - \lg y$ cioè

"Trasforma il passaggio al reciproco nel passaggio all'opposto":

$$\lg\frac{1}{y} = -\lg y$$

13.4 Quarta proprietà del logaritmo decimale

"Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento":

$$\lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x$$

Esempi con le proprietà 1, 2 e 4 del logaritmo decimale.

$\lg 4 = \lg(2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 = 0.6$

$\lg 8 = \lg(2 \cdot 2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 + 0.3 = 0.9$

$\lg 5 = \lg(10/2) = \lg 10 - \lg 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$

$\lg 7 = \lg \sqrt{49} = \frac{1}{2} \lg 49 \approx$
sostituiamo approssimatamente 49 con 50
$\approx \frac{1}{2} \lg 50 = \frac{1}{2} \lg(5 \cdot 10) = \frac{1}{2} (\lg 5 + \lg 10) \approx \frac{1}{2} (0.7 + 1) \approx 0.85$

(Ci mancano 3, 6 e 9, che vedremo; 1, 2 e 10, e ora 4, 5, 7, 8, li abbiamo: provate a disegnare un grafico e stimare così i 3 valori mancanti; poi verificherete le stime).

Esempio: calcolo del $\log_{10}(50\,000)/2$ dei prodotti omeopatici.
Leggiamo su Wikipedia (inglese)([53]) alla voce *Homeopathic dilutions*:

> Several potency scales are in use (...) If a dilution is designated as q on the Q scale, and c on the C scale, c/q=$\log_{10}$(50,000)/2

cioè vale una sorta di formula di conversione fra scale

$$c = q \times \frac{\lg 50\,000}{2}$$

e ora vogliamo calcolare quel numero, col "nostro" $\lg 5 \approx 0.7$:

$$\frac{\lg 50\,000}{2} = \frac{\lg 5 \cdot 10^4}{2} = \frac{\lg 5 + \lg 10^4}{2} \approx \frac{0.7 + 4}{2} = 2.35$$

e infatti dice, e ora lo capiamo un po' meglio,

> A given dilution on the Q scale is roughly 2.35 times its designation on the C scale.

[53] https://en.wikipedia.org/wiki/Homeopathic_dilutions

(La formula soprascritta c/q=$\log_{10}$(50,000)/2 si trova facilmente[54]).

Alcuni Autori e Produttori scrivono LM invece di Q (il significato inteso sarebbe 50 e 1000 in numeri romani, ma LM non significa 50 000 nei numeri romani). E alcuni purtroppo lm, minuscolo, con difficile interpretazione della elle minuscola iniziale (sul web dove si vendono tali prodotti, pare una i maiuscola).
La formula di conversione si riferisce solo alla *teorica* diluizione *in base al modello* usato, e darebbe per esempio l'equivalenza di 20 Q con 47 C ovvero CH, ma i due preparati sono stati ottenuti con procedura diversa e non vengono considerati equivalenti dal punto di vista terapeutico.

13.5 Proprietà degli esponenziali e dei logaritmi

Non solo il logaritmo decimale, ma il logaritmo *in qualunque base*
"Trasforma prodotti in somme"
"Trasforma divisioni in sottrazioni"
"Trasforma il passaggio al reciproco nel passaggio all'opposto"
"Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento"
Inoltre agisce ottimamente su tutte le potenze e le radici – sempre nel senso di una semplificazione computazionale. Come ora vedremo.

[54] La formula viene da

$$100 \cdot ...(c\,volte)... \cdot 100 = 50\,000 \cdot ...(q\,volte)... \cdot 50\,000$$

$$100^c = 50\,000^q$$

$$(10^2)^c = 50\,000^q$$

$$10^{2\,c} = 50\,000^q \quad \Big/ \lg$$

$$2\,c \lg 10 = q \lg 50\,000$$

$$2\,c = q \lg 50\,000 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2\,q}$$

$$\frac{c}{q} = \frac{\lg 50\,000}{2}$$

dove la prima equazione rappresenta le diluizioni centesimali che avanzano di 100 volte in 100 volte sulla scala C, e le diluizioni cinquantamillesimali che avanzano di 50 000 volte in 50 000 volte sulla scala Q.

In questo paragrafo, b rappresenta qualunque numero reale che possa essere base di un logaritmo, cioè

$$b > 0 \wedge b \neq 1\,.$$

Un'attenta considerazione di quanto detto finora dà

$$\log_x x = 1,\ \forall x > 0$$

e queste 6:

"exp mangia log e log mangia exp"

$$\lg 10^x = x,\ \forall x \qquad 10^{\lg x} = x,\ \forall x > 0.$$

$$\ln \exp x = \ln \mathrm{e}^x = x,\ \forall x \qquad \exp \ln x = \mathrm{e}^{\ln x} = x,\ \forall x > 0$$

$$\log_b b^x = x,\ \forall x \qquad b^{\log_b x} = x,\ \forall x > 0.$$

Tutte le successive proprietà degli esponenziali ci sono già note dall'Algebra, e alcune proprieà dei logaritmi le abbiamo viste da poco; altre sono nuove.

I logaritmi in 1 valgono 0 e gli esponenziali in 0 valgono 1:

$$\lg 1 = 0 \qquad 10^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\log_b 1 = 0 \qquad b^0 = 1$$

Come già detto

"Trasforma prodotti in somme":

(formule per il *logaritmo del prodotto* ed *esponenziale della somma*)

$$\lg(x\,y) = \lg x + \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$$

$$\ln(x\,y) = \ln x + \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$$

$$\log_b(x\,y) = \log_b x + \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

Come già detto

"Trasforma divisioni in sottrazioni":

(formule per il *logaritmo del quoziente* ed *esponenziale della differenza*)

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad 10^{x-y} = 10^x/10^y$$
$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/e^y$$
$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad b^{x-y} = b^x/b^y\ .$$

"Proprietà "saltativa" del logaritmo della potenza" (nome finto):

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \lg x^\alpha = \alpha \lg x$$
$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \ln x^\alpha = \alpha \ln x$$
$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \log_b x^\alpha = \alpha \log_b x$$

e da quest'ultima discendono tutte le successive proprietà di questo paragrafo, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{n}$.

Come già detto

"Trasforma il passaggio al reciproco nel passaggio all'opposto:"

$$\lg \frac{1}{x} = -\lg x$$
$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$
$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x$$

Come già detto

"Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento:"

$$\lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x$$
$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$
$$\log_b \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_b x$$

e questo si estende alle radici di qualunque indice:

$$\lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x \ .$$

Altri esempi con le proprietà del logaritmo decimale.

$\lg 3 = \lg \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \lg \sqrt[5]{243} \approx$
sostituiamo approssimatamente 243 con 250

$$\approx \lg \sqrt[5]{250} = \frac{1}{5} \lg 250 = \frac{1}{5} \lg \frac{1000}{4} =$$

$$= \frac{1}{5} (\lg 1\,000 - \lg 4) = \frac{3 - 0.6}{5} = 0.48$$

$\lg 6 = \lg(3 \cdot 2) = \lg 3 + \lg 2 \approx 0.48 + 0.3 = 0.78$

$\lg 9 = \lg(3 \cdot 3) = \lg 3 + \lg 3 \approx 0.48 + 0.48 \approx 0.96$ *sigh sigh sigh*
ma per eccesso di approssimazioni quest'ultimo fallisce sul secondo decimale, infatti troviamo con calcolatrice scientifica o WolframAlpha

$$\lg 9 \approx 0.95$$

Adesso abbiamo i logaritmi - in effetti approssimazioni in generale – dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; aggiungiamo

$\lg 0.1 = \lg \frac{1}{10} = -\lg 10 = -1$

e disegniamo un grafico!

14 Esponenziali e logaritmi – III parte

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
Consideriamo il pH della Chimica:

$$-\log_{10} y$$

dove y viene spesso scritto $[H^+]$ e letto *"concentrazione degli H^+"*, ma tutto ciò richiederebbe precisazioni di Chimica di cui qua non ci occupiamo.
A cosa corrisponde la diminuzione di 0,5 nel pH? Con grossolana approssimazione, si esprima infine la soluzione a parole, come "circa dimezzare y" o "circa decuplicare y" o analoghi.

SVOLGIMENTO
(Si sta usando lo standard della virgola decimale).

$$-\log_{10} y - 0{,}5 =$$

ricordando che $x \equiv \log_b b^x$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} 10^{0{,}5} =$$

e osservando che $0{,}5 = \frac{1}{2}$ e ricordando che $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} \sqrt{10} =$$

per algebra delle parentesi

$$= -\left(\log_{10} y + \log_{10} \sqrt{10}\right) =$$

per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$= -\log_{10}\left(y \cdot \sqrt{10}\right)$$

cioè a dire, y viene moltiplicata per $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, e con grossolana approssimazione, come richiesto,

$$\boxed{\text{corrisponde a circa triplicare } y}$$

14.1 Formule di cambiamento di base

Formule di cambiamento di base:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad (55)\ (56) \quad \text{in particolare} \quad = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln x}{\ln b}$$

[55] Anche $= (\log_c x) \cdot (\log_b c)$.
[56] Per il lettore interessato, si ricavano subito anche $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$, e $\log_{1/b} x = -\log_b x$.

da cui $\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}}$ e con la (6) si ottiene questa formula approssimata per la conversione fra logaritmi naturali e decimali

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$$

da cui reciprocamente

$$\lg x \approx 0.4343 \ln x$$

(cioè il logaritmo decimale è *vagamente* la metà del naturale[57] e con maggior precisione il 43% e ancor meglio 43.43%).

$$\left(\text{Le formule esatte sono:} \quad \ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \quad \lg x = (\lg \mathrm{e}) \ln x\right).$$

Esempio$_\mu$

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

costante spesso approssimata a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci: `link->`.

14.2 Calcolo approssimato dei logaritmi

Dato un numero positivo x, lo si esprima in notazione scientifica

$$x = t \cdot 10^n \qquad 1 \leq t < 10$$

e allora vale

$$\lg x = \lg t + n \qquad 1 \leq t < 10 \tag{7}$$

e allora ci basta saper calcolare approssimatamente il logaritmo decimale dei numeri fra 1 e 10.
Questo si può fare in molti modi, in particolare

1) con questa formula

$$\lg t \approx \frac{\sqrt{\sqrt{t}} - 1}{\frac{\sqrt{\sqrt{t}}}{4} + 0.33} \qquad 1 \leq t < 10 \qquad \mathit{errore}^{(58)} < 1\% \tag{8}$$

[57] Entrambe le ultime 2 formule hanno circa $\frac{1}{79\,000}$ di errore relativo.
[58] Errore percentuale rispetto l'esatto.

per esempio con la sezione aurea viene $\lg \varphi \approx 0.209$ (si verifichi)

2) con artifici come quelli usati per i logaritmi di 3, 4, 5...

3) con una calcolatrice scientifica reale

4) con un'app di calcolatrice scientifica virtuale sul telefonino

5) online con WolframAlpha con `Log[`*base*`,`*numero*`]`

6) con le tavole cartacee (non sono affatto obsolete, anzi sono utili perchè mostrano i valori intorno ad uno cercato, cosa che la calcolatrice non fa)

7) con le *logarithm tables* in rete (come sopra)

8) con altre approssimazioni([59])

9) con l'obsoleto *regolo calcolatore*. "gli astronauti (...) si servivano di regoli calcolatori (...) durante le missioni Apollo", da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Regolo calcolatore*.

Per i logaritmi in altre basi si può calcolare il logaritmo decimale con le stesse formule (7) e (8) e poi usare la formula di cambiamento di base $\log_b x = \frac{\lg x}{\lg b}$.

Esercizio$_{\mu 2019}$
Di quanto aumenta il pH se la concentrazione degli H^+ diminuisce del 45%?

Svolgimento.
(Si sta usando lo standard del punto decimale).
Diminuire del 45% significa moltiplicare per 0.55:

$$\mathrm{pH}_{new} =$$

$$= \mathrm{pH}(y \cdot 0.55) = -\lg(y \cdot 0.55) = -\lg y - \lg 0.55 =$$

$$= \mathrm{pH}(y) - \lg(5.5 \cdot 10^{-1}) = \mathrm{pH}_{old} - (-1 + \lg 5.5) \approx$$

[59]Un'approssimazione calcolabile con le sole 4 operazioni e la radice quadrata è

$$\log_{10} x \approx (x^{1/256} - 1) \times 111$$

che su una calcolatrice che operi con almeno 7 cifre (decimali) significative dovrebbe avere non più di 0.004 di errore relativo (cioè 0.4%) e assoluto per $1.1 \le x \le 11$. Naturalmente $x^{1/256}$, si ottiene estraendo 8 volte consecutive la radice quadrata. Per i numeri $y < 1.1$ o $y > 11$, li si moltiplichi per un adeguato 10^m con $m \in \mathbb{Z}$ affinchè l'ottenuto $y = 10^m x$ ricada in $[1.1, 11]$ e poi

$$\log_{10} y = \log_{10}(10^m x) = m + \log_{10} x$$

per esempio $\log_{10} 1265 = \log_{10} 1.265 + 3$.

con la formula approssimata (8) di cui sopra

$$\approx \mathrm{pH}_{old} - (-1 + 0.745) = \mathrm{pH}_{old} - (-0.255) =$$

$$\approx \mathrm{pH}_{old} + 0.26$$

cioè

$$\boxed{\text{il pH aumenta di} \approx 0.26}$$

(Con la calcolatrice ≈ 0.259637).

Il logaritmo compare in varie altre questioni più o meno vicine alla Farmacia. In Spettroscopia, l'*assorbanza* è l'opposto del logaritmo decimale (ovvero il logaritmo decimale del reciproco) della *trasmittanza*:

$$\alpha = -\lg \tau = lg\frac{1}{\tau}$$

(Si veda Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Trasmittanza*).

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

La misura dell'angolo piatto di π radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di 180°, e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ \tag{9}$$

che consente di passare da un sistema all'altro. Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

e un qualche interesse ha anche 1 rad ≈ 57°, e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (9). Quasi mai[60] si scrive *rad*.

[60] Per il lettore interessato, alcuni valori numerici interessanti:

$$\begin{array}{ll}
\frac{\pi}{4} \approx 0.785 & \text{(che di solito useremo nel senso di } \frac{\pi}{4}\, rad \approx 0.785\, rad\text{)} \\
\frac{\pi}{3} \approx 1.05 & \text{(che di solito useremo nel senso di } \frac{\pi}{3}\, rad \approx 1.05\, rad\text{)} \\
\frac{\pi}{2} \approx 1.57 & \text{(che di solito useremo nel senso di } \frac{\pi}{2}\, rad \approx 1.57\, rad\text{).} \\
\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 & \text{(per esempio } \cos\frac{\pi}{4}\text{)} \\
\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866 & \text{(per esempio } \cos\frac{\pi}{3}\text{)} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577 & \text{(per esempio } \tan\frac{\pi}{3}\text{)}
\end{array}$$

15 Esponenziali e logaritmi – IV parte

15.1 Equazioni e disequazioni con exp e log

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 0,\, b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base b positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo se $b > 1$, che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} > \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} > b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 1$$

e tutte similmente con $<$, $\geq$, $\leq$.

Il logaritmo è iniettivo e definito per ogni numero positivo e allora

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_b g(x)$$

cioè si può applicare il logaritmo in qualunque base ad ambo i membri di un'equazione $f(x) = g(x)$ ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni, se $f(x) > 0$ nel suo dominio, oppure $g(x) > 0$ nel suo dominio (è equivalente), in particolare se una delle 2 funzioni è un esponenziale in qualche base eventualmente moltiplicato per una costante positiva, che è il caso più comune nella pratica.

Di più: il logaritmo decimale e quello naturale e ogni logaritmo in base $b > 1$ sono crescenti[61] e allora si può applicarli conservando l'ordinamento:

$$0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \lg f(x) \leq \lg g(x) \quad \textit{e anche con} \;\; <$$

[61] Invece coi logaritmi in base minore di 1 si inverte l'ordinamento:

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \log f(x) > \log g(x)$$

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \log f(x) \geq \log g(x)\,.$$

$$0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \ln f(x) \leq \ln g(x) \quad \textit{e anche con} \;<$$

$$\forall\, b > 1 \quad 0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \log_b f(x) \leq \log_b g(x) \quad \textit{e anche con} \;<$$

Esempio$_\mu$ La successione di Fibonacci, che modellizza l'espansione di una popolazione animale – almeno nelle fasi iniziali – è sì definita per ricorrenza (e solo su $\mathbb{N}$) ma è approssimata con una funzione esponenziale in base la sezione aurea:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \tag{10}$$

per esempio $a_{10} = 55 \approx 55.0036$.
Dopo quanti mesi (se t indicia i mesi) la popolazione raggiunge il valore 135 301 852 344 706 746 049, oppure anzi, uscendo dall'esattezza ideale del problema, un valore $1.35 \cdot 10^{20}$?

Abbiamo l'equaziona approssimata

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n \approx 1.35 \cdot 10^{20} \qquad \Big/ \lg$$

$$\lg\frac{1}{\sqrt{5}} + n\,\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) \qquad \Big/ + \lg\sqrt{5}$$

$$n\,\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5} \qquad \Big/ : \lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5}}{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg 2.23607}{\lg 1.61803}$$

e insomma ci servono i valori (approssimati) dei logaritmi decimali di 3 numeri (fra 1 e 10).
Con l'approssimazione prima vista si ha

$$\approx \frac{20 + 0.130 + 0.35054}{0.2089} \approx 98.04$$

e calcolando con pazienza si troverà che il 98-esimo numero di Fibonacci è proprio 135 301 852 344 706 746 049. (Oppure con WolframAlpha: `Fibonacci[98]`).

Esempio$_\mu$ Il piombo nelle ossa ha un'emivita – supponiamo esponenziale il suo scomparire, com'è ragionevole in questi casi – di (circa) 10 anni. In quanto tempo si riduce del 75%? E del 90%? E del 95%? E del 97%?

La riduzione <u>del</u> 75% è la riduzione <u>al</u> 25%, cioè ai $\frac{25}{100}$ ovvero $\frac{1}{4}$ e allora corrisponde a 2 dimezzamenti: allora ci vogliono 20 anni.

Per il 90% dobbiamo illustrare l'equazione esponenziale in questione, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

e r è una costante positiva[62] che dipende da caso a caso, e in questo caso possiamo calcolarla dall'emivita di 10 anni:

$$u(emivita) \stackrel{DEF}{=} \frac{u(0)}{2} \stackrel{EQ}{=} u(0)\,\mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ : u(0)$$

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ \ln$$

$$\ln\frac{1}{2} = -r\,10\,anni$$

$$-\ln 2 = -r\,10\,anni \quad \Big/ : (-10\,anni)$$

$$r = \frac{\ln 2}{10\,anni}$$

ottenendosi così l'equazione dello scomparire del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

Ora ci si chiede quando sarà ridotto del 90% ovvero al 10%, cioè $u(t) = 0.1\,u(0)$:

$$0.1\,u(0) \stackrel{EQ}{=} u(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \Big/ : u(0)$$

$$0.1 = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \Big/ \lg$$

$$-1 = \lg \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t}$$

$$-1 = -\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t\,\lg \mathrm{e}$$

$$t = \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e}\cdot\ln 2} \approx \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e}\cdot\frac{\lg 2}{\lg \mathrm{e}}} = \frac{10\,anni}{\lg 2} \approx \frac{10\,anni}{0.3}$$

≈ 33.3 anni (valore che, nella pratica, possiamo stare sicuri che verrà riportato come 33 anni).

Si risolvano gli altri quesiti posti associatamente a questo appena risolto. Con 95% si dovrà calcolare $\lg 0.05 = \lg\left(\frac{1}{2}\cdot 0.1\right) = \lg\frac{1}{2} + \lg\frac{1}{10} = -\lg 2 - \lg 10 \approx -0.3 - 1 = -1.3$.

[62] Oppure l'equazione può essere scritta $u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{k\,t}$ con k una costante negativa.

ESERCIZI ED ESEMPI SUI LOGARITMI

Esempio – In farmacia misuriamo l'udito...$_{\mu}$
...cercando di capire l'intensità sonora. L'intensità sonora in decibel è definita sostanzialmente come

$$\text{intensità sonora} := 10\Big(\text{ lg } \frac{\text{energia passante in 1 s per 1 m}^2}{\text{una prefissata energia passante in 1 s per 1 m}^2}\Big)\, dB$$

dove la prefissata energia passante in 1 s per un m^2 è la (piccolissima) $1pW/m^2$. (L'argomento dei logaritmi e degli esponenziali è sempre adimensionale, cioè un numero puro, senza unità di misura: non esiste il logaritmo di 3 metri o 4 secondi).
Allora come funzione dell'energia è del tipo

$$a\ \lg \frac{x}{c} \quad = a\,(\lg x - \lg c) \quad = a \lg x + d \quad (\text{con } d := -a \lg c)$$

(e si faccia ben attenzione a distinguere la soprastante scrittura dalla $a \lg(x + d)$). Il grafico è proprio come quello di $\lg x$, riscalato da a sull'asse delle ordinate e traslato verticalmente di d.

Calcoliamo di quanti decibel aumenta l'intensità sonora raddoppiando l'energia.
Detta E l'energia considerata e $2\,E$ il suo doppio, si ha

$$\text{intensità\_sonora}(2E) - \text{intensità\_sonora}(E) =$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{1pW/m^2} - 10\ \lg \frac{E}{1pW/m^2} =$$

ricordando che $\lg(x/y) = \lg x - \lg y$

$$= 10\Big(\lg(2\,E) - \lg E\Big) = \quad (\text{mentre } \lg(1pW/m^2) \text{ si elide})$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{E} = 10\ \lg 2 \approx 10 \cdot 0.3 = 3$$

cioè **ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento approssimativo di 3 decibel**.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che dev'essere

$$\underline{x > 0}$$

perchè x è argomento di un logaritmo. (Ovviamente $1 + x^2 > 0$ sempre). Ricordando le $\log_b u + \log_b v = \log_b(u\,v)$ e $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$ e $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \qquad \Big/ 10^\wedge \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10; \textit{elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{200\,x}{1 + x^2} = 100 \qquad \Big/ \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2\,x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che è > 0).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ ≈ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2 + 10} + \log_{10} \frac{x^2 + 10}{10^2} = 1$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\underline{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente $\log_{10} 0$). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perchè per $x \neq 0$ gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).
Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10} \left(\frac{x^2}{x^2 + 10} \cdot \frac{x^2 + 10}{10^2} \right) = 1$$

e semplificando

$$\log_{10} \frac{x^2}{10^2} = 1 \quad \Big/ 10^\wedge \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10; \textit{elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{x^2}{10^2} = 10^1 \quad \Big/ \cdot 10^2$$

$$x^2 = 10^2 \cdot 10^1$$

$$x = \pm\sqrt{10^2 \cdot 10} = \pm\sqrt{10^2}\,\sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione $x \neq 0$ ci faccia escludere qualche valore)

$$\boxed{x = \pm 10\sqrt{10} \approx \pm 31.623}$$

oppure con un decimale in meno

$$\boxed{x = \pm 10\sqrt{10} \approx \pm 31.62}$$

ESERCIZIO$_\mu$
$* \approx$ Risolvere l'equazione $4\lg(100\,x) = 9$.
SVOLGIMENTO

$$4\lg(100\,x) = 9 \qquad \Big/ : 4$$

$$\lg(100\,x) = \frac{9}{4}$$

e per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$\lg 100 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg 10^2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg x = \frac{9}{4} - 2$$

$$\lg x = \frac{9-8}{4}$$

$$\lg x = \frac{1}{4} \qquad \Big/ 10^\wedge$$

$$x = 10^{\frac{1}{4}}$$

ovvero

$$\boxed{\sqrt[4]{10} \approx 1{,}778\,28}$$

(La radice quarta si calcola con la calcolatrice come radice quadrata della radice quadrata: $\sqrt[4]{z} = \sqrt{\sqrt{z}}$)

IV – Statistica descrittiva

Citazione

Leggiamo in "Matematica per le scienze della Vita"([63]):

> Capire i dati è un processo che richiede diversi passi:
>
> 1. raccogliere i dati;
> 2. riassumere dati;
> 3. analizzare i dati;
> 4. interpretare i risultati e presentarli.
>
> (...) La fase 2 del processo (riassumere i dati) è quella della "statistica descrittiva", in cui l'obiettivo è di astrarre dai dati alcune proprietà per poterli meglio interpretare.
> (...) La fase 3 del processo coinvolge tipicamente l'area della"statistica inferenziale", che consiste nella stima dei parametri e nel testare le ipotesi.

[63]Di Erin N. Bodine, Suzanne Lenhart, Louis J. Gross, a cura di Gabriella Caristi, Maurizio Mozzanica, Giacomo Tommei, 2017, UTET Università, titolo originale Mathematics for the Life Sciences, trad. Patrizia Ferreri

16 Introduzione alla Statistica Descrittiva

La Statistica Descrittiva si occupa essenzialmente della
rilevazione
e sintesi
di dati. È cosa ben diversa, più semplice e storicamente antica, dalla Statistica Inferenziale che verrà trattata fra le Matematiche dell'Incertezza.

In una trattazione elementare della Statistica Descrittiva non si distingue fra *popolazione* e *campione*: abbiamo i dati che abbiamo, e quelli consideriamo popolazione, anche se in effetti sono un campione di una popolazione più ampia. La distinzione diventa invece essenziale nella Statistica Inferenziale.

In questo testo elementare, tralasciata la questione della rilevazione materiale dei dati. E in questo capitolo **verrà trattata solo la sintesi** dei dati, ovvero la rappresentazione dei dati in una forma umanamente comprensibile e *trattabile*, cosa particolarmente utile se i dati sono più di una dozzina.
Si vuole riassumere i dati con 1 diagramma oppure 1 o pochi valori, per

comprenderli

confrontarli ← cosa fondamentale per i farmaci

divulgarli

e, a livello eticamente discutibile, presentarli manipolativamente (cosa che viene fatta amplissimamente: un fenomeno in *diminuzione* si trova sempre come presentarlo, almeno a livello di titolo riassuntivo, come *aumento*, se si vuole, usando artifici statistici formalmente legittimi).

L'insieme dei dati $x_1, ..., x_n$ (che spesso sono numeri ma non sempre) si chiama *dataset* e non è un insieme in senso matematico perchè le ripetizioni dei valori sono ammesse e non vanno elise.

Si considerano dataset, via via più trattabili matematicamente,
• *nominali*: integro, spezzato, spezzato, bifido, integro, integro...

- *ordinali*: per esempio, per valutare un farmaco antidepressivo:
  morte
  grande peggioramento
  medio peggioramento
  lieve peggioramento
  stabile
  lieve miglioramento
  medio miglioramento
  grande miglioramento
- *numerici*: 3, 1, 2, 4, 6, 1000, 6

Anche nei dataset ordinali si potrà fissare una corrispondenza con numeri, ma non avrà alcun senso fare la media fra 3 soggetti con: lieve miglioramento, medio miglioramento, morte. Se invece la "perdita infinita" viene esclusa, una media in qualche modo si potrà anche fare, con opportuna trasformazione in valori numerici. (E alla fin fine – di necessità in virtù – qualcosa riusciranno a fare anche con la perdita infinita).

Fra le variabili nominali si distinguono quelle *dicotomiche* ovvero *binarie*, con 2 soli valori, come vivo/morto, successo/fallimento, 0/1: Link->

Considereremo 2 capitoli della Statistica Descrittiva:
◇ le *rappresentazioni grafiche*: Lezioni 17 e 18;
◇ le *statistiche di sintesi*, funzioni $f(x_1, ..., x_n)$ con un numero n a priori indeterminato di argomenti. Inizieremo da queste.

Ecco alcune statistiche di sintesi per un dataset:
- il minimo: $\min(x_1, ..., x_n)$ ← per un dataset almeno ordinale;
- il massimo: $\max(x_1, ..., x_n)$ ← per un dataset almeno ordinale;
- la somma: $x_1 + ... + x_n$ ← per un dataset numerico.

Il significato delle soprastanti statistiche di sintesi è ovvio. Si calcolino quei 3 valori per questo dataset: $\frac{1}{\pi}$, $\frac{2}{7}$, 0.3, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, e, e^{-1}, $\frac{1}{3}$.

Per esempio (ipotetico, di farmacologia veterinaria) è immensamente più significativo dire che fra 100 000 ostriche sono state trovate perle con un minimo di 0 e un massimo di 4 in ogni esemplare per un totale di 41 320 perle, piuttosto che elencare il numero di perle 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1... di ciascuno degli esemplari. Abbiamo riassunto 100 000 numeri con 3, minimo massimo e somma, e capiamo perfino meglio la situazione che con pagine di numeri! E soprattutto possiamo meglio *confrontarla* con la situazione di un'altra vasca di 100 000 ostriche, magari nutrite/trattate diversamente, che analogamente riassumeremo con quei 3 indici.

Più in dettaglio considereremo queste altre statistiche di sintesi:
• gli indici di posizione:
◦ quelli che vorrebbero riassumere in 1 solo valore "medio" il complesso dei dati, e saranno l'argomento di questa Lezione 16;
◦ quelli che vorrebbero riassumere in 5 valori o corrispondentemente 1 diagramma il complesso dei dati, Lezione 18;
• gli indici di dispersione ovvero variabilità, Lezione 19, che vorrebbero quantificare con 1 numero la non omogeneità di dati numerici.
⋄ Esiste anche 1 indice numerico, la *skewness*, che con una complicata formula misura quantitativamente l'asimmetria dei dati, che però noi tratteremo solo qualitativamente.
Ed esistono altri indici che non tratteremo (come la *curtosi*).

16.1 Medie aritmetica e geometrica

Media (aritmetica). Da ora consideriamo un dataset $\{x_1, ..., x_n\}$.

$$M(x_1, ..., x_n) := \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Facile e bello, ottimo per i voti, ma il reddito medio di questi

$$3, 1, 2, 4, 6, 1000, 6$$

è 146, non poi così espressivo della situazione globale, a causa dell'*outlier* 1000, valore anomalo ovvero aberrante.

Tratteremo in seguito la questione dei valori anomali ma anticipiamo che talvolta vengono semplicemente *eliminati*.

Media geometrica. Per n numeri positivi (invece la media aritmetica non lo richiede), è la radice n-esima del loro prodotto:

$$GM(x_1, ..., x_n) := (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} .$$

Nell'esempio numerico soprastante ≈ 7.05.
Alcuni Autori ritengono che la media geometrica sia meno sensibile agli outlier della media aritmetica, ma questo non può essere affermato con certezza matematica, dipende da ogni singolo dataset.
Riguardo alle applicazioni non lontane dalle Scienze Biomediche, leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Geometric mean":

> starting from 2010 the United Nations Human Development Index did switch to this mode of calculation, on the grounds that it better reflected the non-substitutable nature of the statistics being compiled and compared:
>
> > The geometric mean decreases the level of substitutability between dimensions [being compared] and at the same time ensures that a 1 percent decline in say life expectancy at birth has the same impact on the HDI as a 1 percent decline in education or income. Thus, as a basis for comparisons of achievements, this method is also more respectful of the intrinsic differences across the dimensions than a simple average.

In pratica, se un Paese porta l'aspettativa di vita da 40 a 60 anni, questo verrà ben rilevato facendo la media geometrica con il reddito pro-capite; se invece si facesse la media aritmetica, l'incremento di reddito da 4 000 a 4 040 dollari peserebbe di più: l'incremento è di 40 invece che 20, ma è solo l'1%, mentre da 40 a 60 è del 50%. La media geometrica appare migliore quando dobbiamo riassumere dati che variano su scale molto diverse. E anche in altri casi.

Media (aritmetica) ponderata (o pesata). Dati dei *pesi* $a_1, ..., a_n$, di somma 1, la media pesata del dataset $\{x_1, ..., x_n\}$ è $a_1 x_1 + ... + a_n x_n$.
(Detto semplificatamente) pesi a_k maggiori di $\frac{1}{n}$ sono associati a dati che si vuol far "pesare" di più nella considerazione finale.

Per esempio nella media pesata

$$0.4\, voto\_Matematica + 0.4\, voto\_Chimica + 0.2\, voto\_Marketing$$

il voto nell'esame di Marketing pesa/conta metà di ciascuno degli altri voti.

Per il lettore interessato: esistono varie altre "medie".

16.2 Mediana, moda, media interquartile↑

Mediana. Il numero centrale dei dati riordinati, adesso 4: $1, 2, 3, \underline{4}, 6, 6, 1000$. E se i dati sono in numero pari, si considera la media dei 2 centrali. La mediana è definita anche per valori *ordinali*.

Moda. Il valore più frequente. Nel nostro esempio è 6 ma in generale non è definita perchè i numeri sono tutti diversi o perchè 2 o più valori sono ripetuti ugualmente. Ecco per esempio un dataset *bimodale*: $6, 6, 6, 6, 7, 7.5, 7.5, 8, 8, 8, 8, 8.5, 8.5, 9, 9.5, 10, 10$.
La moda è definita anche per dati *nominali*, neppure ordinali, per esempio in ogni nazione c'è un cognome più frequente.

Nota. Media, mediana e moda sono 3 valori che possono presentarsi in qualunque ordine fra loro: dipende dal dataset.

Media interquartile. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Central tendency:

> The method is best explained with an example. Consider the following dataset:
> 5, 8, 4, 38, 8, 6, 9, 7, 7, 3, 1, 6
> First sort the list from lowest-to-highest:
> 1, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 38
> There are 12 observations (datapoints) in the dataset, thus we have 4 quartiles of 3 numbers. Discard the lowest and the highest 3 values:
> ~~1~~, ~~3~~, ~~4~~, 5, 6, 6, 7, 7, 8, ~~8~~, ~~9~~, ~~38~~
> We now have 6 of the 12 observations remaining; next, we calculate the arithmetic mean of these numbers:
> xIQM = (5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8) / 6 = 6.5
> This is the interquartile mean.
> For comparison, the arithmetic mean of the original dataset is
> (5 + 8 + 4 + 38 + 8 + 6 + 9 + 7 + 7 + 3 + 1 + 6) / 12 = 8.5
> due to the strong influence of the outlier, 38.

Con artifici si definisce per un numero di dati non quadruplo.

Detto grezzamente, consideriamo il reddito medio delle persone medie, al netto di mendicanti e ricconi, che quelli ci sono comunque dappertutto.

ES. 2$_{\mu 2019}$
≈ Il carbonio risulta avere – almeno secondo alcuni Autori: non possiamo qua garantirlo in forma assoluta e fare Chimica o Fisica; si veda Wikipedia in inglese alla voce *Isotopes of carbon* – 12 isotopi non reperibili in natura (oltre a 3 reperibili in natura) con queste emivite approssimative:

$3,5 \times 10^{-21}$ s, 126,5 ms, 19,3 s, 20,364 min, 2,45 s, 0,747 s,
193 ms, 92 ms, 46,2 ms, 16 ms, $<$30 ns, 6,2 ms.

Dopo aver convertito minuti, millisecondi e nanosecondi in secondi con le note formule

1 min=60 s, 1 ms=0,001 s, 1 ns=$0,000\,000\,001$ s,

determinare la media interquartile delle emivite.

SVOLGIMENTO

Con la conversione in secondi le emivite sono, nell'ordine iniziale dei dati,

$3,5 \times 10^{-21}$ s, 0,126 5 s, 19,3 s, $1\,221,84$ s, 2,45 s, 0,747 s,

0,193 s, 0,092 s, $0,046\,2$ s, 0,016 s, $< 0,000\,000\,030$ s, $0,006\,2$ s.

Ovvero, in ordine crescente, omettendo l'unità di misura,

$3,5 \times 10^{-21}$ → questo e il seguente potrebbero doversi scambiare

$< 0,000\,000\,030$ → vedi nota alla linea precedente

$0,006\,2$

$0,016$

$0,046\,2$

$0,092$

0,126 5

0,193

$0,747$

$2,45$

$19,3$

$1\,221,84$.

I 12 valori ordinati sono 4 terne di valori, ed eliminate la prima terna (coi valori più bassi) e l'ultima (coi valori più alti), i 6 valori centrali sono

$0,016$

$0,046\,2$

$0,092$

0,126 5

0,193

$0,747$

e la loro media è il valore cercato, la media interquartile, in secondi:

$$\text{IQM} = \frac{0,016 + 0,046\,2 + 0,092 + 0,126\,5 + 0,193 + 0,747}{6} = \frac{1,220\,7}{6} =$$

$$\boxed{\approx 0,203 \text{ s}}$$

(IQM (acronimo di InterQuartile Mean) è un simbolo classicamente usato per la media interquartile; anche iqm e x_{IQM}).

Nota 1. Se veramente siamo interessati a produrre

(1) un valore in qualche modo "medio" dei dati

(2) che prescinda dai casi/valori *eccezionali*

allora

- mediana e

• media interquartile
– sono decisamente valide
+ ma solo la mediana è *sempre* facilmente calcolabile
$\ast$ invece la media aritmetica richiede di escludere gli outlier:
$\diamond$ se i dati sono pochi si può fare a mano ma lasciandoci dubbi
$\diamond$ se i dati sono moltissimi non si può proprio fare a mano però
> si può fare informaticamente con varie regole che definiscono gli outlier, ma in diversi modi a seconda degli Autori.

Nota 2. Non ci si illuda: non esiste alcun tipo di statistica di sintesi che riassuma bene con 1 solo numero **ogni** dataset, neppure in assenza di outlier. Spesso la mediana rappresenta bene il soggetto "tipico", ma non sempre: in un cortile con 6 cani e 6 galline, la media e la media interquartile e la mediana del numero di zampe per animale è 3. Che non rappresenta alcun caso tipico. (E la media geometrica è ≈ 2.83, di male in peggio). Nemmeno l'*unimodalità* rappresenta una garanzia per la mediana, pur in generale così valida: con 1 grillo, 5 cani e 6 galline

$$6,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2 \quad (\mathit{moda} = 2)$$

la mediana è ancora 3.

Nota 3. WolframAlpha calcola online
la media con `mean` seguito dalla lista di numeri: `link->`
la mediana con `median` seguito dalla lista di numeri: `link->`
la media geometrica con `geometricmean` seguito dalla lista di numeri: `link->`

ESERCIZI SULLA LEZIONE 16

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast$ Considerato il seguente dataset

$$19.68\ 19.20\ 19.63\ 18.94\ 18.81\ 18.10\ 18.63\ 18.85\ 0.01\ 19.51\ 19.54$$

che possiamo supporre misurazioni di parametri corporei, si determini la mediana dopo avere eliminato un outlier.

SVOLGIMENTO
Chiaramente 0.01 è l'outlier preannunciato. (Potrebbe ragionevolmente provenire da un momentaneo malfunzionamento di una macchina che ha prodotto i dati).
I 10 dati rimanenti riordinati in modo crescente sono

$$18.10\ 18.63\ 18.81\ 18.85\ 18.94\ 19.20\ 19.51\ 19.54\ 19.63\ 19.68.$$

I 2 centrali ovvero mediani sono il 5° e il 6°, eliminando 4 da ogni parte:

$$18.94 \quad 19.20$$

la cui media aritmetica è il risultato cercato:

$$\boxed{19.07}$$

(Se non si eliminasse l'outlier – talvolta non è poi così evidente che qualche valore vada scartato – la mediana sarebbe alquanto simile, 18.94, mentre nei 2 casi le medie aritmetiche sono molto più diverse fra loro, rispettivamente 19.089 e 17.3536; la mediana ha il pregio di risentire poco degli outlier, il che in casi complessi con migliaia o milioni di dati, e magari nessuna certezza su quanti e quali sarebbero da considerare outlier, è molto significativo).

17 Bar chart, istogrammi, e altri diagrammi

17.1 Diagrammi a torta

Il *diagramma a torta* ha un ovvio significato: gli angoli o equivalentemente le aree sono proporzionali contemporaneamente ai valori assoluti o alle frazioni percentuali da rappresentare. (La proporzionalità agli uni è equivalente alla proporzionalità alle altre). Si veda in questo `link->` un diagramma a torta di interesse farmaceutico coi valori assoluti riportati (le percentuali no, sono lasciate all'occhio del lettore che vede le fette della torta; può essere un'utile esercizio calcolarne qualcuna).
(Più complessa è la situazione in cui oltre alle percentuali relative a 2 o più casi, il che necessita di 2 diagrammi a torta, si voglia rappresentare anche un altro dato per ciascuno dei casi, e allora si faranno diagrammi a torta di diverse dimensioni).
Gli angoli si misurano col goniometro; ma anche a occhio si può fare qualcosa. Il diffuso software Excel fa i diagrammi a torta.
Funzionano veramente bene solo se i valori da rappresentare sono molto pochi, e specialmente se sono molto diversi fra loro. Spesso si raggruppano in una classe denominata "altro" i valori più piccoli.
Si evitino come la peste gli ingannevoli diagrammi a torta tridimensionali in rappresentazione prospettica.

17.2 Istogrammi a barre o bar chart, e istogrammi

I diagrammi a colonne ovvero bar chart ovvero istogrammi a barre, e gli istogrammi – purtroppo con ambiguità nominalistiche nei vari testi – sono diagrammi per la visualizzazione di dati. **Nei bar chart l'altezza di ogni colonna – o la lunghezza se disposta orizzontalmente – rappresenta un valore, negli istogrammi l'area** rappresenta un valore.

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$

≈ In un articolo scientifico[64] della rivista Neuropsychopharmacology leggiamo

> Patients were treated two to three times per week with high-frequency MST (i.e., 100 Hz) (N=24), medium frequency MST (i.e., 60 or 50 Hz) (N=26), or low-frequency MST (i.e., 25 Hz MST) (N=36)

Si disegni un istogramma a barre (bar chart) coi valori N_i denominando N l'asse delle ascisse, con barre denominate (lo si scriva entro esse)

high-frequency MST

medium frequency MST

low-frequency MST
e all'estremità di ogni barra si scriva la frequenza relativa, cioè N_i/N_{tot}, espressa percentualmente, con 1 decimale.

- Considerato il dataset

$$2, 3, 1, 4, 1, 5, 3, 4, 7, 1, 2, 4, 5, 9, 4, 8$$

se ne rappresenti il bar chart. Poi si rappresenti l'istogramma con intervalli $[0, 2.5[$, $[2.5, 5[$, $[5, 7.5[$, $[7.5, 10[$, e poi con intervalli $[0, 2.5[$, $[2.5, 5[$, $[5, 10[$.

17.3 Eventuali asimmetrie nei dataset: skewness

Una distribuzione coi dati più "addensati" verso i valori bassi che quelli alti si dice *right skewed*, e si intuisce com'è una distribuzione *left skewed*. (Queste *non* sono definizioni rigorose[65] ma permettono di decidere nella generalità dei casi non particolarmente "capricciosi").
Si provi con un diagramma a colonne coi dati
12.2 20%,
12.4 30%
12.6 25%
12.8 12.5%
13.0 5%

[64] *Magnetic seizure therapy (MST) for major depressive disorder*, Neuropsychopharmacology (5 September 2019), Zafiris J. Daskalakis, Julia Dimitrova, Shawn M. McClintock, Yinming Sun, Daphne Voineskos, Tarek K. Rajji, David S. Goldbloom, Albert H. C. Wong, Yuliya Knyahnytska, Benoit H. Mulsant, Jonathan Downar, Paul B. Fitzgerald & Daniel M. Blumberger

[65] Il lettore interessato cercherà sulla rete la *formula*, piuttosto complessa, che quantifica la skewness.

13.2 7%
13.4 3.5%
13.6 2%

17.4 Funzioni a campana varie

Facendo un bel po' di istogrammi a barre di dati presi dalla realtà sensibile, si troverà che spesso le barre si dispongono a formare più o meno una campana.

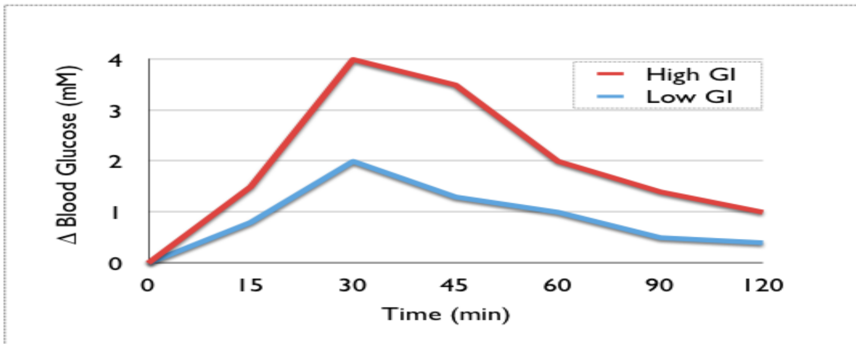
Praticamente dietro quasi ogni fenomeno della realtà sensibile c'è in qualche modo una funzione più o meno a campana. Imparare a riconoscere queste configurazioni a campana aumenta enormemente la comprensione della realtà.

La campana può avere 2 significati principali: una densità, la classica
"distribuzione più o meno a campana",
coi suoi casi estremi rari e quelli medi più comuni,
oppure,
se in ascissa abbiamo il tempo, talvolta rappresenta (quantitativamente) la classica
"parabola della vita",
valida anche per una comunità microbica, per la potenza dell'Impero Romano, per la concentrazione di un farmaco immesso nel sangue, il numero di malati in un'epidemia, o quant'altro: sorgere, ascendere, declinare, finire.

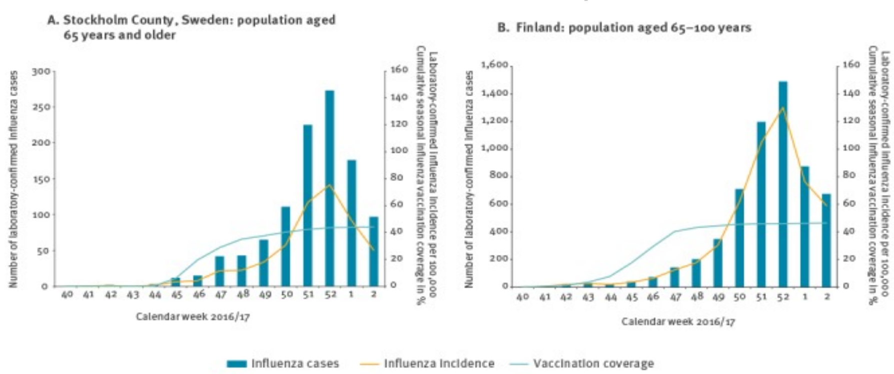
Qua stiamo parlando di curve "più o meno a campana" mentre con "curva a campana" *di solito* si intende proprio la *campana gaussiana*, grafico della *densità normale standard* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, la forma più “pura” di curva a campana del primo tipo.

Curve più o meno a campana del primo tipo, cioè densità, (della Microbiologia) sono in questo link->.

Curve più o meno a campana del secondo tipo, cioè evoluzioni di una quantità nel tempo, sono in questa figura.(66)



Altre, relative ad epidemie di influenza, sono queste(67)



Un’altra, (della Microbiologia) è in questo link-> e un altro (della Farmacocinetica) in questo link-> e un altro a pagina 44 di questo link->.

Leggiamo nel Fedone, XXXIX (IV secolo a.C.), di Platone, citato in Wikipedia,

[66] Immagine di pubblico dominio tratta da Wikimedia Commons.

[67] Tratte da Mid-season real-time estimates of seasonal influenza vaccine effectiveness in persons 65 years and older in register-based surveillance, Stockholm County, Sweden, and Finland, January 2017. Euro Surveill. 2017 Feb 23;22(8). pii: 30469. doi: 10.2807/1560-7917.ES.2017.22.8.30469. By Hergens MP et al. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5356437/. “This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) Licence. You may share and adapt the material, but must give appropriate credit to the source, provide a link to the licence, and indicate if changes were made.” LINK->

l'enciclopedia libera, alla voce *Variabile casuale*:

> Credi forse che sia tanto facile trovare un uomo o un cane o un altro essere qualunque molto grande o molto piccolo o, che so io, uno molto veloce o molto lento o molto brutto o molto bello o tutto bianco o tutto nero? Non ti sei mai accorto che in tutte le cose gli estremi sono rari mentre gli aspetti intermedi sono frequenti, anzi numerosi?

Nota. Naturalmente nelle Scienze Applicate ricorrono anche grafici ben lontani dall'avere una forma a campana, pur così ubiqua. Già abbiamo visto sigmoidi e sinusoidi... Ma la realtà sensibile è ancora più ricca, per esempio si veda il grafico a questo `LINK->`.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 17

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
[*disegno*] In relazione all'elemento sodio (Na), definite le cellule
ipo-sodiche: con contenuto di sodio fra 0 e $<$ 1 000 unità
normo-sodiche: con contenuto di sodio fra 1 000 e $<$ 10 000 unità
iper-sodiche: con contenuto di sodio fra 10 000 e $<$ 20 000 unità
(unità che non specifichiamo, essendo ininfluente) un macchinario esamina 52 000 cellule (tutti numeri arrotondati per semplicità) trovandovi
6 000 ipo-sodiche, 36 000 normo-sodiche, 10 000 iper-sodiche.
Rappresentare la situazione con un istogramma. (Non è il bar chart).

SVOLGIMENTO
Nell'istogramma – che purtroppo alcuni Autori scambiano col bar chart ma qua veniamo avvertiti della differenza – le grandezze sono proporzionali alle aree dei rettangoli (invece nei bar chart alle lunghezze delle aste, eventualmente strisce rettangolari).
Avremo quindi 3 rettangoli, con basi che si estendono su un asse orizzontale
da 0 a 1000 lunga 1 000
da 1 000 a 10 000 lunga 9 000
da 10 000 a 20 000 lunga 10 000.
(Non vi è alcuna questione problematica fra valori compresi o esclusi).
Le altezze le otteniamo dividendo le aree
6 000, 36 000, 10 000 (o numeri ad essi rispettivamente proporzionali)
per le lunghezze delle basi corrispondenti, ottenendo:
6 unità
4 unità
1 unità
Come unità si può prendere per esempio 1 centimetro, o su carta a quadretti 1 o 2 o 3 quadretti, o anche altre unità.
Ecco l'istogramma, coi 3 rettangoli ed una legenda:

```
A--------------------
A-------------------- A=ipo-sodiche, 6 000
ABBBBBBBBB----------- B=normo-sodiche, 36 000
ABBBBBBBBB----------- C=iper-sodiche, 10 000
ABBBBBBBBB-----------
ABBBBBBBBBCCCCCCCCCCC
!!-------!----------!
0 1000   10000      20000
```

• Considerato il dataset $\sin\left(k\frac{\pi}{6}\right)$, $k = 0, ..., 10$, se ne rappresenti ll bar chart. Poi si rappresenti l'istogramma delle frequenze dei valori con intervalli $[0, 0.3[$, $[0.3, 0.6[$, $[0.6, 0.9[$, $[0.9, 1.2[$, e poi con intervalli $[0, 0.6[$, $[0.6, 0.9[$, $[0.9, 1.2[$.

- Si rappresenti il diagramma a torta per questa situazione:
  tifosi dei Gialli: 66
  tifosi dei Neri: 132
  tifosi dei Blu: 198.

18 Quartili e box-plot

Vogliamo riassumere molti numeri in un modo più ricco rispetto alla sola media: aggiungeremo 4 numeri, o, corrispondentemente, con essi faremo 1 diagramma.

18.1 Quartili e riassunto dei 5 numeri

Si abbia il dataset numerico $x_1, .., x_n$ e lo si riordini in modo crescente: $y_1, ..., y_n$ *sono gli stessi numeri ma in ordine crescente*.

Il valore intermedio,

o la media dei 2 intermedi se n è pari,

sappiamo che è la mediana,
che da adesso chiameremo anche *secondo quartile*,
e lo indicheremo con

$q_{0.5}$ oppure

$q_{1/2}$ oppure

$q_{50\%}$.

Diviso così il dataset in 2 parti uguali,
la mediana della prima parte si chiama *primo quartile*,

e lo indicheremo con $q_{1/4}$ oppure

$q_{0.25}$ oppure

$q_{25\%}$,

e la mediana della seconda parte si chiama *terzo quartile*,

e lo indicheremo con $q_{3/4}$ oppure

$q_{0.75}$ oppure

$q_{75\%}$.

Si ha poi il quartile di indice 0, che è il minimo del dataset,

q_0 oppure

$q_{0\%}$

e quello di indice 1, che è il massimo del dataset:

q_1 oppure

$q_{100\%}$

Si hanno così 5 quartili. Ma purtroppo la loro definizione non è perfettamente univoca nei vari testi e software[(68)] e inoltre, di fatto, spesso si trova denominato *quartile* l'insieme di valori *fra* 2 quartili – come sopra definiti – e in questo senso, i quartili sono 4.

I 5 numeri detti, $q_{0\%}$,...,$q_{100\%}$, sono una statistica di sintesi (vettoriale[(69)]) che si chiama *riassunto dei 5 numeri* (o *five number summary*).

Due esempi tratti da Wikipedia, l'enciclopedia libera, riscritti:

per un dataset $x_1, ..., x_{10}$, riordinato in $y_1, ..., y_{10}$,
i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, $\frac{y_5+y_6}{2}$, y_8, y_{10};

per un dataset $x_1, ..., x_{11}$, riordinato in $y_1, ..., y_{11}$,
i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, y_6, y_9, y_{11}.

Applicazione: un valore è tanto o poco? Secondo Scimago, la rivista scientifica *Journal of Pharmacy and Pharmacology* ha – in un determinato momento – l'H index, che è un indicatore bibliometrico, di 107: è tanto o poco? Se avessimo la lista di tutte le riviste scientifiche catalogate per Pharmacology da Scimago, e ciascuna col suo H index, avremmo la risposta, salvo che sarebbe scarsamente leggibile per eccesso di numeri. Un riassunto dei 5 numeri ci permetterebbe di contestualizzare bene quel valore 107. Scimago fa una cosa del genere, magari non esattamente con l'H index (usa un suo indice interno, il *SCImago Journal Rank* ovvero *SJR indicator*) ma la sostanza è la stessa. Salvo che chiama primo quartile quello più alto, cioè dal terzo quartile (numero) al quarto quartile (numero). Scopriamo così che la rivista considerata, per la disciplina scientifica Pharmacology è solo nel terzo quartile nel 2018, non poi così bene (e invece per la categoria Pharmaceutical Science è nel secondo, molto meglio). Invece la rivista *British Journal of Pharmacology* risulta nel primo quartile, il migliore, dal 1999 al 2018.

[68] Leggiamo in questo link accademico: "Molti software hanno diversi algoritmi per calcolare i quantili."

[69] *Vettoriale* perchè produce una cinquina di numeri e non un solo numero. È solo una questione definizionale.

18.2 Box-plot ovvero diagramma a scatola e baffi

Il *box-plot* ovvero *diagramma a scatola e baffi* è un diagramma molto usato in ambito Biomedico per rappresentare tutti i quartili di un dataset, ovvero il riassunto dei 5 numeri.

Iniziamo vedendo sulla rete alcuni esempi di pertinenza delle Scienze Mediche e Farmaceutiche seguendo questo `link->`, con immagini tratte da PubMed.

Precisiamo subito che di questa rappresentazione grafica
• esistono varianti, sulla lunghezza dei "baffi"(70), ma non solo(71)
• considereremo (quasi) solo la versione più semplice
• chi pubblica un box plot dovrebbe specificare(72) i dettagli su come intenderlo.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Diagramma a scatola e baffi":

> il diagramma a scatola e baffi (o diagramma degli estremi e dei quartili o box and whiskers plot o box-plot) è una rappresentazione grafica [...] Viene rappresentato (orientato orizzontalmente o verticalmente) tramite un rettangolo diviso in due parti, da cui escono due segmenti. Il rettangolo (la "scatola") è delimitato dal primo e dal terzo quartile, $q_{1/4}$ e $q_{3/4}$, e diviso al suo interno dalla mediana, $q_{1/2}$. I segmenti (i "baffi") sono delimitati dal minimo e dal massimo dei valori. In questo modo vengono rappresentati graficamente i quattro intervalli ugualmente popolati delimitati dai quartili.

[70] Si veda per esempio questo link.
[71] Per esempio in questo link vediamo una crocetta: possiamo ragionevolmente ipotizzare che rappresenti un decesso.
[72] Per esempio in questo link leggiamo "the whiskers show the smallest and highest value within 1.5 box lengths from the box", che è una variante comune.

Esercizi$_\mu$ Si disegni il box-plot dei primi 10 numeri primi.
Talvolta gli outlier vengono rappresentati isolati. Si faccia così per il dataset 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,..., $\frac{1}{11}$, $\sqrt{7}$; e poi senza $\frac{1}{11}$.

Su Nature.com, un sito web di altissimo livello per le Scienze Biomediche (e Naturali), seguendo questo `link<--` troviamo una descrizione dei box plot, in cui leggiamo fra l'altro

> Whiskers are conventionally extended to the most extreme data point that is no more than 1.5 è IQR from the edge of the box (Tukey style) or all the way to minimum and maximum of the data values (Spear style).

In questa trattazione abbiamo scelto il secondo dei due standard qua sopra detti, più semplice.
La IQR, che è $q_{0.75} - q_{0.25}$, la vedremo meglio in seguito.

Applicazione. Abbiamo 1000 soggetti ciascuno con 1 valore fisiologico – glicemia, peso, qualunque cosa – su cui vogliamo intervenire, e gli diamo un farmaco. Diciamo, la glicemia.
Una settimana abbiamo 1000 valori nuovi, o piuttosto, in generale – nella realtà concreta – un po' meno (qualcuno può essere morto, o irraggiungibile, o non ne vuole più sapere di noi), diciamo 980.
La media dei valori iniziali e la media dei valori iniziali, certo sono un'indicazione importante.
Per fissare le idee supponiamo che il parametro si voleva diminuirlo.
Supponiamo che la media sia diminuita: bene!
Gli altri 4 numeri ci indicheranno più chiaramente come si è evoluta la situazione. (Del solo parametro controllato, ovvio, e questo è un problema generale della Medicina e della Farmacologia: *cosa* stiamo misurando? La glicemia, la mortalità, il benessere, i soldi... possono variare *indipendentemente*).
Per esempio potremmo avere una situazione iniziale i questo tipo

```
.......-------------!0000000!00000000!---------
```

e una finale di questo primo tipo o quest'altro tipo:

```
........------------!000000!0000000!------
.....-------------!00000000!00000000000!-----------
```

con media ridotta e valori addensati nel primo caso

oppure

con media ridotta ma valori diradati nel secondo caso.

Non faremo qua Medicina, ma è ovvio che la seconda può essere pericolosa, nonostante il miglioramento della media.
Si noti – e questo è un problema generale – che molta parte di verità può sfuggirci nascosta nei soggetti che non abbiamo potuto misurare la seconda volta. Si potrebbe dire: bene, nel primo diagramma rappresentiamo solo i soggetti di cui abbiamo anche la seconda misurazione. Sì, ma il problema resta, perchè la mancanza della seconda misurazione potrebbe essere causata in tutto o in parte proprio dal farmaco: morte, irreperibilità per cure all'estero, grave delusione del soggetto. (In parte, è il problema dei *morti per altra causa*).

Si vuole sperare che lo studente abbia apprezzato i riferimenti a Wikipedia, PubMed, Nature... (Si pensi che qualche decennio fa, internet non c'era...)

ESERCIZI SULLA LEZIONE 18

Esercizio$_\mu$ Si disegni il box-plot del dataset

$$x_k := \frac{1}{\pi - k} \qquad 1 \leq k \leq 11$$

rappresentando con un pallino l'outlier, escludendolo quindi dal calcolo del massimo. Similmente poi con $1 \leq k \leq 12$.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Nelle successive 3 formule, si noti che bisogna conosce il valore esatto di una grandezza considerata.

Si definiscono

$$\text{errore assoluto [rispetto l'esatto]} := |approx - esatto|$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} := \frac{|approx - esatto|}{esatto}$$

$$\text{errore percentuale [rispetto l'esatto]} :=$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} :=$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto] [in forma percentuale]} :=$$

$$\frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

Quest'ultimo errore relativo, e quello della seconda formula, sono lo stesso numero, ma espresso in 2 modi diversi.

Nelle Scienze Applicate ci vorrà grande cautela nell'applicare queste 3 formule perchè i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*.

Esempio$_\mu$ All'inizio i 46 cromosomi umani furono erroneamente conteggiati come 44.

$errore\ assoluto\ [rispetto\ l'esatto] :\ 2$

$errore\ relativo\ [rispetto\ l'esatto] :\ \frac{1}{23}$

$errore\ percentuale\ [rispetto\ l'esatto] : \approx 4.3\%$ (diciamo pure 4%).

Esempio$_{\mu}$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore percentuale

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|3.14 - \pi|}{\pi} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14 - 3.14159265...|}{3.14159265...} \cdot 100\% \approx$$

$$\approx \frac{|3.14 - 3.14159265|}{3.14159265} \cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

19 Variabilità, covarianza e correlazione

19.1 Indici di dispersione ovvero variabilità

[...] seconno le statistiche d'adesso
risurta che te tocca un pollo all'anno:
e, se nun entra nelle spese tue,
t'entra ne la statistica lo stesso
perchè c'è un antro che ne magna due. [Trilussa]

Gli indici dispersione ovvero variabilità cercano quantificare con 1 numero la non omogeneità di dati numerici. Sono statistiche di sintesi $f(x_1, ..., x_n)$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, con n a priori indeterminato, proprio come le varie medie, viste in precedenza. È ovvio che dataset diversi possono avere diversi gradi di "disomogeneità", che vogliamo quantificare, anche se hanno la stessa media e/o mediana. Per esempio i 2 dataset, qua già ordinati,

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \qquad 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

hanno uguale media, e perfino mediana, sempre 8, ma è chiaro che i valori del secondo dataset variano meno, ovvero sono più addensati intorno alla media. Si pensi a dei redditi$^{\nearrow}$ per esempio.

Campo di variazione, o *range*.

$$range(x_1, ..., x_n) := \max(x_1, ..., x_n) - \min(x_1, ..., x_n)\,.$$

Che vale 12 e rispettivamente 6 nei 2 dataset considerati.
Il range è molto sensibile agli eventuali outlier.

Differenza interquartile. Ben poco sensibile agli outlier:

$$iqr(x_1, ..., x_n) := q_{3/4} - q_{1/4}\,.$$

Varianza, deviazione standard, coefficiente di variazione. Detta $\bar{x}$ la media aritmetica del dataset $x_1, ..., x_n$ si definiscono

$$\textit{population variance} \quad \sigma_X^2 = Var(x_1, ..., x_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

$$\textit{population standard deviation}$$

$$\sigma_X = sd(x_1, ..., x_n) := \sqrt{Var(x_1, ..., x_n)} \; \textit{ovvero} \; \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

$$coefficiente\,di\,variazione\,ovvero\,deviazione\,standard\,relativa$$

$$\sigma_X^* = cv(x_1, ..., x_n) := \frac{\sigma_X}{\bar{x}} \quad (\text{che } \nexists \text{ se } \bar{x} = 0)$$

e dell'ultima si può avere la forma percentuale moltiplicando per 100%, ottenendo la *deviazione standard percentuale*.
Alcuni Autori dividono per $|\bar{x}|$ invece che $\bar{x}$.

Si trova scritto sia σ che sd che SD; e sia σ_X^* che cv che CV.

Questi indici sono tutti sensibili agli outlier.

La varianza ha un'unità di misura diversa da quella del dataset.

Si noti il fattore $\frac{1}{n}$ nella varianza, e allora poi negli altri indici da essa dipendenti. Certi testi e software danno $\frac{1}{n-1}$. La questione sarà approfondita in Statistica Inferenziale, ma anticipiamo la questione, peraltro numericamente poco influente per n grande:

> If the values instead were a random sample drawn from some large parent population (for example, they were 8 marks randomly and independently chosen from a class of 2 million), then one often divides by 7 (which is $n-1$) instead of 8 (which is n) in the denominator of the last formula. In that case the result of the original formula would be called the sample standard deviation. Dividing by $n-1$ rather than by n gives an unbiased estimate of the variance of the larger parent population. This is known as Bessel's correction.[73]

Nota. Grande varianza ovvero deviazione standard: valori dispersi.

[73] da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce Standard deviation, in https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation, il 24 ottobre 2019

Piccola varianza ovvero deviazione standard: valori addensati presso la media.

La deviazione standard può essere considerata piccola oppure grande relazionandola alla media.

Per la varianza, esistono varianze più piccole (valori più addensati) o più grandi di altre (valori più dispersi) ma non ha molto senso considerare grande o piccola una singola varianza. Similmente la deviazione standard.

Esempio 1.

> the average height for adult men in the United States is about 70 inches (177.8 cm), with a standard deviation of around 3 inches (7.62 cm).[74]

Esempio 2. In un articolo scientifico[75] hanno confrontato, mediante le deviazioni standard, la variabilità dell'ora dell'andare a dormire con l'ora dell'alzarsi in popolazioni di tipo primitivo, trovando maggior variabilità nel primo orario:

> The SD of sleep onset times exceeded the SD of sleep offset times

Il confronto fra due deviazioni standard di grandezze omogenee è ben sensato.

• Per i dataset visti in precedenza si calcolino i 5 indici sopradetti.

19.2 Covarianza; correlazione; retta di regressione

Dati 2 dataset numerici di uguale numerosità

$$X : x_1, ..., x_n \qquad Y : y_1, ..., y_n$$

si definisce la loro *covarianza* (ovvero *covarianza di 2 n-uple di numeri*, ovvero *covarianza osservata*)

$$Cov(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n) := \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + ... + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{n}$$

[74] da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce Standard deviation, in https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation, il 24 ottobre 2019

[75] "Natural sleep and its seasonal variations in three pre-industrial societies", by Yetish G, Kaplan H, Gurven M, Wood B, Pontzer H, Manger PR, Wilson C, McGregor R, Siegel JM8. Curr Biol. 2015 Nov 2;25(21):2862-2868. doi: 10.1016/j.cub.2015.09.046. Epub 2015 Oct 17.

dove $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono le medie dei 2 dataset. Si trova denotata anche anche $\sigma_{X,Y}$, oppure con *cov*(... minuscolo. Si definisce anche l'*indice di correlazione di [Bravais-]Pearson*, o *indice di correlazione lineare* (e al posto della parola *indice* altri scrive *coefficiente*)

$$\rho_{X,Y} := \frac{Cov(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n)}{\sqrt{Var(x_1, ..., x_n)Var(y_1, ..., y_n)}} \qquad = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

e questo dà un'idea di come varino le y_j relativamente alle x_i: un indice prossimo a 1 suggerisce che al crescere delle x_i crescano linearmente le y_i, un indice prossimo a -1 suggerisce che al crescere delle x_i decrescano linearmente le y_i, e un indice prossimo a 0 indica la non presenza di tali relazioni approssimate. In ogni caso

$$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1 .$$

Coi dataset X : 2, 7, 4, 3, e Y : 3, -1, 0, 2 si calcoli l'indice di correlazione, e si rappresentino sul piano cartesiano i punti (x_i, y_i).
In un senso non banale, una retta $y = mx + q$ si avvicina meglio ai punti se ha coefficienti

$$m := \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2} \qquad q := \bar{y} - m\bar{x} \quad \text{equivalentemente: } m := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{X,Y}$$

e in questo caso si chiama *retta di regressione* (dietro, vi è il *metodo dei minimi quadrati*, che non approfondiamo).
Per esempio per i punti $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, -1)$, ovvero per i dataset X: $2, 1, 3$ e Y: $1, 3, -1$, si trova $y = -2x + 5$, che passa *esattamente* per i punti. è $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 1$, $\sigma_X^2 = \frac{2}{3}$, $\sigma_{X,Y} = -\frac{4}{3}$. E con $y_2 := 3.14159265$ si trova $y \approx -2.07x + 5.19$. Si facciano i disegni.

20 Note finali sulla Statistica Descrittiva

Ad un livello basico, nella Statistica Descrittiva **si vuole riassumere molti valori (*dataset*) con 1 valore o pochi valori, e/o con un grafico (in senso lato)**.
Quest'opera di sintesi non è banale.
Viene fatta per comprendere i dati, divulgarli, confrontarli. Alcuni lo fanno perfino per presentarli manipolativamente; allora noi dovremo attrezzarci conoscitivamente per non essere tratti in inganno.

20.1 Bugie, bugie cattive, e statistica

Da più di un secolo si dice "lies, damned lies, and statistics". Ai numeri si può far dire quel che si vuole o quasi.

Attenzione!

PARTE I – DATI VERI

20.2 La scelta dei parametri. Cosa misurare?

In questa trattazione elementare siamo sempre partiti da dati numerici, ma a monte c'è il problema di quali numeri considerare in una data situazione.

Se consideriamo un quadrato di lato 2 ovvero area 4, e 2 quadrati di lato 5 ovvero area 25, e volessimo rappresentare un "quadrato medio", facendo la media dei lati abbiamo 4 (con area 16), invece facendo la media delle aree abbiamo 18 (con lato $3\sqrt{2} \approx 4.24$).

Qual è il senso di quelle tabelle che mettono ai primi posti il peperoncino per contenuto di vitamina C? Il peperoncino si mangia, eventualmente, a grammi, mica a etti come certa frutta, che, certo, contiene meno vitamina C *all'etto*, ma ne contiene di più *per porzione* (*ragionevole*, per quanto ciò possa significare). La scelta di un diverso parametro cambia completamente l'impostazione della questione.

Se leggiamo

La regione X prima per tumori

potremmo farci l'idea che la regione X sia più inquinata, o meno assistita medicalmente, magari peggio governata da quel noto partito che ha la maggioranza nella regione X – associazioni d'idee che magari sono il motivo reale per cui è stato pubblicato quell'articolo sui media – ma il contenuto informativo di quel titolo è seminullo, e quelle argomentazioni che ci sorgono istintivamente sono praticamente insensate. Potrebbe ben essere che nella regione X i tumori siano 10 volte <u>meno</u> probabili *per ogni singolo residente* che nella regione Y, ma la regione X ha più del decuplo di abitanti della regione Y, per cui *il numero assoluto di casi* della regione X sopravanza quello della regione Y, molto più inquinata e meno assistita medicalmente.
Nella situazione considerata, altrettanto legittimo sarebbe stato il titolo

La regione Y prima per tumori

e in un caso numerico estremo potrebbe essere vero addirittura

Nella regione X la ***minima*** *incidenza di tumori*

(Per una disamina del termine *incidenza*: `->Link`).
Anche qua la scelta di un diverso parametro cambia completamente l'impostazione della questione:

frequenza assoluta: non dice nulla su inquinamento, malasanità...

frequenza relativa: serio indizio, su varie possibilià.

Il numero assoluto, spesso espresso da cifre ad alto impatto emotivo ("milioni di tumori"), da un punto di vista medico e farmaceutico ci dice meno della frequenza relativa, che in generale si potrà misurare in casi per 1 000 residenti, o per 100 000, o per milione. (Per evitare scritture come 0.000077, scarsamente leggibili: molto più chiaro, come nell'esempio del link sopra riportato, 7.7 casi per 100 000).
Si noti che la frequenza relativa corrisponde alla probabilià, per

1 singolo residente preso a caso. Per esempio 50 casi ogni 1000 abitanti dà una probabilità di $\frac{1}{20}$. Si tratta della concezione frequentista della probabilità.
La frequenza assoluta ha una diversa importanza: corrisponde alla *dimensione economica* complessiva della questione: è ovvio che se in un certo luogo ci sono più casi di una malattia usualmente trattata con un certo farmaco, là c'è un maggior *mercato* per quel farmaco.

In ambito medico e farmaceutico: ragionando con la logica comune – sbagliata – trovare una riduzione nelle aritmie che causano morte è un buon risultato per un farmaco, e si verifica abbastanza facilmente; verificare la sopravvivenza a lungo termine è molto più oneroso (e in passato ha dato risultati opposti).
La sopravvivenza a 5 anni dalla diagnosi di cancro è un indice di altissimo valore ma richiede molto tempo e denaro; la riduzione della massa tumorale in un breve tempo si verifica prima.
Cosa misuriamo è un serio problema generale della Medicina e della Farmacologia.
Vogliamo massa tumorale ridotta? A 2 mesi o a 6 mesi o a 1 anno dall'inizio del trattamento, o quando? O vogliamo diminuita mortalità, ma, di nuovo, quando misurata? O vogliamo aumentata sopravvivenza complessiva? Oppure aumentata *progression-free survival*? O migliore *response rate*, tasso di risposta del tumore alla terapia valutato misurando qualche *biomarker*? O diminuita spesa? (Che anche quello conta). O migliorata qualità della vita? (Sotto-problema: misurata come?) O un po' tutto, con una media pesata con coefficienti da decidere? In ognuno di quei casi si otterranno risultati in generale diversi.
Leggiamo sul Journal of Clinical Oncology([76])

> produce results that are clinically meaningful to patients

[76] American Society of Clinical Oncology Perspective: Raising the Bar for Clinical Trials by Defining Clinically Meaningful Outcomes. By: Lee M. Ellis et al. DOI: 10.1200/JCO.2013.53.8009 Journal of Clinical Oncology 32, no. 12 (April 20, 2014) 1277-1280.

> (ie, significantly improved survival, quality of life [QOL], or both)

(La riduzione della massa tumorale, così tanto usata, appare per certi versi la cosa che *meno* possa interessare il paziente).
Lo stesso discorso vale praticamente per ogni patologia.

Icasticamente:

L'operazione è riuscita ma il paziente è morto

Leggiamo in un articolo scientifico:[(77)]

> The last few years have seen an increase in the number of randomized controlled trials (RCTs) of new agents in metastatic solid tumors using progression-free survival (PFS) as the primary end point. Some trials showing improvement in PFS, without a corresponding increase in overall survival (OS), have led to approval of new drugs and/or changes in standard of care. This suggests a growing belief in the oncology community that delaying progression in metastatic disease is a worthy goal, even if OS is not improved. But is a new treatment that improves PFS really an advance for patients? Or is it only lowering the bar to declare active some of our much-heralded new molecular targeted therapies?

20.3 Rispetto a quale standard fare le statistiche?

Una fonte di problematicità è quale standard scegliere. Se per esempio volessimo vedere se la carenza di una certa sostanza nel sangue è statisticamente correlata ad una malattia, avremmo – oltre al problema della diagnosi della malattia nei soggetti, problema medico che non considereremo – il problema di quali soggetti considerare carenti e quali no, in base alle analisi chimiche del sangue: infatti ci sono molti standard per i vari livelli delle sostanze nel sangue, e in generale per i parametri biomedici, come l'essere sovrappeso, e come la mortalità infantile e l'aspettativa

[77] Progression-Free Survival: Meaningful or Simply Measurable? By: Christopher M. Booth, Elizabeth A. Eisenhauer. DOI: 10.1200/JCO.2011.38.7571 Journal of Clinical Oncology 30, no. 10 (April 01, 2012) 1030-1033. https://ascopubs.org/doi/full/10.1200/JCO.2011.38.7571

di vita alla nascita, standard che variano nel tempo e nelle grandi entità scientifiche, sanitarie e/o geopolitiche ragionevolmente considerabili: Ministero della Salute italiano, Comunità Europea, OMS (Organizzazione Mondiale della Sanità), ONU, USA (NIH, CDC...), la rivista scientifica The Lancet e molte altre...

L'aspettativa di vita delle donne in Italia, e il ranking dell'Italia per essa, sarebbe([78])

86.49 – 3^ secondo l'ONU (luglio 2015), dati 2010-2015

85.6 secondo l'OECD (2016), che considera solo stati OECD

85.1 – 12^-13^ secondo The World Factbook (2017)

84.8 – 7^ secondo l'OMS (maggio 2016), dati 2015

83.90 – 7^ secondo (un articolo di) The Lancet (2012).

Abbastanza variabilità per fare affermazioni molto diverse, pure autorevoli, specialmente usando il dato del ranking, molto fuorviante: per esempio San Marino viene considerato solo nella lista del World Factbook.

Gli standard variano nel tempo, e a seconda delle agenzie che li fissano, pur autorevoli.

Esempio. Attualmente (giugno 2019) leggiamo su sito governativo statunitense a proposito dell'anilina, in `https://www.atsdr.cdc.gov/substances/toxsubstance.asp?toxid=79`

> Cancer Classification: EPA: Probable human carcinogen. IARC: Not classifiable as to carcinogenicity to humans. NTP: Not evaluated

(Si veda per esempio il `Link ->`).

20.4 Illusioni percettive nella presentazione dei dati

In questo paragrafo siamo sia lo standard del punto decimale che della virgola decime.

[78] Si veda Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce List of countries by life expectancy.

Un indice che ora vale 1200 e l'anno scorso 800 permette di titolare

“Quest'anno 50% più dell'anno scorso”

e anche

“L'anno scorso 33% meno di quest'anno”.

In linea generale, i titoli faranno più conseguenze dei testi sottostanti.

Se il partito dei Vispi Volpini un anno riceve lo 0,6% e l'anno dopo lo 0,9% (è un partito piccolo...) la televisione dirà che è cresciuto dello 0,3%, ma il Corriere dei Vispi Volpini dirà che il loro elettorato è aumentato del 50%, il che è vero. (Magari anche un telegiornale lo dirà, chissà chi è il direttore...)

N.d.A. Ricordo, decenni fa, un esempio di presentazione fuorviante dei risultati elettorali del tipo “il partito A scende dal ...% al ...%, il partito B prende il ...% contro il ...% della volta precedente” dove nel profluvio di cifre e decimali l'ascoltatore medio ricorda solo che A *scende* e B *prende*, ma in effetti B scendeva più di A...

Fare raffronti con dati collaterali può permettere di titolare “aumento” un articolo che poi parla di un fenomeno in diminuzione, ma moltissimi si limiteranno a leggere il titolo.

In ambito medico, affermare che con diagnosi precoci si allunga la speranza di vita dalla diagnosi può essere molto fuorviante: “Una volta il paziente viveva mediamente due anni dalla diagnosi, adesso dodici anni”... ma facendo la diagnosi mediamente quanti anni prima?

Attenzione alle fallacie della memoria: vi pare di ricordare che secondo l'Organizzazione Mondiale della Sanità ogni anno 12.6

milioni di persone muoiono a causa dell'inquinamento, e adesso leggete che ogni anno 4.2 milioni di persone lasciano questo mondo a causa dell'inquinamento dell'aria? Basta rileggere con attenzione.

Attenzione soprattutto alle rappresentazioni grafiche.
Iniziare un diagramma a colonne o un grafico da un certo tempo invece che da un tempo precedente può permettere di fare affermazioni completamente diverse, magari entrambe formalmente vere, ma che genereranno emozioni e poi reazioni completamente diverse.
Grafici che sull'asse delle ordinate non iniziano da 0 possono dare l'impressione di variazioni enormi, anche raddoppi o dimezzamenti, a variazioni minuscole.
Diagrammi a torte tridimensionali in rappresentazione prospettica possono far apparire più grandi certi dati rispetto agli altri.

20.5 Di cosa parliamo?

Diamo solo un cenno di un argomento ciclopico. Ogni persona vive immersa in un flusso di informazioni che gli arrivano, in base al quale costruisce la sua percezione della realtà, che lui crede vera.
Anche se tutte quelle informazioni fossero vere (per ipotesi assurda, ovvio) l'immagine complessiva che l'individuo si forma è in generale (molto!) distorta: una *diversa scelta* di informazioni *altrettanto vere*, da far arrivare coi media – dal livello più basso fino agli articoli scientifici – creerebbe in quella stessa persona un'immagine del mondo completamente diversa, per molti versi quasi opposta.

Supponiamo qua in via ipotetica che sul pianeta Kepler-22 b, simile alla Terra, il danno, in qualche modo misurato, delle sigarette si disponga a campana gaussiana, con un'ampia zona mediana di

un danno medio per un grande generalità di fumatori. E che il danno delle sigarette elettroniche si disponga analogamente, ma più a sinistra sull'asse delle ascisse, cioè con un danno mediamente minore. Per quanto il danno sia mediamente minore, in moltissime persone è grave, per molte addirittura gravissimo, per alcune perfino maggiore di quello medio delle sigarette. Ecco, dai, invece di fare alcuni milioni di articoli su quelli mediamente meno danneggiati (impossibile a farsi), e invece di dire che in media il danno è minore (chi mai ci obbliga?) facciamo un bell'articolo titolando "ragazzo fuma sigarette elettroniche e ha i polmoni devastati".
La gente dirà: ecco, vedi, non serve, soldi buttati, meglio continuare con le sigarette normali! **È impressionante quante persone ragionino per casi singoli, appresi dai media, senza garanzia che siano rappresentativi di situazioni medie invece che eccezionali.**

20.6 Parlare di aumenti in situazioni fluttuanti

Mentre le funzioni elementari di base della Matematica hanno andamenti molto regolari, come x^2 o x^3, e similmente le successioni propriamente dette come quella di Fibonacci e quella dei fattoriali, le successioni di valori numerici rappresentativi di fenomeni reali normalmente presentano nel tempo fluttuazioni, alternando crescite a diminuzioni.
Esempio, morti in Italia:
2013 600 000
2014 599 000 −1 000 rispetto all'anno precedente
2015 653 000 +53 000
2016 616 000 −37 000
2017 650 000 +34 000
2018 632 000 −18 000
2019 645 000 +13 000
Consideriamo per esempio il grafico *Sperimentazioni autorizzate*

dall'Autorità competente a pagina 10 del documento La Sperimentazione Clinica dei Medicinali in Italia – 17° Rapporto Nazionale – Anno 2018 dell'AIFA, Agenzia Italiana del Farmaco. L'ultimo dato è del 2017 e relativamente ad esso potremmo dire *veridicamente*

aumentate rispetto al 2000

aumentate rispetto a 15 anni fa

diminuite rispetto all'anno precedente

al livello minimo da 10 anni

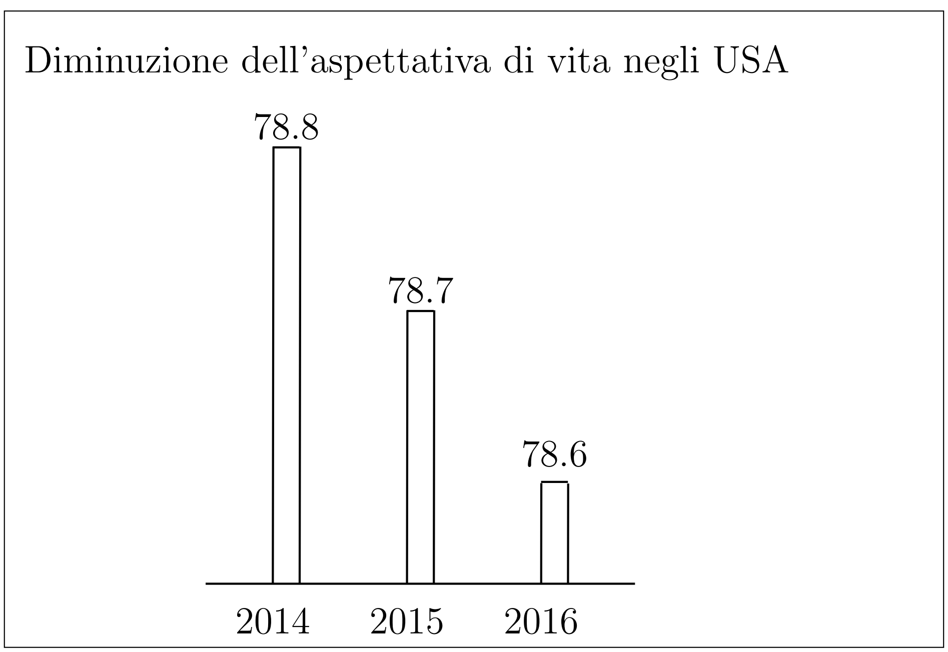
ottenendo nel lettore emozioni diverse che potranno supportare interventi decisionali diversi.
Si noti che anche in situazioni di palese diminuzione sostanziale sul lungo periodo, tali fluttuazioni possono permettere in vari anni di parlare di aumento. E negli anni in cui proprio non si può dirlo... si può parlare della situazione dell'anno precedente, che magari vedeva un aumento rispetto all'anno precedente – mica il lettore sa qual è l'ultimo dato rilasciato, in generale. Agendo così, si potrà *ogni anno* parlare di *aumento* in questo esempio di evidente *sostanziale diminuzione*:

Senza voler qua citare esempi di pertinenza farmacologica che potrebbe irritare qualcuno, consideriamo una causa di morte: il femminicidio. È generale percezione, indotta sapientemente dai media, che sia in aumento, addirittura in *enorme* aumento. La quantità assoluta è da molti sovrastimata *di vari ordini di grandezza*. Invece è in sostanziale diminuzione, seppur fluttuante, da molto tempo. Secondo le prime proiezioni, il 2019 dovrebbe

essere stato l'anno col *minor* numero di femminicidi dal 1861 – e quindi in pratica dalla determinazione geografica dell'Italia, quasi due millenni fa. Eppure anche nell'anno di verosimile incipiente minimo storico, in novembre vari media hanno "femminicidio in aumento" nel titolo! Usando la precedente fluttuazione.
Per dati numerici realistici sul fenomeno si veda il documento del Senato in http://www.senato.it/service/PDF/PDFServer/BGT/1066658.pdf, in particolare l'istogramma a pagina 52: "dal 2011 al 2016 (...) con riguardo agli omicidi con vittime di sesso femminile tale riduzione è pari al 14 per cento."
E a pagina 49: "omicidi con vittime donne per 100.000 donne si evidenzia un tasso di omicidi di donne che è più basso di quello di tutti i Paesi avanzati." (I motivi geopolitici per i quali i media creano quell'illusione cognitiva esulano da questa trattazione, e si trovano nei testi specializzati).

20.7 Illustrazione di un triplice esempio reale

Aumento dell'aspettativa di vita negli USA: link<--



Aumento del tasso di mortalità negli USA:

2009	7.9
2010	8.0
2011	8.1
2012	8.1
2013	8.2
2014	8.2
2015	8.4
2016	8.5
2017	8.6

Capire questi diagrammi richiede:
1) conoscere la Statistica Descrittiva, notando in particolare che
il diagramma considera solo gli ultimi 3 anni;
il diagramma ha una linea base posta a circa 78.5 anni.
1 bis) conoscere la Demografia, che possiamo considerare semplificatamente una branca specialistica della Statistica Descrittiva. Questo ci farebbe capire che non è per nulla strano che si alzino da tempo i tassi di mortalità, anche prima della riduzione dell'aspettativa di vita. Il tasso di mortalità può ben alzarsi mentre l'aspettativa di vita si alza, proprio perchè la popolazione mediamente invecchia, in compresenza di un fattore demografico completamente diverso: la scarsità di nuovi nati.
2) Conoscere la <u>situazione reale</u> il che è completamente diverso dal guardare questi numeri o grafici.
Per una parziale spiegazione della situazione reale dietro alla diminuzione dell'aspettativa di vita negli USA si segua questo `link<--`.

20.8 Conclusioni

Pensare di aver capito una situazione perchè si è vista una qualche statistica o lista di numeri è in generale *ingenuo*, e i grafici sono, per le persone non istruite, perfino più fuorvianti. Le parole, poi, possono essere ancora più ingannevoli anche se sembrano esprimere dati oggettivi, numerici, statistiche: aumento, diminuzione...

<u>È necessario acquisire una buona competenza statistica per non</u>

essere tratti in inganno. Sia da errori fatti in buona fede, che da manipolazioni volontarie, fatte da soggetti interessati.

Superato il problema della comprensione formale di statistiche e grafici, il problema
delle statistiche
e dei grafici,
e perfino dei dati grezzi/completi,
è che ce ne possono sempre essere altri, che non stiamo vedendo ovvero non ci stanno mostrando, che cambierebbero completamente la nostra prospettiva sui fenomeni considerati.

In linea generale, le statistiche economiche dei media non valgono la carta su cui sono scritte. Per le statistiche scientifiche, non è vietato sperare una maggiore oggettività.

Molti testi divulgativi affermano che *la maggior parte* dei contagi da toxoplasmosi non avvengono dai gatti ma dalla sporcizia. Anche se questa statistica – praticamente impossibile da verificare – fosse vera, quegli Autori magari trascurano di dire, nei loro articoli divulgativi, che sebbene il toxoplasma si trovi in tanti animaletti, si riproduce solo nei felini, per cui se tutti i gatti venissero inceneriti (orrore!) la toxoplasmosi semplicemente sparirebbe dall'Italia, dove praticamente l'unico felino che frequenta l'uomo è il gatto.

I gattofili non costituiscono una lobby molto pericolosa e allora qua possiamo prendercela scherzosamente con loro senza rischi, per spiegare cosa vuol dire comunicare una statistica fuorviante perchè omette fatti che cambierebbero radicalmente la prospettiva.
Ma la triste verità per uno statistico è che le notizie di statistica medica che arrivano al grande pubblico dalla televisione e dai media *lasciano a desiderare*, diciamo così.

Ulteriori problematiche si presentano nella Statistica Inferenziale.

If you torture the data long enough, it will confess to anything. (In questo link<-- è in articolo su sito governativo statunitense).

PARTE II – DATI QUASI VERI (QUASI FALSI)

20.9 Il valore anomalo: outlier

Per un'infinità di motivi, in un dataset ci può essere qualche valore che il ricercatore ritiene *assurdo*, e tenderà ad eliminarlo prima di procedere con qualunque analisi dei dati stessi, per non comprometterla.

Questi *outlier*, valori anomali ovvero aberranti, provengono da risposte scherzose a questionari, truffe ("reddito zero"...), malfunzionamento di apparati, confusione fra punto decimale e virgola decimale, confusione fra milligrammi e microgrammi, eccetera. Ma talvolta sono dati *veri* benchè *eccezionali*.

La decisione di quali valori siano da considerare outlier ed eventualmente da eliminare, può essere

soggettiva

oppure dettata da formule, che comunque non considereremo, e in ogni caso è problematica, anche perchè ce ne sono sono varie. In una ricerca seria *et* onesta, si *dovrebbe* avvertire se sono stati eliminati outlier.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Outlier", e non è chi non veda le pericolose conseguenze di ciò:

> There is no rigid mathematical definition of what constitutes an outlier; determining whether or not an observation is an outlier is ultimately a subjective exercise. There are various methods of outlier detection. (...) Deletion of outlier data is a controversial practice

20.10 Omissione di dati ritenuti poco significativi

Dati ritenuti poco significativi vengono talvolta omessi, per esempio San Marino da molte statistiche; facendoli rientrare si possono ottenere affermazioni molto diverse, ma per certi versi effettivamente meno significative.

20.11 "Fatta la legge, trovato l'inganno."

Fissato uno standard per valutare statisticamente un qualche aspetto della realtà, qualcuno trova conveniente, diciamo così, fare azioni che migliorano di molto la valutazione statistica con scarso o nullo miglioramento della realtà. Se per esempio una legge attribuisce ai *"comuni montani"* particolari finanziamenti, fissando ad una certa altitudine del municipio la denominazione di "comune montano", state sicuri che qualche comune sposterà la sede del municipio, più a monte... *et voilà*, il comune – esattamente lo stesso di prima – diventa "montano" (e ottiene i finanziamenti).

In ambito scientifico e biomedico in particolare, a rischio, diciamo così, sono le statistiche che valutano la *credibilità percepita* ("impact factor") delle riviste scientifiche; si veda per esempio *A user's guide to inflated and manipulated impact factors*, di John P. A. Ioannidis e Brett D. Thombs, European Journal of Clinical Ivestigation (17 giugno 2019) Link->

20.12 Trasformare dati ordinali in dati numerici

Supponiamo che un'organizzazione raccolga dati sulla soddisfazione degli utenti sulle prestazioni di un suo organo: per esempio un'università, sull'insegnamento di un suo docente – caso reale in Italia. L'utente può scegliere, per valutare il suo grado di soddisfazione, fra

no
più no che sì

più sì che no
sì

Un'università trasforma i valori ordinali in numerici con lo schema

2
5
7
10

e un'altra con quest'altro, altrettanto legittimo:

1
2
3
4

Consideriamo i giudizi sui famosi Professori Pinco e Pallino, dati dai loro 2 studenti per ciascuno:

Pinco: più no che sì, sì: 5+10=15 oppure 2+4=6

Pallino: più sì che no, più sì che no: 7+7=14 oppure 3+3=6.

Col primo schema Pinco figura meglio di Pallino, 15 a 14, e col secondo sono pari, 6 a 6.

Nel prossimo paragrafo vediamo una generalizzazione di questa problematica: la discrezionalità nella creazione dei dati.

20.13 Il problema della discrezionalità

Nella rilevazione dei dati può essere presente un ampio margine di discrezionalità: classificare al microscopio cellule in "regolari/irregolari", "simmetriche/asimmetriche"...

Esempio lampante di discrezionalità:[79]

> "Moribund larvae were considered dead and included in the analyses."

[79]Nartey, Rita et al. "Use of Bacillus thuringiensis var israelensis as a viable option in an Integrated Malaria Vector Control Programme in the Kumasi Metropolis, Ghana." Parasites & vectors vol. 6 116. 22 Apr. 2013, doi:10.1186/1756-3305-6-116

Le cause di morte

Si consideri la problematica dei referti di causa di morte: le persone in generale giungono alla morte con diverse patologie concomitanti (si veda *comorbidità*).
E alcune muoiono pure dissanguate in incidenti automobilistici, in realtà causati dalle loro patologie (non è il dissanguamento la “vera” causa, a monte). Si pensi per esempio all'incidente automobilistico da crisi ipoglicemica.

Freddie Mercury è morto di polmonite (causa formale) o di AIDS (causa sostanziale)?
Anche alcol e droga forse non gli hanno fatto molto bene. Ma la causa di morte non viene ripartita in percentuali.

Il problema diventa critico per concomitanti patologie entrambe registrabili come causa di morte. Se sul piano di verità entrambe hanno favorito la morte, nelle statistiche ufficiali 1 sola l'ha causata, e quelle statistiche hanno conseguenze sulle politiche sanitarie e farmaceutiche – magari con la mediazione dei media.

Si pensi all'enorme difficoltà che può esserci dietro questa scelta:

morto per leucemia ma con morbillo
morto con leucemia ma per morbillo.

La decisione di cosa scrivere spetta a persone che sono generalmente molto competenti, tuttavia la situazione talvolta può essere complessa.

A proposito del Coronavirus un virologo avrebbe (2020) affermato:

> Tutte e 7 le vittime avevano anche altre patologie, quindi sarebbe più opportuno parlare di Coronavirus come concausa non come causa diretta.[80]

[80] Matteo Bassetti, direttore della clinica di malattie infettive dell'ospedale policlinico San Martino di Genova, citato in `https://www.primocanale.it/notizie/vittime-coronavirus-l-esperto-con-l-influenza-probabilmente-sarebbero-morti-lo-stesso--216491.html`, letto il 28 febbraio 2020

Per capire meglio la complessità della questione, su un sito internet del Ministero della Salute leggiamo([81])

> il virus influenzale non viene identificato o perchè **non ricercato** o perchè il decesso viene attribuito a polmoniti generiche.

(Enfasi aggiunta).

L'attribuzione di una causa di morte piuttosto che un'altra può avere grandi ripercussioni nelle decisioni di politica sanitaria, sostenuta dalle istanze dei cittadini, mediate o indirizzate dai media.

PARTE III – DATI FALSI

20.14 La falsificazione dei dati

Finora abbiamo considerato solo dati *veri*, magari presentati con omissioni o in modo fuorviante ma comunque veri: nella realtà pratica, esiste anche la falsificazione dei dati.
Per esempio leggiamo([82])

> Giugno 2019 [...] Scienziati impegnati nella ricerca sul cancro hanno manipolato le immagini dei loro studi, riuscendo così a ottenere successo, carriera, nuovi fondi per le loro ricerche. La Procura (...) ha appena concluso un'indagine lunga e complessa, che fornisce un quadro devastante

e volendo troviamo([83]) molti dettagli fra cui

> la procura deve archiviare (...) non è reato

Dal punto di vista giuridico, le cose stanno nei termini seguenti.

Le *bugie* possono essere eventualmente immorali, ma non sono illegali, tranne

[81] In https://www.epicentro.iss.it/influenza/sorveglianza-mortalita-influenza, accesso il 9 marzo 2020.

[82] In https://www.ilfattoquotidiano.it/in-edicola/articoli/2019/06/30/ricerca-\sul-cancro-risultati-ritoccati-per-ottenere-milioni/5291204/

[83] https://codacons.it/ricerca-sul-cancro-risultati-ritoccati-per-ottenere-\milioni/

in alcune fattispecie elencate dalla legge: il falso in atto pubblico, il falso in bilancio, il falso ideologico, eccetera, ma assolutamente non è compreso il falso in articolo scientifico, che quindi è assimilabile a una bugia fra privati cittadini – anche se l'articolo contiene descrizioni di esperimenti mai avvenuti, cioè non semplici *errori* ma falsità scritte con dolo.
Naturalmente, un cittadino che ritenesse che dalla pubblicazione di affermazioni false in un articolo scientifico gliene sia conseguito un danno economico, o un danno biologico, potrebbe ipotizzare una querela, o una denuncia – ma si capisce bene che in generale sarà impresa ardua, specialmente per articoli scientifici che non dicono bene di farmaci specifici, ma facciano *Scienza di Base*.
Tuttavia, l'autore truffaldino rischia pur sempre qualcosa.
Se egli è, come avviene quasi sempre, dipendente di un'istituzione scientifica (per esempio un'università), o anche solo affiliato scientificamente ad essa, è ben probabile che la pubblicazione di dati deliberatamente falsificati sia contraria al codice deontologico dell'istituzione. Allora al falsario l'istituzione può comminare una sanzione disciplinare in base al proprio regolamento, per violazione del codice deontologico (comunque solo in base a regolamenti e non a leggi, e quindi ad un livello molto più basso: le pene detentive sono escluse per la violazione di regolamenti).
Inoltre se la falsificazione diviene di dominio pubblico, l'istituzione può rivalersi contro il truffaldino per avere il risarcimento per danno di immagine - con una denuncia o querela (e quindi al livello di legge).
Si noti comunque che mentre la Giustizia tende a perseguire le violazioni delle leggi (cioè i reati), l'istituzione scientifica avrebbe in generale tutto l'interesse a occultare o almeno a minimizzare la violazione del regolamento (avvenuta con la falsificazione dei dati) per evitare un danno d'immagine, e ciò fa intuire come verosimilmente andrebbero le cose.

Esercizio$_\mu$ Si afferma che un intervento del 1845 ha causato una rapida diminuzione del parametro X, e si presenta questo diagramma a colonne:

```
1845 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1846 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1847 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1848 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1849 XXXXXXXXXXXXXXXXX
1850 XXXXXXXXXXXXXX
```

È plausibile quell'affermazione? Ecco un dataset più completo:

1842 7.68
1843 6.14
1844 4.92
1845 3.93
1846 3.19
1847 2.58
1848 2.09
1849 1.69
1850 1.37

(Risposta: no, non è plausibile. Infatti fino al 1845 il parametro diminuiva circa del 20% annuo e poi circa del 19%).

Sezione A2 – Calcolo Infinitesimale

Il Calcolo Infinitesimale comprende essenzialmente:

- ⋄ La teoria dei limiti (delle successioni e delle funzioni)
- ⋄ La teoria delle derivate, o Calcolo Differenziale
- ⋄ La teoria delle serie (numeriche, e di funzioni)
- ⋄ La teoria dell'integrale.

V – Limiti e derivate

21 Limiti di successioni

In questa Lezione consideriamo successioni, cioè funzioni definite su $\mathbb{N}$, o sue semirette come $n \geq 1$ oppure $n \geq 2$. Piuttosto che indicarle con $f(n)$ oppure $g(k)$ oppure $s(m)$, che comunque si potrebbe, le indicheremo con x_n, a_m, b_k o simili scritture.
Per esempio, con l'indice n: $x_n := n!$, $a_n := n^2$, $b_n := \frac{1}{n}$.
Ci interessa il "comportamento limite" per n che tende all'infinito:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{(Altri scrive } {}_{n\to\infty} \text{ invece di } {}_{n\to+\infty}\text{).}$$

Nella Lezione successiva considereremo non solo funzioni a_n ovvero $f(n)$ con n che varia in $\mathbb{N}$, cioè le successioni, ma funzioni $f(x)$ definite in $\mathbb{R}$ o suoi sottointervalli, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, e allora sarà possibile considerare x che tende a $-\infty$ oppure a un numero.

Torniamo allora alle sole successioni, e n tenderà sempre a $+\infty$.

Semplificando al massimo, le successioni di interesse in Farmacia sono di 4 tipi che ora vedremo.

Esempio 1 del tipo I: successioni ricorrenti. Consideriamo ora la successione a_n di Fibonacci, a suo tempo definita per ricorrenza:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 31, 34, 55, 89, 144...$$

Ci sembra, ed è vero e si potrebbe dimostrare, che i valori supereranno qualunque soglia, crescendo indefinitamente. Scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

e il senso del limite $+\infty$ è

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, M)\,(\exists\, \bar{n})\; n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M.$$

Consideriamo ora lo spazio che ha a disposizione ogni microbo nel volume iniziale fisso, diciamolo 1 in qualche opportuna unità di misura, per esempio il centimetro cubo, il pollice cubo, o una unità di misura da noi inventata in modo che valga proprio 1:

$$\frac{1}{a_n}$$

I valori sono

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13} \dots \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che a_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \, .$$

Più in generale si dà il caso, con altra successione x_n, e $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L \qquad \text{(o invece di n, qualunque variabile, p. es. } k\text{).}$$

Il significato è di un indefinito avvicinamento, con o senza raggiungimento del limite L. Più precisamente

$$(\forall \, \varepsilon > 0) \, (\exists \, \bar{n}) \, n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon \, .$$

Cioè, fissato un numer(ett)o positivo, chiamiamolo ε, da un certo punto in poi x_n dista dal limite meno di ε.

Esperienza pratica. Si provi con la calcolatrice a fare la radice quadrata di un numero scelto a piacere, poi a fare la radice quadrata del risultato, e così via: a quale limite tende la successione dei valori? (Tende a 1).

Esempio 2 del tipo I: successioni ricorrenti – il Modello Malthusiano. La popolazione – di microbi o quant'altro – si espande nel tempo scandito da n, proporzionalmente alla sua numerosità (detto semplificatamente: a molti microbi seguono quegli stessi microbi più molti figli di microbi, proporzionalmente al tasso di accrescimento):

$$a_{n+1} := a_n + c \cdot a_n \qquad a_0 := \text{popolazione iniziale}$$

con c il *tasso di accrescimento*. Ecco per esempio il caso $c := 2$:

$$a_0,\ 3\,a_0,\ 9\,a_0,\ 27\,a_0...$$

per esempio con $a_0 := 1000$

$$1\,000, 3\,000, 9\,000, 27\,000...$$

Si può dimostrare che la successione a_n ammette una rappresentazione *in forma chiusa*

$$a_n = (c+1)^n\,a_0$$

e se $c > 0$ si ha un vero e proprio accrescimento verso $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{se } c > 0$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello prima detto.
Invece se $-1 < c < 0$ il comportamento è molto diverso, per esempio con $c := -\frac{1}{2}$ abbiamo i valori

$$a_0,\ \frac{1}{2}a_0,\ \frac{1}{4}a_0,\ \frac{1}{8}a_0...$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che a_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

e il senso del limite 0 è quello prima detto per L, numero.

> Si provi con stessa successione del Modello Malthusiano a scrivere i primi 7 valori numerici con $a_0 := 100\,000$, prima con $c := -0.3$ e poi con $c := 0.3$.

E ovviamente con $c := 0$ abbiamo un equilibrio fra nati e morti ovvero tasso di accrescimento nullo e in quel caso la popolazione resta costante:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 \qquad \text{se } c = 0.$$

Nota sull'accrescimento di Fibonacci o Malthus. Una popolazione microbica o altra, che si espandesse con quelle leggi, tenderebbe ad un'espansione infinita; nella realtà ad un certo punto interverranno meccanismi che di fatto sospenderanno la validità della legge di Malthus o di Fibonacci nel rappresentare la numerostà della popolazione. Questo avviene, se non altro, perchè gli organismi da un certo punto in poi inevitabilmente si ostacolano a vicenda in modo significativo, anche per mancanza di spazio, come visto nell'Esempio 1 del Tipo II.

Così, piuttosto che tendere all'infinito esponenzialmente, ad un certo punto l'accrescimento in generale rallenterà producendo un tratto di sigmoide. Ed eventualmente poi decrescerà fino ad estinguersi o quasi, producendo un grafico piò meno a campana: si veda la figura a questo `link->`.

Esempio del tipo II: successioni definite "coi puntini". Il fattoriale

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

assume i valori

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 \ldots$$

Si ha

$$\forall\, n > 0 \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \geq n$$

e già n tende a $+\infty$, e allora anche $n!$ che come appena visto gli sta sopra:

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello sopra esposto, valido per qualunque successione.
(Il fattoriale ricorre ampiamente nel Calcolo delle Probabilità).

Esempio 1 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1)^n$ ha i valori

$$+1, -1, +1, -1, +1 \ldots$$

e non esiste il limite:

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n.$$

Questa successione consente nella programmazione informatica – per esempio con l'onnipresente in campo commerciale e scientifico Excel – di distinguere i numeri pari dai numeri dispari. (Esistono anche altri modi). In particolare

$$\frac{3 + (-1)^n}{2}$$

produce, a partire da $n \coloneqq 1$, i valori

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1...$$

che può consentire per esempio di produrre i turni in farmacia di Aldo e Bianca nei vari giorni dell'anno, alternandoli secondo il numero ordinale del giorno (per esempio al 1 febbraio corrisponde il numero 32, pari: lavora Bianca). Oppure per programmare con un software l'apertura automatizzata di sportellini 1 e 2, a giorni alterni, in un allevamento di animaletti.

> **Esempio informatico.** Si consideri il display ai LED programmabile della farmacia *Al Cuore Vispo* che dispone della funzione
>
> `ordinalNumberOfDay`
>
> e vuole esporre a giorni alterni i messaggi
>
> `STRING(1):=Buongiorno, allegro ti sia il giorno!`
>
> `STRING(2):=I nostri clienti campano cent'anni!`
> Ciò si potrà ottenere programmando qualcosa come
> `display(STRING((3+(-1)^ordinalNumberOfDay)/2))`

Esempio 2 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1) \cdot n$ ha i valori

$$+1, -1, +2, -3, +4, -5, +6, -7, +8, -9, +10...$$

e alcuni Autori dicono che va a ∞, l'infinito senza segno, ma in questa trattazione elementare diremo invece che il limite non esiste

$$\nexists \lim_{n \to +\infty} (-1) \cdot n$$

e similmente diremo per successioni che oscillano senza "assestarsi".

Esempio 3 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $\frac{(-1)^n}{10^n}$ ha i valori, per $n \geq 1$, cioè

$$-0.1, +0.01, -0.001, +0.0001...$$

e si capisce bene che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Similmente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

e similmente il limite è 0 se il numeratore è *limitato* (cioè si mantiene fra 2 numeri), e il denominatore $\to +\infty$.

Successioni del tipo IV: prolungabili ai numeri reali. Per successioni come

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

che potrebbero essere prolungate ovvero "estese" ai numeri reali

$$f(x) := \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(si noti che ciò non si può fare banalmente per i tipi I, II e III) il limite a $+\infty$ sarà trattato nella prossima lezione.

22 Limiti e continuità

Ci occupiamo del comportamento di una funzione $f(x)$

$$f : I \to \mathbb{R}$$

essendo I

intervallo oppure

unione finita di intervalli oppure

unione infinita non troppo "capricciosa" di intervalli

quando $x \to +\infty$, com'era nelle successioni, oppure

$x \to -\infty$ oppure

$x \to x_0 \in \mathbb{R}$, cioè un "numero finito":

$$\lim_{x \to_{qualcosa}} f(x)$$

Esempi.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{x} = 0 \qquad \text{esempio termodinamico: } V = \frac{cost}{p} \text{ (isoterma)}$$

al tendere all'infinito della pressione il volume andrebbe a 0, se il gas restasse ideale.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{10}{x} = +\infty \qquad \text{esempio termodinamico: } p = \frac{cost}{V} \text{ (isoterma)}$$

al tendere a 0 del volume la pressione andrebbe all'infinito, se il gas restasse ideale.

La scrittura $x \to x_0^+$, qua sopra, significa che x tende a 0 da destra ovvero da valori maggiori di x_0. E similmente esiste $x \to x_0^-$.

Dai grafici apprendiamo che

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e similmente	$x^1, x^3 \ldots x^\alpha$ *con* $\alpha > 0$: $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$
$\lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty, \qquad b > 1$	e 0 se $0 < b < 1$
$\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0$	$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0, \qquad b > 1$	e $+\infty$ se $0 < b < 1$
$\lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to0} \lg x = -\infty$	$\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} x^{dispari\,positivo} = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[dispari\,positivo]{x} = -\infty$
$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$	similmente $-\infty$, *e* cos *e* tan

Esempio 1. Guardando il grafico, per la campana gaussiana vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

e similmente per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

e scriveremo i 2 limiti insieme in questo modo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

Esempio 2. La concentrazione del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

al tendere del tempo t all'infinito:

$$\lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} =$$

per proprietà delle potenze

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^{-1}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

per proprietà dei logaritmi

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

per definizione della potenza con esponente intero negativo

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

ed essendo la base fra 0 e 1 esclusi, e l'esponente va a $+\infty$,

$$= 0$$

Cioè la concentrazione va a 0 al tendere del tempo t all'infinito.

22.1 Limiti di successioni prolungabili ai numeri reali

Di successioni come

$$\ln n \qquad 2^n$$

$$\phi^n \qquad \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

cioè prolungabili ovvero "estendibili" da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, per il limite a $+\infty$ considereremo il corrispondente limite delle funzioni prolungate

$$\ln x \qquad 2^x$$

$$\phi^x \qquad \left(1 - \tfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

cioè considereremo il limite in $\mathbb{R}$, ottenendo lo stesso risultato perchè (teorema) è

$$\text{se} \lim_{x\to+\infty} f(x) = u \quad \text{allora} \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = u$$

Per esempio esiste un limite classico, di difficile dimostrazione matematica e ampia ricorrenza in Calcolo delle Probabilità,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

spesso detto, in una delle 2 forme soprascritte (Primo, oppure Secondo) Limite Fondamentale, e da esso con complicati calcoli segue

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

che ritroveremo, nella prima forma, in questioni di Farmacia.

Esempio 1.

$$\lim_{x\to+\infty}(7\,x^2 - x + 1) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(7 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) =$$

che per "grandi" x è il prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 7

$$= +\infty.$$

Esempio 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) =$$

prodotto di 2 numeri "grandi"

$$= +\infty$$

oppure $= x\,(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})$, prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 1: in ogni caso il limite è $+\infty$.

Tutto ciò costituisce il *calcolo dei limiti*, che comunque può raggiungere più alti livelli di sottigliezza:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4 - 5x^3 + 6 - \mathrm{e}\sqrt{x}}{3x^3 - \frac{1}{x} - 2x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^4} - \frac{\mathrm{e}}{x^3\sqrt{x}}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^5} - 2} = -\frac{3}{2}\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 6 - e\sqrt{x}}{3x^3 - \frac{1}{x} - 2x^4} = \ldots = -\frac{3}{2}$$

Si dimostrano

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{10^x}{x} = +\infty$$

$$\text{e in effetti } \lim_{x\to+\infty} \tfrac{b^x}{x} = +\infty \qquad b > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\lg x}{x} = 0$$

$$\text{e in effetti } \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log_b x}{x} = 0 \qquad 0 < b \neq 1.$$

22.2 Limiti verso un numero finito

Consideriamo il limite di f per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, anche distinguendo x_0^+ e x_0^-, e ci sono 2 casi:
◇ $x_0 \notin \operatorname{dom} f$, p. es. $\lim_{x\to0^-} \frac{x}{|x|} = -1$, $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
◇ $x_0 \in \operatorname{dom} f$ e ci sono 2 sottocasi:
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: la f **si dice continua** in x_0 e si noti che le funzioni elementari sono continue nei domini, e allora per esse sempre limite=valore calcolato, p. es. $\lim_{x\to0} e^x = 1$;
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$: la f si dice discontinua in x_0 e questo può essere con funzioni non elementari come $\operatorname{sgn}(x)$ e $\lfloor x \rfloor$.

Allora per le funzioni elementari sono significativi solo i limiti dove la funzione "smette di esistere": gli estremi, finiti o no, degli intervalli che compongono il dominio, non appartenenti ad esso:

$$\lim_{x\to1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \text{ [forma 0 su 0] } \lim_{x\to1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \text{ [funzione elementare, limite=valore] } = \frac{1}{2}.$$

Si dice *limitata* una f tale che esistono 2 numeri M e N tali che $M < f(x) < N$, per esempio $\sin x$. Limitata $\not\Rightarrow \exists$ limite.

Si dice *infinita* una funzione che tende a $+\infty$ o $-\infty$ e *infinitesima* una che tende a 0 (per $x \to u_0$ finito o no).
Per esempio sono infinite per $x \to +\infty$ le b^x con $b > 1$, e infinitesime per $0 < b < 1$; viceversa per $x \to -\infty$. Infinite le $\log_b x$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

Esempio: logistica. Consideriamo il caso ultra-semplificato:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^t}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Una forma più generale dà, con costanti positive K, q, r,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1+q\,\mathrm{e}^{-r\,t}} = K$$

(Si veda Wikipedia alla voce *Equazione logistica*).

22.3 Teoremi sui limiti

Risolveremo i limiti un po' in modo intuitivo, come abbiamo già ampiamente fatto, anche guardando il grafico, e anche esaminando "a pezzetti" le espressioni delle funzioni; in questa trattazione elementare non possiamo fare una teoria dei limiti molto approfondita.
Tuttavia qua formalizziamo le "regole" di calcolo dei limiti, che in parte abbiamo già usato.

Con le definizioni dei limiti (con ε, M...) si dimostra che:

- limite somma=somma limiti se finiti: $\lim_{x\to\pi}(\mathrm{sign}(x) + \lfloor x \rfloor) = 4$
- limite prodotto=prodotto limiti se finiti: $\lim_{x\to-\pi} \mathrm{sign}(x)\lfloor x \rfloor = 4$
- limitata fratto infinita, $\to 0$, p.es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\log_{\frac{1}{2}} x} = 0$

• limitata + infinita>0, $\to +\infty$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}(\cos x + \sqrt{x}) = +\infty$
• reciproca di tendente a $L \neq 0$ tende a $\frac{1}{L}$, p.es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\arctan x} = \frac{2}{\pi}$
• reciproca d'infinita $\to 0$, p.es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log_{10} x} = 0$
• reciproca d'infinitesima > 0, $\to +\infty$, p.es. $\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$
• reciproca d'infinitesima < 0, $\to -\infty$, p.es. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$
• per quanto gli infiniti non siano numeri e le espressioni seguenti siano scorrette matematicamente, valgono come mnemonici:
$+\infty + \infty = +\infty$ e analogamente $-\infty + (-\infty) = -\infty$
$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ e analoghe 3 coi $-$ e il prodotto dei segni.
⋄ Nelle prossime 3 indichiamo con L un limite finito:
$+\infty + L = +\infty$ p.es. $\lim_{x\to+\infty}(x^3 + \arctan x) = +\infty$
$-\infty + L = -\infty$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}(\log_{4-\pi} x + (4-\pi)^x) = -\infty$
$+\infty \cdot L = +\infty$ se $L > 0$ e analoghe 3 per $L < 0$, e $-\infty$.

Restano fuori queste **forme di indecisione**, da risolvere caso per caso: $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞. Per esempio

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x) =$$

$$[= +\infty - \infty]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) =$$

$$= [+\infty \cdot (+\infty) =]$$

$$= +\infty.$$

Tutte le funzioni considerate in questa lezione sono definite in singoletti o intervalli o unione (finita o non troppo "capricciosa" se infinita) di singoletti e/o intervalli.
I singoletti non hanno rilevanza per quanto riguarda i limiti.
Sono significativi solo gli intervalli del dominio delle funzioni.
Per esempio la funzione $\frac{1}{x}$ è definita nell'unione dei 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Considereremo i limiti a quegli estremi: $-\infty$, 0^-, 0^+, $+\infty$.

Similmente consideremo quei 4 limiti, e soprattutto quelli a 0^+ e $+\infty$, per

$$\frac{1}{x^2}$$

Questa sopra è una funzione che ricorre ampiamente in Fisica, per esempio l'attrazione fra 2 cariche di segno opposto è([84])

$$F = C\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

essendo q_1 e q_2 i valori, senza segno, delle 2 cariche, ovvero come funzione della sola distanza (cioè per cariche fissate)

$$F(r) = C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

(E dal punto di vista fisico è significativa solo per $r > 0$). Si ha

$$\lim_{r\to+\infty} C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2} = 0 \quad \text{forza nulla a distanza infinita}$$

$$\lim_{r\to 0^+} C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2} = +\infty \quad \text{forza infinita a distanza nulla}$$

Esercizi. Per $x\sqrt[3]{x}$, $\log_2|2^x - 1|$, $\ln|x|$, $\sin 2^x$, $\cos \pi x$,

$\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$, $\dfrac{4+3x-x^2}{x^2-2x-8}$ questi 8 limiti: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$, $\lim\limits_{x\to-2^\pm}$, $\lim\limits_{x\to 0^\pm}$, $\lim\limits_{x\to 4^\pm}$.

Gli stessi 8 limiti per queste 3 funzioni: $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{3^x \pm 3^{-x}}$, $\quad \lg\left|1 - \dfrac{2}{x}\right|$.

[84]In modulo, non vettorialmente.

23 Derivate – I parte

Grossolanamente: derivata=pendenza

23.1 Derivata in un punto e funzione derivata

In questa trattazione elementare considereremo solo le derivate delle funzioni reali di variabile reale.

Essenzialmente, la derivata $f'(x)$ di una funzione f in un punto x, è un numero oppure $+\infty$ o $-\infty$ che se esiste rappresenta la pendenza del grafico in $(x, f(x))$. E se non esiste vuol dire che in quel punto il grafico non ammette retta tangente, per qualche sorta di sua non liscezza. La derivata positiva o $+\infty$ corrisponde (con precisazioni che faremo) alla crescenza di f nel punto x e quella negativa o $-\infty$ alla decrescenza.

Al variare di x nel dominio di f si ottiene una funzione $f'(x)$ ovvero $Df(x)$ che si chiama [funzione] derivata.

La derivata $f'(x)$ in un punto x, se finita, uguaglia contemporaneamente

- il coefficiente angolare m della retta tangente in $(x, f(x))$
- la tangente (goniometrica) $\tan\alpha$ dell'angolo della (retta) tangente con l'asse x:

$$\tan\alpha = f'(x) = m$$

Anticipiamo un esempio chiarificatore.
La derivata di x^2 è $2\,x$; scriveremo $Dx^2 = 2\,x$; anche $(x^2)' = 2x$.
In 1 la $2\,x$ vale 2 che è la pendenza del grafico di x^2 in 1.
In -1 la $2\,x$ vale -2 che è la pendenza del grafico di x^2 in -1.
In 0 la $2\,x$ vale 0 che è la pendenza di x^2 in 0.
Per $x > 0$ la $2\,x$ è > 0 dal che là la x^2 cresce (in ogni punto).
Per $x < 0$ la $2\,x$ è < 0 dal che là la x^2 decresce (in ogni punto).

Tutto questo richiede molte precisazioni.

La derivata [come numero] è definita da

$$f'(x) \coloneqq \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \;\; ovvero \coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

per ogni x per cui i limiti (equivalenti) esistono, anche se infiniti.

La *funzione* derivata ha la stessa definizione ma solo per ogni x per cui i limiti esistono *finiti*.

L'argomento del secondo limite qua sopra si chiama *rapporto incrementale* di f in x.

(La maggioranza dei testi, trattando più separatamente le derivate come numero e come funzione, per il primo caso scrive $f'(x_0) \coloneqq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ovvero $\coloneqq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, derivata in x_0).

Si dimostra (teorema) che se in $(x, f(x))$ esiste la tangente al grafico essa forma con l'asse x un angolo orientato α tale che $\tan \alpha = f'(x)$.
Da ciò segue, lasciando per adesso all'intuizione il significato di funzione crescente o decrescente in un punto, che

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decrescente in x_0

(si tratta della crescenza e decrescenza **puntuali**, non quelle globali del paragrafo 5.7) e lasciando per adesso all'intuizione il significato di funzione "liscia" e di punto di massimo relativo e di minimo relativo

x_0 punto di massimo relativo di funzione liscia $\Rightarrow\ f'(x_0) = 0$
x_0 punto di minimo relativo di funzione liscia $\Rightarrow\ f'(x_0) = 0$

La derivata di $f'(x)$ è la *derivata seconda* $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$ eccetera.

E lasciando per adesso all'intuizione il significato di punto di flesso

x_0 punto di flesso di funzione liscia $\Rightarrow\ f''(x_0) = 0$.

Esempi.
Si trova facilmente che la derivata di $|x|$ è $\frac{x}{|x|}$ corrispondentemente all'inesistenza della tangente al grafico in 0 (ovvero, in $(0,0)$).

La funzione $\sqrt[3]{x}$ ha derivata $+\infty$ in 0, e corrispondentemente in $(0,0)$ il grafico ha tangente verticale.

Nota. Dopo $Dx^2 = 2\,x$, che lo studente è invitato a calcolare col limite del rapporto incrementale, non calcoleremo più le derivate col limite del rapporto incrementale: ciò è già stato[85] fatto, secoli fa: oggi usiamo tabelle e regole di derivazione.

[85] per le funzioni base di utilità pratica in Farmacia, non per tutte le funzioni, che sono infinite.

23.2 Derivate delle funzioni elementari reali

Tutte queste formule valgono nell'intersezione dei domini della funzione derivanda e della funzione derivata. Per esempio $D \ln x = \frac{1}{x}$ vale per $x > 0$ sebbene $\frac{1}{x}$ esista anche per $x < 0$, e $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ vale per $x > 0$ sebbene la derivanda $\sqrt{x}$ esista anche per $x = 0$.

$$
\begin{array}{llcll}
\forall c & D\,c & = & 0 & \\
 & D\,x & = & 1 & \\
 & D\,x^n & = & n\,x^{n-1},\ n \text{ intero,} & \text{in particolare:} \\
 & & & & Dx^2 = 2x \\
 & & & & D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \\
 & D\,x^\alpha & = & \alpha\,x^{\alpha-1} \text{ con } x > 0 & \text{e } \alpha \text{ reale non intero,} \\
 & & & \quad \text{in particolare} & D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 & D\sin x & = & \cos x & \\
 & D\cos x & = & -\sin x & \\
 & D\tan x & = & \frac{1}{\cos^2 x} & = 1 + \tan^2 x \\
 & D\arctan x & = & \frac{1}{1+x^2} & \\
 & D\,\mathrm{e}^x & = & \mathrm{e}^x & \\
 & D\,10^x & = & \frac{10^x}{\lg \mathrm{e}} & \\
 & D\,\ln x & = & \frac{1}{x} & \text{e vale anche } D\ln|x| = \frac{1}{x} \\
 & D\,\lg x & = & \frac{\lg \mathrm{e}}{x} & \text{e vale anche } D\lg|x| = \frac{\lg \mathrm{e}}{x} \\
(\text{e} & D\,\Phi(x) & = & \phi(x) & \text{ma } \Phi(x) \text{ non è elementare).}
\end{array}
$$

([86])

[86] Per lo studente interessato, ad un livello superiore si considerano anche:

$$
\begin{array}{llcll}
\forall a > 0 & D\,a^x & = & a^x \ln a & \\
\forall\, 0 < b \neq 1 & D\,\log_b x & = & \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b} & \\
 & D\,\mathrm{cotan}\,x & = & -\frac{1}{\sin^2 x} & = -1 - \mathrm{cotan}^2 x [= -\mathrm{cosec}^2\, x] \\
 & D\arcsin x & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\arccos x & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\sinh x & = & \cosh x & \\
 & D\cosh x & = & \sinh x & \\
 & D\tanh x & = & \frac{1}{\cosh^2 x} & [= 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2\, x] \\
 & D\,\mathrm{arsinh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \\
 & D\,\mathrm{arcosh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \\
 & D\,\mathrm{artanh}\,x & = & \frac{1}{1-x^2} & [= D\,\mathrm{arcoth}\,x] \\
 & D\,|x| & = & \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} & [= \mathrm{sgn}\,x,\ \forall\, x \neq 0]
\end{array}
$$

24 Derivate – II parte

24.1 Teoremi algebrici sulle derivate

In tutto questa Lezione, la somma è somma di funzioni, e così il prodotto e il quoziente: per esempio $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$.
La derivata della somma [di 2 funzioni] è la somma delle derivate [di quelle 2 funzioni]:

$$(f+g)' = f' + g'$$

che potremmo anche scrivere $D(f+g) = Df + Dg$ ma continueremo con la notazione dell'apice per la derivata prima.
La derivata del prodotto <u>non</u> è il prodotto delle derivate bensì

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \text{. Da cui subito } (cf)' = cf',\ c \text{ costante}.$$

Derivata della [funzione] reciproca:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

e da questa e dalla precedente si ricava subito la derivata del quoziente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\,.$$

Derivata della funzione composta:([87])

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi. Con la prima, terza e quinta formula, ricordando la derivata dell'arcotangente, si troverà $D\left(\text{arctg} x + \text{arctg}\,\frac{1}{x}\right) = 0$.
Dalla quinta formula $Df^\alpha = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f'$ per ogni $\alpha \in I\!R$.

[87] Per lo studente interessato, quella formula consente la derivazione di f^g derivando l'equivalente $e^{g \cdot \ln f}$:

$$(f^g)' = f^g \cdot \left(g' \cdot \ln f + \frac{g \cdot f'}{f}\right)$$

ricordando la soprastante formula di derivazione del prodotto, e la derivata della funzione esponenziale e della funzione logaritmo.

Esempi di calcolo di derivate

$$D\sqrt{1+x^2} =$$
$$= D\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot D(1+x^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\,x =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$D\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= -(1) \cdot D\frac{1}{x^2} =$$
$$= -D\,x^{-2} =$$
$$= 2\,x^{-3} =$$
$$= \frac{2}{x^3}$$

24.2 Le funzioni elementari in Farmacia

L'uso delle funzioni elementari nella ricerca farmaceutica e in generale biomedica è *enorme*, per **modellizzare** i fenomeni.

Gli articoli scientifici che le usano sono sicuramente *milioni*.

Avere in mano dei numeri, risultato di un esperimento, è *qualcosa*. Avere una funzione che li modellizza – anche se non rende conto *esattamente* di tutti i casi riscontrati – è *immensamente di più*. Nel modello ci saranno dei parametri, come la quantità di qualche sostanza presente in un liquido di coltura per fare un esempio, che si potrà ipotizzare di modificare, in un successivo esperimento, e così si va avanti.

Nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto generale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:

qualitativa (“bollendo *un po’* otterrai *un po’ di* precipitato”)
numeri
operazioni (numeriche)
funzioni (numeriche)← **qua siamo**
analisi statistica dei dati (numerici)

È allora fondamentale conoscere il comportamento – verrebbe quasi da dire la *psicologia* se non l’*anima* – delle varie funzioni elementari, il loro *modo* di crescere e decrescere e tendere all’infinito eccetera...
Limiti e derivate ne sanno molto, dell’anima delle funzioni.

Complementi

Faremo una trattazione semplice di molti tipi di funzioni **continue** di frequentissima ricorrenza in Farmacia.

Non ci proponiamo certo di "imparare a memoria" la casistica ma di capire le relazioni del grafico con limiti e derivate.

Uno studio più completo delle funzioni, ovvero – in pratica – del loro grafico, verrà fatto in seguito, comprendente la ricerca dei minimi e dei massimi, e altro.

Tipo A: $\exists \lim_{x\to+\infty}$

Sottotipo A1 – con infinite oscillazioni, limite $+\infty$
Poco rilevanti.
Esempio:

$$x + 2\sin x$$

Sottotipo A2 – limite finito negativo o $-\infty$
Poco rilevanti.
Esempi:

$$-\arctan x \qquad \log_b x \quad 0 < b < 1.$$

Sottotipo A3 – con infinite oscillazioni, limite 0 o numero positivo

Esempi:

$$\frac{\sin x}{x} \qquad 100 + \frac{\sin x}{x}$$

$f(x) \geq 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$

Sottotipo A4 – Funzioni prima decrescenti e poi crescenti

Sottotipo A4a – con derivata che tende
a $+\infty$ per $x \to +\infty$
a $-\infty$ per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ (e allora $f(x)$ ha limite $+\infty$)
$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ (e allora $f(x)$ ha limite $+\infty$)
Esempi:

$$x^2 \qquad x^4$$

Sottotipo A4b – con derivata che tende a 0 per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

Esempio con limite $+\infty$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$:

$$\ln|x|$$

Esempio con limiti finiti (uguali) er $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$:

$$-\frac{1}{x^2}$$ *link<– al calcolo della derivata*

E si veda su WolframAlpha: `Plot -1/x^2 and D[-1/x^2]`

Sottotipo A4c – con derivata che tende
a $L > 0$ per $x \to +\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L > 0$ ([88])
a $-L$ per $x \to -\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -L$ ([89])
(L numero reale).
Esempio:

(ramo d'iperbole) $\sqrt{1+x^2}$ *link<– al calcolo della derivata*

E si veda su WolframAlpha: `Plot Sqrt[1+x^2] and D[Sqrt[1+x^2]]`

Da adesso, con qualche piccola perdita, in A consideriamo solo funzioni definitivamente non negative

$f(x) > 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$

Sottotipo A5 – con 1 o più "campane" con limiti 0 a $\pm\infty$
Sono le funzioni principali del Calcolo delle Probabilità e della Statistica.
Verificano queste condizioni (comunque non bastevoli a caratterizzarle)

$$f(x) \geq 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(t) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(t) = 0 \tag{11}$$

[88] E allora (teorema) $f(x)$ ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$.
[89] E allora (teorema) $f(x)$ ha limite $+\infty$ per $x \to -\infty$.

([90])

Praticamente dietro quasi ogni fenomeno della realtà sensibile c'è in qualche modo una funzione più o meno a campana. Imparare a riconoscere queste configurazioni a campana aumenta enormemente la comprensione della realtà.

La campana può avere 2 significati principali: una densità, coi suoi casi estremi rari e quelli medi più comuni, oppure, se in ascissa abbiamo il tempo, talvolta rappresenta (quantitativamente) la classica "parabola della vita", valida anche per una comunità microbica, per la potenza dell'Impero Romano, per la concentrazione di un farmaco immesso nel sangue, o quant'altro: sorgere, ascendere, declinare, finire.

Qua stiamo parlando di curve "più o meno a campana" mentre con "curva a campana" *di solito* si intende proprio la *campana gaussiana*, grafico della *densità normale standard* $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Curve più o meno a campana del primo tipo, cioè densità, (della

[90] **Sottotipo A5a – con 1 "campana" e con limiti 0 a ±∞**
Sono il caso più importante della Statistica.
Esempi:

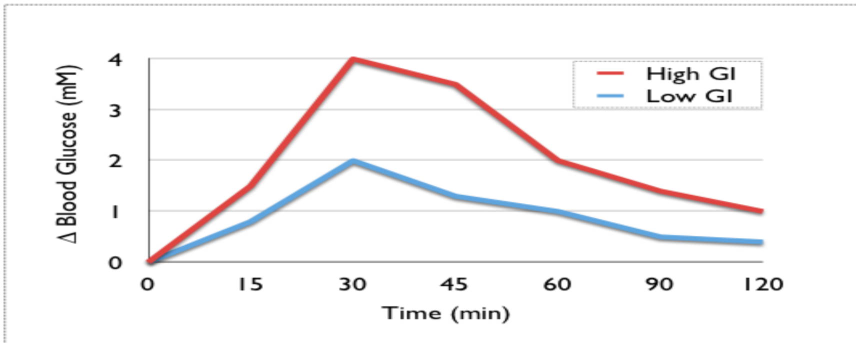
$$\text{densità di Cauchy: } \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$\underline{\text{densità normale standard}}\text{: } \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

e densità log-normali.
Sottotipo A5b – con più "campane" con limiti 0 a ±∞
Per esempio le densità bimodali. Il caso "capriccioso". Comunque verificano le (11).

Microbiologia) sono in questo link->.

Curva più o meno a campana del secondo tipo, cioè evoluzioni di una quantità nel tempo, è in questa figura



Un'altra, (della Microbiologia) è in questo link-> e un altro (della Farmacocinetica) in questo link-> e un altro a pagina 44 di questo link->.

Da adesso, con qualche piccola perdita, in A consideriamo solo funzioni definitivamente positive aventi derivata > 0 oppure < 0 nel dominio (e allora crescenti o decrescenti nel dominio)

(91)

Sottotipo A6a – derivata costante non nulla

$f'(x) = m = cost \neq 0$

Grafico: retta obliqua.

Equazione:

$$f(x) = m\,x + q, \qquad m \neq 0$$

È il tipo principale di funzione che ricorre in Farmacia e nelle altre Scienze Applicate. Le applicazioni sono pressochè infinite.

Limite $+\infty$ se $m > 0$ e $-\infty$ se $m < 0$.

Sottotipo A6b – derivata che tende a $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

La funzione cresce sempre più e (teorema) va a $+\infty$.

[91] Stiamo perdendo per esempio $-x^2$.

Esempi:

$$x^3, \quad \mathrm{e}^x$$

Sottotipo A6c – derivata positiva che tende a 0.
$f(x) \geq 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$
$f'(x) > 0$
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
La funzione cresce sempre meno e (teorema) va a $+\infty$ oppure a un limite finito. (Non negativo come definitivamente è la funzione).
Esempi con limite $+\infty$:

$$\sqrt{x}, \quad \ln x$$

Esempi con limite finito:

$$\Phi(x) \quad \arctan x \qquad 1 - \mathrm{e}^{-x} \qquad 1 - \frac{1}{x}$$

e le prime 3 sono importanti in Calcolo delle Probabilità e Statistica.

Sottotipo A6d – derivata positiva che tende a un numero positivo.
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L > 0$, finito
La funzione (teorema) tende a $+\infty$.
Ma può farlo in modi alquanto vari, discriminati dalla derivata seconda e dalla ricerca degli asintoti.
Esempi:
Cresce sempre più e ha asintoto obliquo: $x + \mathrm{e}^{-x}$
Cresce sempre meno e ha asintoto obliquo: $x - \mathrm{e}^{-x}$
Cresce sempre più e non ha asintoto obliquo: $x - \ln x$
Cresce sempre meno e non ha asintoto obliquo: $x + \ln x$

Ultimo sottotipo, A7:

Da adesso, con qualche piccola perdita, in A consideriamo solo funzioni definitivamente positive aventi derivata negativa che tende a 0

$f(x) > 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$
$f'(x) < 0$
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
La funzione decresce sempre meno e (teorema) ha limite ≥ 0.
Esempi con limite 0:

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x^2} \qquad \mathrm{e}^{-x}$$

Esempi con limite > 0:

$$3+\frac{1}{x} \qquad 4+\frac{1}{x} \qquad 5+\mathrm{e}^{-x}.$$

Tipo B: $\nexists \lim_{x\to+\infty}$

Sottotipo B1 – Grafico “oscillante” con “campate” ugualmente larghe

Sottotipo B1a: limitate

Esempi:

$$\sin x \qquad \cos x$$

Sottotipo B1b: illimitate
Poco rilevanti per noi.
Esempio:

$$\mathrm{e}^x \sin x$$

Sottotipo B2 – Grafico “oscillante” con “campate” non ugualmente larghe
Poco rilevanti per noi.
Esempio:

$$\sin x^2$$

Sottotipo B3 – Grafico “oscillante” senza vere “campate” distinguibili
Poco rilevanti per noi, ma rilevantissime in altra teoria.
Esempio:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Derivate delle funzioni elementari reali
Tutte queste formule valgono nell'intersezione dei domini della funzione derivanda e della funzione derivata. Per esempio $D \ln x = \frac{1}{x}$ vale per $x > 0$ sebbene $\frac{1}{x}$ esista anche per $x < 0$, e $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ vale per $x > 0$ sebbene la derivanda $\sqrt{x}$ esista anche per $x = 0$.

$$
\begin{array}{llcll}
\forall c & D\,c & = & 0 & \\
 & D\,x & = & 1 & \\
 & D\,x^n & = & n\,x^{n-1},\ n \text{ intero,} & \text{in particolare:} \\
 & & & & Dx^2 = 2x \\
 & & & & D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \\
 & D\,x^\alpha & = & \alpha\,x^{\alpha-1} \text{ con } x > 0 & \text{e } \alpha \text{ reale non intero,} \\
 & & & \quad\text{in particolare} & D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 & D\sin x & = & \cos x & \\
 & D\cos x & = & -\sin x & \\
 & D\tan x & = & \frac{1}{\cos^2 x} & = 1 + \tan^2 x \\
 & D\arctan x & = & \frac{1}{1+x^2} & \\
 & D\,\mathrm{e}^x & = & \mathrm{e}^x & \\
 & D\,10^x & = & \frac{10^x}{\lg \mathrm{e}} & \\
 & D\ln x & = & \frac{1}{x} & \text{e vale anche } D\ln|x| = \frac{1}{x} \\
 & D\lg x & = & \frac{\lg \mathrm{e}}{x} & \text{e vale anche } D\lg|x| = \frac{\lg \mathrm{e}}{x} \\
(\text{e} & D\,\Phi(x) & = & \phi(x) & \text{ma } \Phi(x) \text{ non è elementare).}
\end{array}
$$

([92])

[92]Per lo studente interessato, ad un livello superiore si considerano anche:

$$\begin{array}{llcll}
\forall a>0 & D\,a^x & = & a^x \ln a & \\
\forall\, 0<b\neq 1 & D\,\log_b x & = & \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln b} & \\
 & D\,\mathrm{cotan}\,x & = & -\frac{1}{\sin^2 x} & = -1-\mathrm{cotan}^2 x [= -\mathrm{cosec}^2\, x] \\
 & D\,\arcsin x & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\,\arccos x & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\,\sinh x & = & \cosh x & \\
 & D\,\cosh x & = & \sinh x & \\
 & D\,\tanh x & = & \frac{1}{\cosh^2 x} & [= 1-\tanh^2 x = \mathrm{sech}^2\, x] \\
 & D\,\mathrm{arsinh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \\
 & D\,\mathrm{arcosh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \\
 & D\,\mathrm{artanh}\,x & = & \frac{1}{1-x^2} & [= D\,\mathrm{arcoth}\,x] \\
 & D\,|x| & = & \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} & [= \mathrm{sgn}\,x,\ \forall\, x\neq 0]
\end{array}$$

25 Prime applicazioni del Calcolo Differenziale

25.1 Tangente, de/crescenza, min/max, concavità, flessi

Definizioni. Si dice che f *è crescente in* x_0 se in un intervall(in)o a sinistra di x_0 vale meno che in x_0 e in un intervall(in)o a destra di x_0 vale più che in x_0. (In simboli è alquanto complicato). Con ovvi mutamenti si definisce la funzione decrescente in un punto. Si dice che f è *crescente in un insieme* E se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Se E è un intervallo ciò equivale (si dimostra) alla crescenza in ogni punto di E. Simile equivalenza con la decrescenza, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, sugli intervalli.

Il punto x_0 si dice di *punto minimo relativo* per f se essa in un intervall(in)o a sinistra di x_0 e in un intervall(in)o a destra di x_0 vale *più* che in x_0. Se *meno*, si ha un *punto di massimo relativo.* Se $\forall\, x \in \mathrm{dom} f$ è $f(x) \geq f(x_0)$, $f(x_0)$ si dice *minimo assoluto* di f, e *massimo assoluto* se $\forall\, x \in \mathrm{dom} f$ è $f(x) \leq f(x_0)$.
Attenzione a distinguere x_0 punto di massimo relativo da $f(x_0)$ massimo relativo. E similmente coi minimi.
Per esempio per il coseno 0 è punto di massimo relativo (e anche assoluto) e 1 è massimo relativo (e anche assoluto).

Il punto x_0 si dice di *punto di flesso* per f se essa in un intervall(in)o a sinistra di x_0 *volge la concavità verso l'alto* e in un intervall(in)o a destra verso il basso, oppure viceversa; $(x_0, f(x_0)))$ si dice *flesso.* Non diamo la complicata definizione analitica di *volgere la concavità*, concetto comunque ovvio se riferito al grafico.

Teorema 1. La **tangente** al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e allora si ha l'*approssimazione lineare*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall\, x \approx x_0$$

ovvero con $x = x_0 + h$ per h piccolissimo in valore assoluto

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \qquad |h| \ll \ .$$

Per esempio per $x \approx 0$ è $\sin x \approx x$, $\ln(1 + x) \approx x$, $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

Teorema 2. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decrescente in } x_0\,.$$

(Se $f'(x_0) = 0$ allora f in x_0 può essere crescente o decrescente o nè crescente nè decrescente: si considerino x^3, $-x^3$, x^2).

Teorema 3. Se f è crescente prima di x_0 e decrescente dopo x_0 allora x_0 è un punto di massimo relativo. Similmente scambiando *crescente* e *decrescente* si ha un **punto di minimo relativo**.

Teorema 4. Se $f''(x) > 0$ in un intervallo, in esso $f(x)$ *volge la* ***concavità*** *verso l'alto*, e verso il basso se < 0.

25.2 Approssimazioni delle potenze presso l'unità

L'approssimazione lineare prima detta

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \qquad |h| \ll$$

applicata in $x_0 = 1$

$$f(1 + h) \approx f(1) + f'(1) \cdot h \qquad |h| \ll$$

per le potenze della x

$$x^\alpha \text{ che in 1 vale 1} \quad \text{Derivata: } \alpha\, x^{\alpha-1} \quad \text{che in 1 vale } \alpha$$

dà

$$(1 + h)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot h \qquad |h| \ll$$

ottenendosi queste approssimazioni dei quadrati e dei cubi, e avanti

x_0 quadrato cubo
1.01 1.02 1.03
1.001 1.002 1.003
1.0001 1.0002 1.0003
1 parte su n 2 parti si n 3 parti su n.
Più in generale una funzione

$$c\,x^{\alpha}$$

in cui la x si assoggetti a un aumento percentuale di *pochi* punti percentuali, diciamo m punti percentuali, per esempio 2,

aumenta circa di $\alpha\,m$ punti percentuali

per α piccolo in valore assoluto. Similmente con le diminuzioni. Per esempio $\frac{4}{3}\pi r^3$ aumenta circa del 12% all'aumentare del 4% della r; e similmente per la diminuzione. Tutto questo vale anche con α negativo, salvo che un aumento del, per esempio, −6%, è in effetti una diminuzione; per esempio $c\,x^{-2}$ diminuisce circa del 6% all'aumentare del 3% della x.
L'approssimazione è tanto migliore quanto più m **e** $|\alpha|$ **sono piccoli.** Con $m = 10$ e $\alpha = 3$ dà 30 invece di 33.1.
Tutto similmente coi "per mille", con maggior precisione.

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del $m\%$ il lato di una farmacia quadrata, l'area aumenta/diminuisce circa del $2\,m\%$

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del $m\%$ il raggio ovvero il diametro di una pillola, il volume ovvero il peso aumenta/diminuisce circa del $3\,m\%$

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del $m\%$ l'area di una farmacia quadrata, il lato aumenta/diminuisce circa del $\frac{1}{2}\,m\%$ (radice quadrata, $\alpha = 1/2$)

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del $m\%$ il volume di una pillola scferica, il diametro ovvero il raggio aumenta/diminuisce circa del $\frac{1}{3}m\%$ (radice cubica, $\alpha = 1/3$)

Fissato α coi valori usuali 2, 3, 1/2 oppure 1/3, e i loro opposti, tutto questo rimane vero coi "per mille", e ogni altra proporzione, purchè la variazione sia complessivamente piccola; con 1 parte su 20 funziona bene, e diventano

2 parti su 20 col quadrato

3 parti su 20 col cubo

1 parte su 40 con la radice quadrata,

1 parte su 60 con la radice cubica.

Per esempio aumentando il volume di una sfera di 1 parte su 20 il raggio, che è proporzionale alla radice cubica del volume, aumenta di circa 1 parte su 60.
Invece con 1 parte su 3 l'approssimazione non funziona bene. Diciamo – tanto per dire – da 1 parte su 10 "in poi", che corrisponde al 10%, per potenze in valore assoluto non superiori a 3; e già qua la bontà dell'approssimazione è dubbia: col 10% e $\alpha = 3$ dà 30% invece di 33.1%.

Tutto questo rimane vero, salvo modificazioni linguistiche, anche per forme diverse, purchè si conservi la similitudine geometrica, cioè tutte le dimensioni variano allo stesso modo.
Così un flacone di medicinale, all'aumentare del 10% delle sue dimensioni lineari (diametro, altezza) conservando la forma, vedrà aumentare il suo volume circa del 30%. Similmente per il diminuire. Un calcolo più preciso per il 10%, che non è poi tanto piccolo numero, darebbe circa 33%. Con 1% viene abbastanza bene 3%.

25.3 Regola di de l'Hospital

Detti u_0 e l due numeri o $+\infty$ o $-\infty$, se per $x \to u_0$

$$\left.\begin{array}{rl} & f(x) \to 0 \\ \wedge & g(x) \to 0 \\ \wedge & \frac{f'(x)}{g'(x)} \to l \end{array}\right| \quad \vee \quad \left|\begin{array}{rl} & f(x) \to \pm\infty \\ \wedge & g(x) \to \pm\infty \\ \wedge & \frac{f'(x)}{g'(x)} \to l \end{array}\right.$$

si dimostra (teorema detto Regola di de l'Hospital) che

$$\lim_{x \to u_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

se f e g sono "sufficientemente regolari" (come sono in genere le funzioni che ricorrono nelle Scienze Applicate, e negli esercizi elementari, anche di questa trattazione).
Si noti che l'eventuale inesistenza del limite del rapporto delle derivate non esclude l'esistenza del limite del rapporto iniziale.
Esempi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \left(= \frac{0}{0} \right) <=^H \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

che si chiama **secondo limite fondamentale** (e per esso non vale *come dimostrazione* il calcolo soprastante, esiste una dimostrazione specifica; e proprio da quel limite si dimostra che $D \sin x = \cos x$, che quassù viene utilizzato).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) <=^H \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = +\infty \,.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) <=^H \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \,.$$

Da questi 2 limiti si ha questa sequenza di funzioni "sempre più infinite" in $+\infty$, cioè tali che il rapporto di una di esse con una precedente tende a $+\infty$: (lentissima) $\ln x$, x, e^x (velocissima). Il $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5\mathrm{e}^x + \pi}{7x^3 + 3x^2 + 1}$ si risolverà con 3 applicazioni successive del teorema. Invece $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \sin x + \cos x}{5x - \sin x + 3\cos x}$ semplificando per x.

25.4 Asintoti

Definizioni degli asintoti. Se x_0 è un numero [finito] e

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta verticale $x = x_0$ si dice ***asintoto verticale*** per f. (Ma alcuni Autori ritengono inutile questa definizione).
Se esistono 2 numeri [finiti] m e q tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = q$$

allora la retta $y = mx + q$ si dice ***asintoto destro*** (oppure: *per* $x \to +\infty$) per f, in particolare *obliquo* se $m \neq 0$ e *orizzontale* se $m = 0$. Con $x \to -\infty$ si definisce l'eventuale ***asintoto sinistro***.
Esempi. La funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ ha asintoto verticale $x = 0$ e asintoto orizzontale $y = 0$: si trovano coi limiti a 0^+, $-\infty$ e $+\infty$.
La funzione $\tan x$ ha gli infiniti asintoti verticali $x = k\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$.
Si troverà che $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro per $\arctan x$, e $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.
Si troverà che $y = 1$ è asintoto orizzontale destro per $\tanh x$, e $y = -1$ è asintoto orizzontale sinistro.
Si trova che $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro per $\ln(1 + e^x)$ e $y = x$ è asintoto obliquo destro.
Per $f(x) := \sqrt{x}$ si troverebbe $m = 0$ ma q infinito e allora non esiste asintoto destro. (E sinistro non c'è perchè $\mathrm{dom} f = [0, +\infty[$).
Con la Regola di de l'Hospital per $\ln x$ si trova $m = 0$ ma q infinito e allora non esiste asintoto destro. (Sinistro escluso dal dominio).
La funzione $f(x) := \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ ha asintoto verticale $x = 0$ che si trova col limite per $x \to 0^+$, e asintoto orizzontale [destro e sinistro] $y = 1$.
Esercizi. Si trovino i 2 asintoti di questa funzione considerata da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Asymptote*:

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x}$$

e con essi e qualche valore si disegni un grafico approssimativo. Similmente per la reciproca, che ha 3 asintoti.

26 Teoria dello studio di funzione

26.1 La "ricetta" per lo studio di funzione; sup e inf

Fermo restando che una funzione molto "capricciosa" non può essere studiata con metodi elementari, è però vero che un'infinità di funzioni del tipo di quelle che tendono a capitare nelle Scienze Applicate può validamente studiarsi coi metodi visti finora.

Per quanto possibile si cercherà di seguire questa "ricetta":

1) Dominio
2) Simmetrie e periodicità
3) Zeri [equazione $f(x) = 0$]
4) Segni [disequazione $f(x) > 0$]
5) Limiti [negli "estremi" (in senso lato) del dominio]
6) Asintoti
7) Derivata prima
8) Limiti della derivata prima [non se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$]
9) Crescenza/decrescenza, max/min, sup/inf [diseq. $f'(x)>0$]
10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]
11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi
12) Disegno del grafico

Le funzioni 2π-periodiche, si studino in $[0, 2\pi[$ o meglio $]-\pi, \pi]$. Analoghe riduzioni del dominio si attuino per altre periodicità.

Resta da vedere cosa sono $\sup f$, e $\inf f$. Se una funzione ha un massimo assoluto $\max f$, esso è l'*estremo superiore* $\sup f$. Tuttavia, consideriamo la funzione $\arctan x$. Essa per $x \to +\infty$ tende a $\frac{\pi}{2}$ ma senza mai raggiungerlo: vi si avvicina indefinitamente rimanendo sempre minore. In questo caso $\frac{\pi}{2}$ non è certo max – infatti per essere max ci vorrebbe un x_0 tale che arctan là vale prorio quel valore, il che non succede mai – ma si dice che è estremo superiore. Similmente, si potrebbe definire l'estremo inferiore $\inf f$; in questo caso $\inf f = -\frac{\pi}{2}$. Ovvio poi è il significato di $\sup f = +\infty$, e di $\inf f = -\infty$.

Le definizioni formali sono piuttosto complicate e non le daremo.

Esempio: la campana gaussiana.

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1) Dominio

$\mathbb{R}$

2) Simmetrie e periodicità

$f(-x) = f(x)$, allora la funzione è pari e allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

(Da ora basterebbe studiarla per $x \geq 0$, volendo "risparmiare").

3) Zeri [equazione $f(x) = 0$]

La funzione non ha zeri

4) Segni [disequazione $f(x) > 0$]

$f(x) > 0 \ \forall\, x \in dom\, f$

5) Limiti [negli "estremi" (in senso lato) del dominio]

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

6) Asintoti

$y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$

7) Derivata prima

$$f'(x) = D\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,D\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,D\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

8) Limiti della derivata prima [non se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$]

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{x^2}{2}}} = \left(=\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{<=}$$

con de L'Hospital

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{2\,\pi}\; e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x} = 0$$

9) Crescenza/decrescenza, max/min, sup/inf [diseq. $f'(x)>0$]

$$-\frac{x}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \quad \Big/ \cdot \frac{\sqrt{2\,\pi}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} > 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

'schema formale di crescenza e decrescenza"

```
..........0..........
++++++++++|---------- f'(x) > 0
.....↗...|...↘.....
```

$f'(x) > 0$ per $x < 0$, funzione crescente
$f'(x) < 0$ per $x > 0$, funzione decrescente
$x = 0$ punto di max rel. e ass.
max $f = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}$
inf $f = 0$

10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]
Con qualche calcolo si trova

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}(x^2 - 1)$$

???????????
11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi
12) Disegno del grafico

Esempio: il Potenziale di Lennard-Jones.

(È una funzione della Termodinamica, collegata alla Legge di van der Waals).

$$f(x) := \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6}$$

(In effetti rappresenta un potenziale solo per $x > 0$).
1) Dominio
$x \neq 0$
2) Simmetrie e periodicità
$f(-x) = f(x)$, allora la funzione è pari e allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Da adesso basta studiarla per $x \geq 0$.
3) Zeri [equazione $f(x) = 0$]
Equazione

$$\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} = 0$$

$$\frac{1}{x^{12}} = \frac{2}{x^6} \quad \Big/ \cdot x^{12} \neq 0 \, nel \, dominio$$

$$1 = 2\,x^6 \quad \Big/ : 2$$

$$x^6 = 2^{-1} \quad \Big/^{\wedge\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x = \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$x = 2^{-\frac{1}{6}}$$

4) Segni [disequazione $f(x) > 0$]

$$\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} > 0$$

$$\frac{1}{x^{12}} > \frac{2}{x^6} \quad \Big/ \cdot x^{12} > 0 \, per \; x > 0$$

$$1 > 2\,x^6 \quad \Big/ : 2$$

$$x^6 < 2^{-1} \quad \Big/^{\wedge\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x < \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$f(x) > 0$ per $0 < x < 2^{-\frac{1}{6}}$ (e poi sarà simmetricamente per $x < 0$)

5) Limiti [negli "estremi" (in senso lato) del dominio **(ora** $\mathbb{R}^+$**)**]

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^{12}}-\frac{2}{x^6}\right)(=+\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^6}\cdot\left(\frac{1}{x^6}-2\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

6) Asintoti

$x=0$ asintoto verticale

$y=0$ asintoto orizzontale per $x\to+\infty$

7) Derivata prima

$$D\left(\frac{1}{x^{12}}-\frac{2}{x^6}\right)=$$

$$=D\left(x^{-12}-2\,x^{-6}\right)=$$

$$=-12\,x^{-13}-2\cdot(-6)\,x^{-7}=$$

$$=-\frac{12}{x^{13}}+\frac{12}{x^7}$$

8) Limiti della derivata prima [non se $\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$]

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{12}{x^{13}}+\frac{12}{x^7}\right)(=-\infty+\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{12}{x^7}\cdot\left(-\frac{1}{x^6}+1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{12}{x^{13}}+\frac{12}{x^7}\right)=0$$

9) Crescenza/decrescenza, max/min, sup/inf [diseq. $f'(x)>0$]

$$-\frac{12}{x^{13}}+\frac{12}{x^7}>0 \quad \Big/\cdot\frac{x^{13}}{12}>0\,per\;x>0$$

$$-1+x^6>0$$

$$x^6>1 \quad \Big/^{\wedge\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x>1$$

"schema formale di crescenza e decrescenza"

```
0..........1..........
|----------|++++++++++ f'(x) > 0
|.....↘...|...↗.....
```

$f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$, funzione decrescente
$f'(x) > 0$ per $x > 1$, funzione crescente
$x = 1$ punto di min rel. e ass.
$\min f = f(1) = \frac{1}{1} - \frac{2}{1} = -1$
$\sup f = +\infty$

10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]

$$f''(x) = D\,f'(x) = D\,(-12\,x^{-13} + 12\,x^{-7}) =$$

$$f = -12\,(-13)\,x^{-14} + 12\,(-7)\,x^{-8} =$$

$$= 156\,x^{-14} - 84\,x^{-8} =$$

$$= \frac{156}{x^{14}} - \frac{84}{x^{8}}$$

Disequazione $f''(x) > 0$

$$\frac{156}{x^{14}} - \frac{84}{x^{8}} > 0 \quad \Big/ \cdot \frac{x^{14}}{12} > 0\,per\; x > 0$$

$$13 - 7\,x^6 > 0$$

$$13 > 7\,x^6 \quad \Big/ : 7 > 0$$

$$\frac{13}{7} > x^6 \quad \Big/^{\wedge\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x < \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}} \text{ (è una radice sesta)}$$

"schema formale di concavità e convessità"

0 . . . . $\left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}$.............

|++++++++++|--------- $f'(x) > 0$

| . . . . . . ∪ . . . | . . . ∩ . . . . .

$f''(x) > 0$ per $0 < x < \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}$, concavità verso l'alto

$f''(x) < 0$ per $x > \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}$, concavità verso in basso

$x = \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}$ punto di flesso

11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi

$$f(2) = \frac{1}{2^{12}} - \frac{2}{2^{6}} =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot 2^{6}}{2^{12}} = \frac{1 - 128}{4\,096} = -\frac{127}{4\,096}$$

$$f(1/2) = f(2^{-1}) = \frac{1}{2^{-12}} - \frac{2}{2^{-6}} =$$

$$= 2^{12} - 2 \cdot 2^{6} = 4\,096 - 128 = 3\,068$$

12) Disegno del grafico

????

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Teorema 2. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decrescente in } x_0\,.$$

(Se $f'(x_0) = 0$ allora f in x_0 può essere crescente o decrescente o nè crescente nè decrescente: si considerino x^3, $-x^3$ e x^2 in 0).

Teorema 3. Se f è crescente prima di x_0 e decrescente dopo x_0 allora x_0 è un punto di massimo relativo. Similmente scambiando *crescente* e *decrescente* si ha un **punto di minimo relativo**.

Teorema 4. Se $f''(x) > 0$ in un intervallo, in esso $f(x)$ *volge la* ***concavità*** *verso l'alto*, e verso il basso se < 0.

* *

Più in generale una funzione

$$c\,x^{\alpha}$$

in cui la x si assoggetti a un aumento percentuale di *pochi* punti percentuali, diciamo m punti percentuali, per esempio 2,

aumenta circa di $\alpha\, m$ punti percentuali

per α piccolo in valore assoluto. Similmente con le diminuzioni. Per esempio $\frac{4}{3}\pi r^3$ aumenta circa del 12% all'aumentare del 4% della r; e similmente per la diminuzione. Tutto questo vale anche con α negativo, salvo che un aumento del, per esempio, −6%, è in effetti una diminuzione; per esempio $c\,x^{-2}$ diminuisce circa del 6% all'aumentare del 3% della x.

L'approssimazione è tanto migliore quanto più m **e** $|\alpha|$ **sono piccoli.** Con $m = 10$ e $\alpha = 3$ dà 30 invece di 33.1.

Tutto similmente coi "per mille", con maggior precisione.

26.2 Esercizi di studio di funzione

Studiare queste 3 **Funzioni Iperboliche**:

$$
\begin{array}{lll}
\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} & & \textit{seno iperbolico} \\
\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} & & \textit{coseno ip.} \\
\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & & \textit{tangente ip.}
\end{array}
$$

Le funzioni iperboliche hanno un interesse di per sè, tendendo a ricorrere nella Fisica, e hanno anche uno speciale interesse nel Calcolo Differenziale.

Studiare questa funzione di interesse nel Calcolo delle Probabilità:

- $$f(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

Studiare queste altre funzioni:

- $$f(x) := \frac{x}{2 + x^2}$$
- $$f(x) := \ln(x^2 - 1)$$

VI – Serie numeriche e integrali

27 Serie geometrica e cenni alle altre serie

Essenzialmente le serie sono in qualche modo delle "somme infinite". Da definire.
Estenderemo l'uso del simbolo di sommatoria $\sum$ dal caso finito a quello con infiniti termini: essenzialmente, vogliamo occuparci di $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ con infiniti termini.

27.1 Introduzione alle serie numeriche

Definizione di serie (numerica). In questa trattazione elementare, una serie (numerica) è una scrittura come queste

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_k + \ldots \quad \textit{il primo indice poteva essere diverso da 0} \tag{12}$$

$$\text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \textit{anche qua, ovvio} \tag{13}$$

$$\text{per esempio} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ ovvero } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{14}$$

e questa dell'esempio si chiama *serie armonica* mentre quest'altra

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{3}{2^k} + \ldots \text{ ovvero } \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{15}$$

è una (particolare) *serie geometrica* di *ragione* $\frac{1}{2}$.

Definizione di somma di una serie.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \quad \text{se } \exists\,. \tag{16}$$

Questa formula (16) ci dice che la *somma della serie* al primo membro è il **limite**, se esiste (finito o infinito) della

ridotta o *somma parziale* $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. ← (normale) numero.

Nota sull'ambiguità notazionale. Le 2 scritture equivalenti

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{e} \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots \tag{17}$$

denotano sia la *serie* (scrittura), che l'eventuale sua *somma* (numero oppure $+\infty$ oppure $-\infty$).

La teoria delle serie è molto ampia[93].

27.2 Il numero di Nepero

Il numero e che abbiamo già visto, base dei logaritmi naturali e valore di un Limite Fondamentale, è

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \approx 2.718$$

[93]Per lo studente interessato, ecco qualche approfondimento.

***Carattere* delle serie, "tipi" di serie, e serie particolari.**
• Serie *convergente*, con somma s: il limite delle somme parziali è il numero $s \in \mathbb{R}$. Per esempio la *serie ciclometrica*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \ldots = \frac{\pi}{4}\,. \tag{18}$$

• *Serie non convergenti*: quelle *indeterminate* ($\nexists$ limite) come

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^k + \ldots \tag{19}$$

(la somma parziale vale alternatamente 1 e 0), quelle *divergenti a* $+\infty$ come $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ e quelle *divergenti a* $-\infty$.
⋆ Serie *a termini positivi*: $a_k > 0$ per ogni k. (Similmente le serie a termini *non negativi* se ≥ 0, e negativi, e non positivi se ≤ 0).
⋆ Serie *a termini di segno alternato*, con ovvio significato.
• *Serie geometrica di ragione* $r \in \mathbb{R}$, fissiamo le idee con $a > 0$:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & se\ |r| < 1 \\ +\infty & se\ r \geq 1 \\ \nexists & se\ r \leq -1 \end{cases} \tag{20}$$

Nel terzo caso la serie è indeterminata. Per $a<0$ vale il Teor. 1.
• *Serie esponenziale.* $1 + a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^k}{k!} + \ldots = \mathrm{e}^a$. (Si dimostra).
• La *serie armonica*, prima vista: diverge a $+\infty$.
Teorema 1. $ca_{n_0} + ca_{n_0+1} + \ldots + ca_k + \ldots = c(a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_k + \ldots)$ con l'ovvio significato se la serie in parentesi diverge a $+\infty$.
Teorema 2. Se $a_k \not\to 0$ allora la serie è non convergente.
Teorema 3. Se ogni $a_k \geq 0 \Rightarrow$ la serie converge o diverge a $+\infty$.
Teorema 4. (Di Leibniz). Se in una serie a termini di segno alternato $|a_k| \to 0$ e $|a_k|$ è decrescente anche solo in senso debole, cioè $|a_{k+1}| \leq |a_k|$, allora la serie converge.
In particolare $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \ldots = \ln 2$, *serie di Leibniz.*
Si possono considerare interessanti esercizi↑.

e adesso siamo in grado di comprenderlo come somma di una serie che lo definisce. (In generale, in Analisi Matematica viene invece definito dal Limite Fondamentale, e solo dopo si dimostra la sua serie).

27.3 Serie geometrica

Ci occuperemo ancora della sola *serie geometrica di ragione r compresa fra 0 e 1 esclusi*, che ricorre ampiamente nel Calcolo delle Probabilità:

$$\begin{aligned} & a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^k + \ldots = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = \frac{a}{1-r} \\ & a \in \mathbb{R} \\ & 0 < r < 1 \end{aligned} \qquad (21)$$

(La formula vale anche per $-1 < r < 1$ ma ci interessano solo i valori $0 < r < 1$, e poi il caso $r = 0$ è ovvio).
Nel Calcolo delle Probabilità è sempre $a > 0$.

Seppure il Calcolo delle Probabilità lo tratteremo in seguito, ritenendo noto qualche concetto dagli studi scolastici vediamo un esempio di applicazione della serie geometrica, per mostrarne l'utilià.

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$
$\ast \approx$ % Una certa affezione, quando insorge ha una durata in giorni (interi) con probabilità
$\frac{1}{2}$ probabilità di durare 1 giorno
$\frac{1}{4}$ probabilità di durare 2 giorni
$\frac{1}{8}$ probabilità di durare 3 giorni
...
$\frac{1}{2^n}$ probabilità di durare n giorni.
(Che si chiama *densità geometrica iniziante da 1 di parametro* $\frac{1}{2}$).
Qual è la probabilità che duri un numero pari di giorni?

Svolgimento

Detta X la durata dell'affezione, scriviamo (usando la notazione delle variabili aleatorie, che tratteremo in seguito, ma che comunque qua appare di interpretazione ovvia)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \dots & \frac{1}{2^n} \dots \end{pmatrix}$$

$$P(X\ pari) = P(X \in \{2, 4, 6...\}) =$$

$$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \dots =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

che si riconosce esser serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{4}$ (perchè ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

(Si noti che allora è più probabile che duri un numero dispari di giorni. Questo rimane vero con qualunque valore di $p \in]0, 1[$, non solo $\frac{1}{2}$, e perfino con qualunque densità decrescente definita su 1,2,3... A Trieste si dice che il vento Bora tende a durare un numero dispari di giorni).

ESERCIZIO$_\mu$

$\star \approx$ Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}3^n$.

SVOLGIMENTO

Ricordando la somma della serie geometrica di ragione a fra 0 e 1 esclusi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\, r^k = \frac{a}{1-r} \qquad \left(a \in \mathbb{R}, \quad 0 < r < 1\right)$$

si ha, con $a = 1$ e $r = 0{,}3$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0{,}3^k = \frac{1}{1-0{,}3} = \frac{1}{1-\frac{3}{10}} = \frac{1}{\frac{10-3}{10}} = \frac{10}{7}$$

che è proprio quanto dobbiamo calcolare salvo il termine 0-esimo, e allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0{,}3^k = -0{,}3^0 + \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}3^k = -1 + \frac{10}{7} = \frac{-7+10}{7} =$$

$$\boxed{\tfrac{3}{7} \approx 0{,}428\,571}$$

27.4 Nota sulla precisione dei numeri

In questa trattazione matematica in generale diamo i risultati parecchie cifre significative. Il che è una buona cosa da un punto di vista matematico. In Farmacia ci sono aspetti pratici, che in questa trattazione elementare non consideriamo, per i quali le approssimazioni usate in generale potrebbero essere molto meno precise. Difficilmente si leggerà che un paziente ha 33.33% di sopravvivere. E nessuna farmacia ordinerà al fornitore 8 264.46mg di un principio attivo.

Dietro tutto ciò ci stanno questioni <u>non matematiche</u>, legate alla precisione delle misure e più in generale dei dati.

28 L'integrale indefinito

28.1 Introduzione all'integrale indefinito

L'integrale indefinito è in sostanza l'anti-derivata, utile in molte questioni:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\Leftarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = D\left(\arctan x + c\right).$$

(In qualche modo, il segno d'integrale può fare il "salto dell'uguale" trasformandosi in derivata, come un ln fa il "salto" trasformandosi in exp, per esempio $\ln x^2 = 3$ equivale a $x^2 = \mathrm{e}^3$).

Il termine "$+c$" ci ricorda che non solo $\arctan x$ ha derivata $\frac{1}{1+x^2}$, ma anche $\arctan x + 99$ o più qualunque numero reale c. Allora l'integrale indefinito è un insieme di funzioni. Ciascuna di esse si chiama *primitiva* di f. Abbiamo subito questi integrali indefiniti:

	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	=	$\arctan x + c$	
$\forall\, \alpha$	$\int \alpha\,dx$	=	$\alpha x + c$	in particolare: $\int 0\,dx = c$
	$\int \mathrm{e}^x\,dx$	=	$\mathrm{e}^x + c$	
	$\int \frac{1}{x}\,dx$	=	$\ln\lvert x\rvert + c$	
$\forall\, \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha\,dx$	=	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	in particolare $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$ $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$ $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$
	$\int \cos x\,dx$	=	$\sin x + c$	*Nota: non diamo alcun*
	$\int \sin x\,dx$	=	$-\cos x + c$	*significato al termine dx.*

Il $+c$ va inteso come la somma di una qualunque costante in ognuno degli intervalli massimali contenuti nel dominio dell'integranda([94]) ma senza errare troppo immaginiamo che sia 1 singola costante.

28.2 Approfondimenti ed esempi sull'integrale indefinito

Dalle proprietà (teoremi) delle derivate si hanno (non tutte in modo ovvio) queste 4 proprietà (teoremi) degli integrali indefiniti. Le prime 2 formule costituiscono la *linearità dell'integrale*:

$$\int \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \tag{22}$$

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \tag{23}$$

Integrazione per parti:

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx \tag{24}$$

Integrazione per sostituzione $t := mx + q$:

$$\int f(m\,x + q)\, dx = \frac{1}{m} \Big(\int f(t)\, dt \Big)_{t = m\,x + q} \quad \forall\, m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0. \tag{25}$$

(Una formula più complicata che non diamo permette una sostituzione più generale $t := g(x)$, ed è là che si dà senso al dx).

Esempi.

$\diamond$
$$\int (x^3 + 2\,x^2 + 3\,x)\, dx =$$
$$=^{(23)} \int x^3\, dx + \int 2\,x^2\, dx + \int 3\,x\, dx =$$
$$=^{(22)} \int x^3\, dx + 2 \int x^2\, dx + 3 \int x\, dx =$$
$$= \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

[94]Per esempio l'integrale indefinito di $\frac{1}{x}$ è $\ln |x| + c$ e il dominio dell'integranda è costituito dai 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ e per ciascuno di essi si avrà una costante da sommare a $\ln x$, in modo indipendente). Per esempio $\ln(-x) + 3$ per $x < 0$ e $\ln x + 5$ per $x > 0$.

$$\diamond \qquad \int (\sin x + 3\cos x + 7)\,dx =$$

$$=^{(23)} \int \sin x\,dx + \int 3\cos x\,dx + \int 7\,dx =$$

$$=^{(22)} (-\cos x + c_1) + 3\int \cos x\,dx + (7x + c_2) =$$

$$= (-\cos x + c_1) + 3\,(\sin x + c_3) + (7x + c_2) =$$

chiamiamo c la somma delle 3 costanti d'integrazione c_1, c_2 e c_3

$$= -\cos x + 3\sin x + 7x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

$$\diamond \qquad \int x\,\mathrm{e}^x\,dx =$$

poniamo $f(x) := e^x$ e $g(x) := x$ per integrare per parti $\mathrm{e}^x x$

$$=^{(24)} x\,\mathrm{e}^x - \int 1\cdot \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

$$\diamond \int \cos(2\,x + 3)\,dx =^{(25)}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int \cos(t)\,dx\Big)_{t=2\,x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sin(t)\Big)_{t=2\,x+3} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\,x + 3) + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Integrale del logaritmo naturale e decimale.

$$\int \ln x\,dx = \quad \text{moltiplichiamo per 1}$$

$$= \int 1\cdot \ln x\,dx = \quad \text{riconosciamo } D\,x = 1$$

$$= \int (D\,x)\cdot \ln x\,dx =^{(24)}$$

$$= x\,\ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\,\ln x - \int 1\,dx =$$

$$= x \ln x - x + c . \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Con questo procedimento e con la formula di cambiamento di base e con la (22) si calcoli l'integrale del logaritmo decimale.

Esercizi.

$$\int \pi \ln(\sqrt{2}\, x)^3 \, dx \qquad \int \pi^2 \lg x^{\sqrt{2}} \, dx \qquad \int \frac{x^2+3}{2x^2+2} \, dx$$

$$\int \pi \ln(\sqrt{2}x - 6)^3 \, dx \qquad \int \mathrm{e}^2 \lg(1-3x)^{\frac{1}{\pi}} \, dx$$

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Nota sull'ambiguità notazionale. Le 2 scritture equivalenti

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{e} \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots \tag{26}$$

denotano sia la *serie* (scrittura), che l'eventuale sua *somma* (numero oppure $+\infty$ oppure $-\infty$).

29 L'integrale definito

29.1 La questione dell'area sotto una curva

In un'infinità di questioni interessa conoscere l'area compresa fra il grafico di una funzione $f(x)$ e l'asse delle ascisse, da un numero a a un numero b su quell'asse. (Al limite, pure valori a o b infiniti).

Questo problema verrà risolto dall'integrale definito: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nel Calcolo delle Probabilità il concetto è di uso amplissimo.[95]

È usato nella Termodinamica, scienza utile nella fabbricazione dei farmaci: `link->`

Veniamo alla Farmacia. Leggiamo su Wikipedia[96] (in italiano), l'enciclopedia libera, alla voce *Area Under the Curve*,

---

[95] Nel Calcolo delle Probabilità l'area sotto il grafico di una *densità di probabilità di una variabile aleatoria* X, concetti che definiremo, rappresenterà la probabilità che $a \le X \le b$:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Si può cominciare a farsi un'idea con la *densità normale standard* $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, considerando il suo grafico. Per esempio con WolframAlpha

`Integrate[Exp[-t^2/2]/Sqrt[2Pi],{t,-2,2}]`

ci dà circa 95%, e un'interessante figura.

[96] Letto il 3 febbraio 2020

> L'area sotto la curva concentrazione/tempo o AUC (dalla dicitura inglese area under the time/concentration curve, ovvero area sottesa alla curva) è un parametro farmacocinetico dato dall'integrale in un grafico concentrazione/tempo (...)
> Tale parametro è fondamentale per poter descrivere l'effetto dei farmaci poichè riflette l'esposizione dei tessuti al farmaco nel tempo.
> L'AUC (da zero a infinito) rappresenta l'esposizione totale al farmaco in funzione del tempo (...)
> Per indicare l'AUC riferita ad un particolare intervallo temporale si utilizzano i pedici, ad esempio AUC_{4-8h} indica l'area sotto la curva nell'intervallo di tempo che va da 4 a 8 ore.

Cioè, e si veda la figura sulla citata pagina di Wikipedia,

$$AUC_\infty := \int_0^{+\infty} concentrazione(t)\, dt$$

Un'applicazione molto vicina alla Farmacia è l'area sotto il grafico che esprime la concentrazione di glucosio nel sangue all'avanzare del tempo dopo l'assunzione di un pasto; si veda questa figura di Wikimedia Commons: `link->`; ciò serve a definire l'indice glicemico degli alimenti:

> The glycemic index of a food is defined as the incremental area under the two-hour blood glucose response curve (AUC) following a 12-hour fast and ingestion of a food with a certain quantity of available carbohydrate (usually 50 g). (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Glycemic index*.)

Quel grafico viene certo da analisi del sangue, ma può anche essere modellizzato matematicamente con funzioni, per ulteriori ricerche: `link->`. (Il quel testo, si noti che *in silico* = col computer; è un aggiornamento dei classici *in vitro* e *in vivo*).

Similmente l'indice insulinico:

> Glucose (glycemic) and insulin scores were determined by feeding 1000 kilojoules (239 kilocalories) of the food to the participants and recording the area under the glucose/insulin curve for 120 minutes then dividing by the area under the glucose/insulin curve for white bread. The result being that all scores are relative to white bread. . (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Insulin index*.)

Ma le applicazioni sono veramente innumerevoli.[97]

29.2 Teoria ed esempi dell'integrale definito

Siano $F(x)$ e $f(x)$ due funzioni definite fra a e b, cioè sull'intervallo $[a,b]$ se $a \le b$ e sull'intervallo $[b,a]$ se $a > b$.

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F' = f$, e tale primitiva si può ottenere dall'integrale indefinito di f ponendo $c = 0$ o qualunque altro valore, in questa trattazione elementare – diversamente dall'uso consueto in Analisi Matematica – **definiremo l'*integrale definito* di $f(x)$ da a a b in questo modo**

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)_{\textit{scritto anche}}\,[F(x)]^b_{a \leftarrow \textit{incremento di F da a a b}}$$

(ed è ovvio che qualunque primitiva si scelga, ovvero qualunque c, si ottiene lo stesso valore: c si elide nella sottrazione).

Si dimostra (teorema, complicato) che esso uguaglia l'area (consueta) fra l'asse x e il grafico di f fra a e b se $a < b$ e su $[a,b]$ è $f(x) \ge 0$. *(Sottografico).*

[97] In ambito Biomedico, si consideri la funzione $f(t)$ che esprime in millilitri all'ora il flusso di un liquido in un tubo, anatomico o artificiale: l'area in questione, da t_1 a t_2 in ore, rappresenta la quantità di liquido fluito, in millilitri; e ovviamente millilitri e ore possono essere cambiati con altre unità di misura di volume e tempo. Quella quantità sarà proprio $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.
Si consideri, ancora, la determinazione delle aree geometriche, di figure definite dal loro bordo inteso come grafico di una funzione: ciò può servire nella progettazione di protesi anatomiche (Ingegneria Biomedica) o di reattori chimici per la produzione di farmaci.

A un livello superiore l'integrale definito viene definito sostanzialmente proprio con le aree e questo consente di averlo anche per funzioni prive di primitiva↑ come $\operatorname{sgn} x$ ma noi non considereremo tali integrali.

Si noti che
il sottografico è una figura piana (insieme di punti del piano)
l'integrale definito è un numero,
la primitiva è una funzione,
l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.

Esempio 1. Calcoliamo l'area sotto una "campata" della sinusoide, da 0 a π:

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Esempio 2. Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione $y := \frac{1}{x}$ da 1 a 7:

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

ed è ben evidente che il numero 7 si può sostituire con qualunque numero t, ottenendosi il significato geometrico del logaritmo. Se $0 < t < 1$ il logaritmo naturale è negativo, e infatti l'area del sottografico, da intendersi come *area con segno*, è negativa perchè la base viene percorsa da 1 a t in verso contrario all'orientazione dell'asse x. Si disegni l'iperbole e si stimi (dall'area) $\ln 10$.

Esempio 3. Per un processo termodinamico isotermico reversibile vale

$$Lavoro = -\int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{n\,R\,T}{V}\, dV =$$

per linearità dell'integrale definito, come pure indefinito,

$$= -n\,R\,T \int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{1}{V}\, dV =$$

$$= -n\,RT\,[\ln V]_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} =$$
$$= -n\,RT\,(\ln V_{finale} - \ln V_{iniziale}) =$$
$$= -n\,RT\,\ln \frac{V_{finale}}{V_{iniziale}}$$

Leggiamo su Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce *Isothermal process*:

> By convention, work is defined as the work on the system by its surroundings. If, for example, the system is compressed, then the work is positive and the internal energy of the system increases. Conversely, if the system expands, it does work on the surroundings and the internal energy of the system decreases.

29.3 Altri 2 teoremi sugli integrali

- Dalla definizione – come l'abbiamo data – segue subito che

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

- **Regola di Chasles.** Per ogni a, b, c, in qualunque ordine,

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \tag{27}$$

(dove si intendano completati i 3 simboli di integrale con $f(x)dx$, che per focalizzare il significato di questo teorema, non è stato scritto esplicitamente).

Esercizio. Con la Regola di Chasles si calcoli $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$, si faccia un disegno, e si ricalcoli quell'integrale con le aree della geometria elementare. (Si noti che di $|x|$ non abbiamo dato una primitiva, ma quella funzione coincide con $-x$ fino a 0, e con x da 0 in poi).

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$

$\star$ Supponiamo che in un tubo (per esempio di un reattore chimico per la produzione di farmaci) passi un liquido nella misura di

$$p(t) := |t|\,dl/h$$

nel tempo t fra -1 e 2 (h, ore, unità di tempo; quella negativa indica un tempo anteriore a un tempo detto 0; si può ipotizzare, per esempio, che lo 0 sia una certa mezzanotte, e allora stiamo considerando il tempo dalle 23 alle 2 di notte, in effetti del giorno successivo). Calcolare

$$\int_{-1}^{2} p(t)\, dt$$

che da un punto di vista fisico – ma non ce ne occuperemo – rappresenta la quantità totale di liquido fluito nel tempo considerato, e ha unità di misura *dl*, cioè decilitri, ma per semplicità si facciano i calcoli e si dia la soluzione senza unità di misura.

SVOLGIMENTO

Ricordando che

$$|x| := \begin{cases} x & se\, x \geq 0 \\ -x & se\, x < 0 \end{cases}$$

ora (eliminando le unità di misura)

$$\int_{-1}^{2} p(t)\, dt = \int_{-1}^{2} |t|\, dt =$$

per la Regola di Chasles

$$= \int_{-1}^{0} (-t)\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

per la linearità dell'integrale (cioè per le formule (22) e (23))

$$= -\int_{-1}^{0} t\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

ricordando la primitiva elementare $\int t\, dt = t^2/2 + c$

$$= -\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2} =$$

esattamente

$$\boxed{2.5}$$

oppure anche validamente (ma in effetti meno bene, visto il significato fisico)

$$\boxed{\tfrac{5}{2}}$$

(Si tratta di due decilitri e mezzo, dal punto di vista fisico, molto meglio espressi – almeno come risultato finale – come 2.5 che $\frac{5}{2}$).

Esercizio$_{\mu}$ Si consideri la funzione

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{(che si chiama } \textit{densità di Cauchy}\text{)}$$

e si calcoli

$$\int_0^1 f(t)\,dt$$

e si troverà $\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$ che rappresenta – anticipando un argomento di Calcolo delle Probabilità – la probabilità che una variabile casuale (o meglio detta aleatoria) che ha quella densità assuma un valore fra 0 e 1. Si faccia un disegno della funzione ombreggiando il sottografico relativo all'area trovata.
Con analogo calcolo o semplicemente per simmetria ne viene che

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

che rappresenterà la probabilità che una variabile aleatoria che ha quella densità assuma un valore fra -1 e $+1$.
Si calcoli poi

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

e ovviamente l'estremo $+\infty$ va inteso nel senso del limite([98]). Si troverà $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ che rappresenterà la probabilità che una variabile aleatoria che ha quella densità assuma un valore fra 0 e $+\infty$ ovvero non negativo.
Infine si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

[98] Per le funzioni molto regolari che ci interessano in pratica, questo non creerà alcun problema, e nei trattati di Calcolo delle Probabilità si scrivono tranquillamente cose come $\arctan(+\infty)$, formalmente scorrette dal punto di vista matematico.

e si troverà 1 cioè 100% e questo valere 1 dell'integrale su tutto $\mathbb{R}$ avviene per tutte le densità di probabilità (che, poi, hanno anche la caratteristica di essere ≥ 0).
Questa non è la curva a campana che più ricorre nelle applicazioni come densità, che invece è la campana gaussiana già accennata, ma ha il pregio di essere più facilmente trattabile pur esibendo comportamenti in parte simili. (I valori $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$ si possono bene calcolare approssimatamente con le 4 operazioni).

29.4 Note finali sulle funzioni elementari

Le regole della Natura sono scritte in linguaggio matematico, ci insegna Galileo Galilei.

Particolarmente efficaci in questo senso sono le *funzioni elementari*: potenze, logaritmi, esponenziali, valore assoluto, funzioni trigonometriche... (Una completa elencazione sarebbe difficile).

È spettacolare quanti fenomeni si possano descrivere con formule fatte di funzioni elementari con le 4 operazioni più l'elevamento a potenza.

Un modello matematico può approssimativamente essere definito come una relazione matematica – diciamo pure in generale una funzione o meglio un'equazione con più variabili – che cattura certi aspetti della realtà sensibile, quantificati da quelle variabili. Per esempio

$$funzione(variabile_1, ..., variabile_n) = 0$$

come la $pV - nRT = 0$ della Termodinamica.
E, sorprendentemente spesso, quella funzione o equazione è fatta con funzioni elementari combinate con le 4 operazioni e l'elevamento a potenza. (Talvolta ci sono funzioni *non elementari*).

Entusiasmati dal successo, c'è il rischio di esagerare.

Osserviamo due limitazioni:
1) la relazione matematica è sempre approssimata
2) smette di valere al di fuori di certi range (domini) in generale non ben specificati, perdendo progressivamente bontà.

Esempio 0, di Microbiologia: l'accrescimento microbico.
Abbiamo già ben detto, che il numero di microbi in una coltura non cresce per sempre esponenzialmente, ma solo – e comunque

approssimativamente – all'inizio. Similmente con qualunque altra popolazione; come pure non c'è epidemia che non finisca.

Esempio 1, di Fisica e Chimica: i vasi comunicanti.
Definito un certo sistema fisico, detto dei vasi comunicanti, com'è noto vale la relazione

$$h_1 = h_2$$

Fin dall'inizio c'è l'approssimazione della non perfetta planarità delle superfici liquide nelle immediate vicinanze dei bordi, per complessi fenomeni fisici. Ma poi, è ovvio che tale formula non avrà senso per altezze maggiori del diametro dell'universo. E anche su scale umane, la relazione non vale molto bene se uno dei due vasi è "molto" sottile, per il (complesso) fenomeno fisico della capillarità: via via che uno dei due vasi si assottigliasse, la formula perderebbe precisione. Eppure, la Legge dei Vasi Comunicanti rimane del massimo valore, teorico e applicativo, e il fenomeno è modellizzato proprio dalla semplice equazione sopra scritta. Con tutte le cautele del caso, quindi.

PARTE B – MATEMATICHE DELL'INCERTEZZA

Sezione B1 – Calcolo delle probabilità

VII – Probabilita assiomatica ed elementare

30 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

30.1 Inquadramento della questione

Il calcolo delle probabilità è una branca della matematica.
Come tale tratta oggetti astratti, ma a differenza di altre branche della matematica gli enti che manipola sono in generale molto vicini o collegati alla realtà sensibile: in particolare troverete affermazioni su dadi e monete, che sono modelli “ideali” , “puliti”, perfetti, per poi applicare le tecniche a fenomeni della realtà sensibile, in particolare sanitari e farmaceutici, inevitabilmente molto meno “ideali” e “puliti”, come come migliora/peggiora.

Sebbene comprenda molti sottocapitoli, il suo prodotto principale è un numero che è *la probabilità di un evento*, come “la probabilità che la somma di 2 dadi sia 7 è $\frac{1}{6}$” che di per sè potrebbe voler dire poco ma può diventare preziosissimo per *scegliere* fra diverse alternative possibili, confrontandole numericamente; per esempio la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia 8 è $\frac{5}{36}$ che è meno di $\frac{1}{6}$. Non solo per una scommessa sui dadi fra amici ma anche per delicate scelte mediche o economiche o personali.
Cosa daranno i dadi è incerto ma che convenga scommettere sul 7 è certissimo. Pensate allora al confronto fra 2 terapie farmacologiche.

Gli enti teorici di base sono gli eventi e la probabilità, definita in 4 modi:

- Concezione classica della probabilità
- Concezione frequentista della probabilità
- Concezione soggettiva della probabilità
- Concezione assiomatica della probabilità

Metodi del calcolo delle probabilità sono l’algebra e la geometria analitica, le funzioni elementari, il calcolo combinatorio, il calcolo infinitesimale.

30.2 Concezioni classica e frequentista della probabità

La concezione frequentista della probabilità è intuitiva e la vediamo con un esempio. Un farmaco è stato somministrato a 1000 persone con una certa diagnosi di malattia, e dopo 5 anni sono vive 700. Per l'uniformità delle condizioni e l'alto numero di *prove* si tende a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato a 1 persona con quella stessa diagnosi di malattia, c'è il 70% di probabilità che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 70% cioè 0.7 è $\frac{700}{1000}$).
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 2000 persone e dopo 5 anni sono vive 1200, si tenderà a ritenere che la sopravvivenza a 5 anni sia del 60%, meno del primo farmaco.
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 4 persone e dopo 5 anni sono vive 3, ne verrebbe una probabilità di sopravvivenza a 5 anni del 75%, cioè 3 su 4, cioè perfino meglio del primo farmaco, che però è stato provato su 1000 persone, mentre questo solo su 4; e qui siamo giunti al limite della validità di questa concezione, se non vengono fatti ulteriori approfondimenti.
Le probabilità così ottenute si chiamano *probabilità a posteriori*.

La concezione classica della probabilità è definita da

$$p = \frac{numero\, dei\, casi\, favorevoli}{numero\, dei\, casi\, possibili}$$

e vale se i casi possibili sono ragionevolmente da ritenere *equiprobabili* ovvero aventi la stessa probabilità.
Per esempio la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia maggiore di 10 è $\frac{3}{36}$ cioè $\frac{1}{12}$ perchè dei 36 casi possibili equiprobabili $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$,..., $(6, 6)$ sono 3 quelli favorevoli all'evento considerato (somma maggiore di 10) e cioè $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star \approx$ % Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari?

SVOLGIMENTO

Dei 36 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6
```

con somme rispettive

```
02 03 04 05 06 07
03 04 05 06 07 08
04 05 06 07 08 09
05 06 07 08 09 10
06 07 08 09 10 11
07 08 09 10 11 12
```


(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3 5, 7, 11) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12) rispettivamente

```
P P n P n P
P n P n P n
n P n P n n
P n P n n n
n P n n n P
P n n n P n
```

avendosi così 15 casi favorevoli su 36 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\, equiprobabili} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

e in definitiva

$$\boxed{\frac{5}{12} \approx 0.417 = 41.7\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167 = 41.67\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ $\approx$ % Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari a 8 facce numerate da 1 a 8? (Hanno la forma di ottaedro regolare).

SVOLGIMENTO
Dei 64 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6	3+7	3+8
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6	4+7	4+8
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6	5+7	5+8
6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6	6+7	6+8
7+1	7+2	7+3	7+4	7+5	7+6	7+7	7+8
8+1	8+2	8+3	8+4	8+5	7+6	8+7	8+8

con somme rispettive

02	03	04	05	06	07	08	09
03	04	05	06	07	08	09	10
04	05	06	07	08	09	10	11
05	06	07	08	09	10	11	12
06	07	08	09	10	11	12	13
07	08	09	10	11	12	13	14
08	09	10	11	12	13	14	15
09	10	11	12	13	14	15	16

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3, 5, 7, 11, 13) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16) rispettivamente

```
P P n P n P n n
P n P n P n n n
n P n P n n n P
P n P n n n P n
n P n n n P n P
P n n n P n P n
n n n P n P n n
n n P n P n n n
```

avendosi così 23 casi favorevoli su 64 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\ favorevoli}{\#\, casi\ possibili\ equiprobabili} =$$

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.359 = 35.9\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.3594 = 35.94\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

31 Concezioni soggettiva e assiomatica

31.1 Concezioni soggettiva della probabilità

La definizione soggettiva della probabilità (di Leonard Jimmie Savage e Bruno de Finetti) la diamo implicitamente attraverso questo esempio. Supponiamo che io possa scommettere sulla vittoria della squadra dei Vispi Volpini della prima partita del campionato e abbia queste idee:

Metto 100 euro e se vince prendo 300 euro: accetto felicissimo
Metto 100 euro e se vince prendo 200 euro: accetto contento
Metto 100 euro e se vince prendo 126 euro: per un pelo accetto
Metto 100 euro e se vince prendo 125 euro: sono indifferente
Metto 100 euro e se vince prendo 124 euro: per un pelo ma rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 110 euro: rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 100 euro: ci mancherebbe!

Questo significa che io ritengo che la probabilità di vittoria della squadra è $\frac{4}{5} = 0.8 = 80\%$. In pratica nell'ipotesi intermedia in cui non ho nè interesse a scommettere nè a non scommettere ritengo che se l'evento si verificasse 5 volte, 4 volte la squadra vincerebbe e io avrei preso $4 \cdot 125$ euro cioè 500 euro, esattamente quanto avrei speso nelle 5 scommesse. È ovvio che a 126 euro considero vantaggiosa la scommessa (seppure di poco).

Il pareggiarsi della spesa con l'ipotetica vincita definisce la *probabilità soggettiva* che io attribuisco al verificarsi dell'evento considerato.
La formula è

$$p = \frac{costo\,della\,scommessa}{vincita\,nel\,caso\,indifferente}\,.$$

Nell'esempio $\frac{100}{125}$.

Con questa definizione, un esperto attuario può fissare il premio assicurativo per un evento per il quale non sia disponibile una casistica significativa, come l'immissione sul mercato di un farmaco da parte di una nuova azienda, o un viaggio su Marte; o esiste una casistica assolutamente non omogenea.

Il ricorso alla probabilità soggettiva è frequentissimo in Farmacia e Medicina.

Leggiamo[99] per esempio sul sito dell'ECDC, European Centre for Disease Prevention and Control:

On the basis of the information currently available, ECDC considers that:

> • the likelihood of infection for EU/EEA citizens residing in or visiting Hubei province is estimated to be high;
>
> • the likelihood of infection for EU/EEA citizens in other Chinese provinces is moderate and will increase;
>
> • there is a moderate-to-high likelihood of additional imported cases in the EU/EEA;
>
> • the likelihood of observing further limited human-to-human transmission within the EU/EEA is estimated as very low to low if cases are detected early and appropriate infection prevention and control (IPC) practices are implemented, particularly in healthcare settings in EU/EEA countries;

Il soprastante testo non si spinge fino a dare stime numeriche dei valori di probabilità, ma molto chiaramente parla in termini di probabilità (o verosimigliana: *likelihood*) "alta", "moderata", "da-moderata-ad-alta", "da molto bassa a bassa".

Le valutazioni di probabilità soggettiva prodotte da enti considerati autorevoli possono orientare significativamente i comportamenti, dei singoli e delle comunità, sia direttamente sia influenzando (e di fatto fungendo da base teorica) l'emanazione di regolamenti o leggi, a vari livelli di autorità.

Leggiamo per esempio in un Decreto del Presidente del Consiglio dei Ministri del 4 marzo 2020:

> Considerato che l'Organizzazione mondiale della sanità il 30 gennaio 2020 ha dichiarato l'epidemia da COVID-19 un?emergenza di sanità pubblica di rilevanza internazionale;

[99] Letto il 4 febbraio 2020 in https://www.ecdc.europa.eu/sites/default/files/documents/novel-coronavirus-risk-assessment-china-31-january-2020_0.pdf

> Vista la delibera del Consiglio dei ministri del 31 gennaio 2020, con la quale è stato dichiarato, per sei mesi, lo stato di emergenza sul territorio nazionale relativo al rischio sanitario connesso all'insorgenza di patologie derivanti da agenti virali trasmissibili;
>
> Considerati l'evolversi della situazione epidemiologica, il carattere particolarmente diffusivo dell'epidemia e l'incremento dei casi sul territorio nazionale;

Anche le norme antisismiche italiane a cui devono sottostare i nuovi edifici (coi relativi costi associati), comprese le farmacie e soprattutto gli ospedali, sono basate su valutazioni di probabilità soggettiva, che classificano il rischio sismico nelle varie zone. In particolare la "zona 1" è quella in cui *si ritiene* che probabilità che capiti un forte terremoto sia *alta* (in un prossimo futuro; idealmente, in via semplificata, si pensi a 50 anni). E poi vi sono le zone 2, 3, e 4. Con ovvie differenze nei costi di costruzione.

Naturalmente nel corso della storia un'infinità di volte gli *esperti* hanno sbagliato le stime, anche in un modo clamoroso; si veda per esempio lo spassoso libro *La parola all'esperto*. Tuttavia questo fenomeno si riduce se si distinguono i *sedicenti* esperti dagli esperti deputati da organismi già di per loro, in qualche modo, di alto livello. (Eppure anche qua, c'è stato talvolta *da mettersi le mani nei capelli.*)

Se invece scendiamo al livello dei profani relativamente ad un certo argomento specialistico, in generale le loro stime di frequenza o probabilità (il che è relativamente equivalente) in generale valgono, per così dire, *un po' meno di nulla*, con usuali sovrastime di parecchi ordini di grandezza – anche per la potenza della manipolazione mediatica – delle frequenze (e quindi delle associate probabilità) di fenomeni anche ampiamente considerati e discussi pubblicamente.

Le valutazioni di probabilità soggettiva ovviamente sono alla base della vita di tutte le persone, ma ad un livello basico, senza applicazione di formule, per esempio quando si ritiene più probabile una cosa di un'altra.

Ad un livello matematico più fine, le valutazioni di probabilità soggettiva governano molte scelte di tipo medico e sanitario.

Ad un livello matematico ancora superiore, esse sono alla base di buona parte dell'economia mondiale, governando la finanza speculativa, le assicurazioni, i bonds...
Con specifico riferimento alla Medicina e alla Farmacia, si considerino in particolare gli *ebola bonds*, che traggono il nome dal morbo ebola ma possono applicarsi ad altri, che sono vere e proprie scommesse sulle epidemie. Queste scommesse in teoria sono formulate *positivamente*, perchè gli investitori nazionali guadagnano se l'epidemia *non* si verifica – e i danni li pagano organismi sovranazionali come la Banca Mondiale.
Ma distorsioni sono possibili, come vediamo in questo passaggio:

> *"to do so Ebola must kill at least 20 people in at least one other country. So far, neighbouring Uganda has only had two victims. (...) Congolese health authorities have an incentive to let the virus move into Uganda in order to unlock more aid."*([100])

31.2 Concezione assiomatica della probabilità

La definizione assiomatica della probabilità è astratta e con definizioni e assiomi crea la probabilità, interpretabile in modo del tutto compatibile con le altre concezioni:

• Ω: *evento certo* (p.es. "il dado fa 1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6", oppure "vive o muore").

[100] Reuters in https://www.reuters.com/article/us-worldbank-ebola-breakingviews/breakingviews-ebola-bonds-are-wonky-way-to-tackle-pandemics-idUSKCN1V30SW, consultato il 5 marzo 2020.

• $\mathbb{A}$: *σ-algebra degli eventi*, un sottoinsieme delle parti di Ω (cioè di $I\!P(\Omega)$) sufficientemente regolare, precisamente tale che:
 ⋄ $\varnothing, \Omega \in \mathbb{A}$
 ⋄ $(\forall A \in \mathbb{A})\ A^C \in \mathbb{A}$ (dove A^C è il complementare di A)
 ⋄ $(\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathbb{A})\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.
(In $\mathbb{A}$ stanno tutti gli eventi *ragionevolmente* considerabili).

• La *[funzione] probabilità* $P : \mathbb{A} \to [0,1]$ tale che
 ⋄ $P(\Omega) = 1$ (l'evento certo ha probabilità 100%)
 ⋄ $P(A_1 \cup^* A_2 \cup^* ... \cup^* A_n \cup^* ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$
dove $\cup^*$ indica l'unione disgiunta cioè con intersezione vuota.

• Lo *spazio di probabilità*: la terna ordinata $(\Omega, \mathbb{A}, P)$.

• Si definisce la *probabilità condizionata*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{28}$$

per la quale è apparsa conveniente l'interpretazione di probabilità che si verifichi B *sapendo* che si è verificato A. Per esempio con riferimeno a un dado (regolare)

$$P(\text{“}dispari\text{”}|\text{“}primo\text{”}) = \frac{P(\text{“}dispari\text{”} \wedge \text{“}primo\text{”})}{P(\text{“}primo\text{”})} =$$

$$= \frac{P(\{2,3,5\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{2,3,5\})} =$$

$$= \frac{P(\{3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Nel caso che sapere che si è verificato A non muti per noi la probabilità che si verifichi B, cioè $P(B|A) = P(B)$, si ottiene, da quest'equazione e dalla (29),

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{eventi indipendenti}$$

e quest'equazione definisce assiomaticamente il caso di 2 *eventi indipendenti*. E si estende a 3 o più eventi (ma la questione è

delicata↑).
Questa degli eventi indipendenti è in qualche modo la formula più importante del Calcolo delle Probabilità fra le non ovvie.

Per esempio

$$P(\text{“la moneta dà testa”} \wedge \text{“il dado dà 4”}) =$$

$$= P(\text{“la moneta dà testa”}) \cdot P(\text{“il dado dà 4”}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.$$

Invece “dispari” e “primo” non sono indipendenti nel lancio di un dado: $P(dispari) = P(1,3,5) = \frac{1}{2}$ e $P(primo) = P(2,3,5) = \frac{1}{2}$ ma $P(dispari \wedge primo) = P(3,5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ che non è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

- Si dimostra (sono teoremi) che valgono, $\forall A, B, A_1, A_2 \dots \in \mathbb{A}$:
  - ⋄ $P(A^C) = 1 - P(A)$ da cui in particolare $P(\varnothing) = 0$
  - ⋄ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - ⋄ $P(A \cup^* B) = P(A) + P(B)$ (unione disgiunta)
  - ⋄ $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \dots)$
  - ⋄ $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$
  - ⋄ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Per le precedenti 6 formule i disegni insiemistici chiariscono tutto.

⋄ Si dimostra (teorema) la Formula di Bayes: dati un $B \in \mathbb{A}$ e una partizione di Ω, cioè degli insiemi $A_1, \dots A_n$ disgiunti con unione Ω, vale

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$

$$i = 1, ..., n.$$

Anche la sola uguaglianza dei denominatori è interessante:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

e in particolare con $n = 2$, scrivendo A invece di A_1 ed essendo necessariamente $A_2 = A^C$ (avendosi una partizione) si ha la

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)$ (Legge delle Alternative)

Si faccia un disegno rappresentativo della situazione.

Per esempio uno spazio di probabilità si ottiene con un dado regolare, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dove $\{1\}$,...,$\{6\}$ sono gli *eventi semplici*, possiamo fissare molto opportunamente $\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega)$, e la funzione P vale costantemente $\frac{1}{6}$. Per esempio $A := \{2, 3, 5\}$ è l'evento "esce 1 o 3 o 5", ovvero "[esce] [un numero] dispari".
Si calcolino A^C, $P(A^C)$, $\{1, 2, 6\}^C =: B$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B)$. Poi con lo stesso Ω si trovino altri 2 spazi di probabilità.

Esistono anche spazi di probabilità infiniti, per i quali nessuna uniformità è possibile, e in cui nella realtà sensibile possiamo aspettarci che in generale tenderà a ricorrere una *distribuzione* in qualche modo *a campana* – eventualmente troncata da una parte.

Si noti l'immediata (duplice) conseguenza della (29)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ $^{\%}$ Supponiamo che in una certa popolazione la mutazione RX1vis si presenti con probabilità 25% e, indipendentemente, la mutazione RS2vol con probabilità 40%. Che probabilità c'è che un soggetto di quella popolazione abbia la RX1vis e non abbia la RS2vol?

SVOLGIMENTO

$$P((\text{RX1vis})\,\textit{et}\,(\textit{non}\,\text{RS2vol})) =$$

l'avere o non avere la RS2vol è indipendente dall'avere o non avere la RX1vis

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot P(\textit{non}\,\text{RS2vol}) =$$

con l'evento complementare

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot (1 - P(\text{RS2vol})) =$$

coi dati numerici

$$= 0.25 \cdot (1 - 0.4) =$$

in definitiva

$$\boxed{0.15 = 15\%}$$

Fissiamo l'attenzione per esempio sullo *spazio di probabilità uniforme* $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ del lancio di 1 dado, con 6 *eventi semplici* di probabilità $\frac{1}{6}$, e $64 = 2^6$ eventi nella σ-algebra $\mathbb{A}$ delle parti di Ω:

$$\Omega := \{1,2,3,4,5,6\} \qquad P(k) = 1/6,\ k = 1,...,6$$

$$\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, ...\{6\}, \{1,2\}, ..., \{1,2,3,4,5\}, \Omega\}.$$

Per esempio $\{1,2\}$ è l'evento "esce 1" *vel* "esce 2"; $P(1,2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Naturalmente esistono spazi di probabilità finiti non uniformi, per esempio ottenuti con dadi truccati.

Oppure con riferimento a una diagnosi e/o trattamento farmacologico, e un fissato intervallo temporale (per esempio 5 anni), e comunque in un'ottica frequentista, con *scores* da 1=morte a 6=ottimamente, potremmo avere per esempio:

$$\begin{array}{ll} 3\% = P(\mathit{morte}) & ... \\ 5\% = P(\mathit{molto\,male}) & ..... \\ 12\% = P(\mathit{male}) & .... \\ 20\% = P(\mathit{stabile}) & .... \\ 40\% = P(\mathit{bene}) & .... \\ 20\% = P(\mathit{ottimamente}) & .... \end{array}$$

(Si noti la forma più o meno a campana).

Calcoliamo per esempio

$$P(\text{“}\mathit{migliora}\text{”}) = P(\text{“}\mathit{bene}\text{”} \vee \text{“}\mathit{ottimamente}\text{”}) =$$

eventi disgiunti, somma delle probabilità:

$$= P(\text{“}bene\text{”}) + P(\text{“}ottimamente\text{”}) =$$

$$= 40\% + 20\% = 60\%.$$

Per 2 soggetti

$$P(\text{“}entrambi\ morti\text{”}) =$$

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1\text{\^{}}\ soggetto\text{”} \wedge \text{“}morte\ del\ 2\text{\^{}}\ soggetto\text{”}) =$$

e nell'ipotesi di indipendenza

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1\text{\^{}}\ soggetto\text{”}) \cdot P(\text{“}morte\ del\ 2\text{\^{}}\ soggetto\text{”}) =$$

$$= 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 = 0.09\%$$

(Poco meno dell'1 per mille). Ma se i soggetti sono legati affettivamente, l'ipotesi di indipendenza diventa alquanto inverosimile. (La morte dell'uno in generale aumenta la probabilità di morte dell'altro a prescindere dalla terapia seguita).

Si noti che appena si esce dalla modellizzazione “perfetta” dei dadi e delle monete, si introducono inevitabilmente problematiche che poi di fatto si trasformeranno in incertezze nei risultati statistici. (Dove l'indipendenza, e la normalità gaussiana dei dati – che vedremo – sono spesso ipotesi implicite, di fatto imperfette).

Nota. Il seguente esercizio richiede una calcolatrice con 8 cifre, o una moltiplicazione con carta e penna.
ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità 7%. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che

probabilità c'è che andando 4 volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso?

SVOLGIMENTO

$$P(punto\,al\;1^\wedge\;viaggio) = ... = P(punto\,al\;4^\wedge\;viaggio) = 7\% = \frac{7}{100}$$

Evento complementare:

$$P(nonpuntoal1^\wedge viaggio) = ... = P(nonpuntoal4^\wedge viaggio) = 93\% = \frac{93}{100}$$

Evento composto:

$$P(mai\,punto\,nei\;4\;viaggi) = \frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100} = \left(\frac{93}{100}\right)^4$$

Evento complementare:

$$P(punto\,almeno\;1\;volta\,nei\;4\;viaggi) = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{93^4}{100^4} = 1 - \frac{74\,805\,201}{100\,000\,000} = \frac{100\,000\,000 - 74\,805\,201}{100\,000\,000} =$$

$$\boxed{\frac{25194799}{100\,000\,000} \approx 0.252 = 25.2\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in metropolitana, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di entrare in contatto coi pidocchi, con probabilità p. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probablità c'è che in 10 viaggi in metropolitana – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona sia entrata in contatto coi pidocchi?

SVOLGIMENTO

$$P(contatto\,nel\;1^\wedge\;viaggio) = ... = P(contatto\,nel\;10^\wedge\;viaggio) = p$$

Evento complementare:

$P(noncontattonel1\hat{}viaggio) = ... = P(noncontattonel10\hat{}viaggio) = 1-p$

Evento composto:

$$P(nessun\,contatto) = (1-p)\cdot ... \cdot(1-p) = (1-p)^{10}$$

Evento complementare:

$$\boxed{P(almeno\,un\,contatto) = 1-(1-p)^{10}}$$

ESERCIZIO$_{\mu2019}$

$\star$ % In via semplificata, consideriamo qua terapie che possono avere solo esito fatale (morte) o successo (non si considerano diversi gradi di successo).

Per un certo paziente si stanno ipotizzando 4 procedure:

terapia T1 e poi terapia T2

terapia T2 e poi terapia T4

terapia T3 e poi terapia T4

terapia T5.

Supponendo l'indipendenza degli eventi, trovare quale procedura conviene avendosi queste probabilità di esito fatale:

T1: 9%, T2: 12%, T3: 4%, T4: 11%, T5: 13%.

SVOLGIMENTO

Con gli eventi complementari, si hanno queste probabilità di successo:

T1: 91%, T2: 88%, T3: 96%, T4: 89%, T5: 87%.

Si ha

$$P(successo\,procedura\;1\hat{}) = 0.91\cdot 0.88 = 80.08\%$$

$$P(successo\,procedura\;2\hat{}) = 0.88\cdot 0.89 = 78.32\%$$

$$P(successo\,procedura\;3\hat{}) = 0.96\cdot 0.89 = 85.44\%$$

e allora conviene l'ultima procedura:

$$\boxed{\text{terapia T5}}$$

32 Probabilità combinatoria, prima parte

Il Calcolo Combinatorio è costituito da metodi per determinare il numero di elementi di un insieme finito; ed elencarli.
Esso rientra nelle Matematiche della Certezza, diciamo pure – essenzialmente – nell'Insiemistica, ma in questa trattazione elementare verrà associato alle correlate questioni probabilistiche, fra le Matematiche dell'Incertezza.

Vediamo alcuni dei molti casi di ricorrenza del Calcolo Combinatorio nella Farmacia.

• Il Calcolo Combinatorio ricorre nella chimica dei farmaci. Una rivista scientifica internazionale è Combinatorial Chemistry Link->. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> Spesso il ricercatore si imbatte in un composto che dimostra una certa attività biologica, che però non è sufficiente per garantire il successo clinico (e commerciale) del composto. A questo punto inizia un processo di screening "quasi casuale": vengono preparati e testati tutti i possibili composti che mantengono una analogia strutturale per il nucleo fondamentale, ma ne differiscono per i sostituenti collegati.

• Il Calcolo Combinatorio ricorre anche nelle questioni di elencazione, catalogazione e archiviazione dei prodotti e delle attività di una farmacia. Per esempio il Calcolo Combinatorio risponderà alla domanda: in quanti modi posso ordinare 4 prodotti su una brochure pubblicitaria? Sono 24 modi, possono essere elencati facilmente, e poi assoggettati a considerazioni sanitarie e/o di marketing, per sceglierne uno per la stampa della finale.

32.1 Probabilità combinatoria elementare

La **probabilità combinatoria elementare** si basa su 2 cose:

• la concezione classica della probabilità, quella della probabilità come *casi favorevoli / casi possibili*;

• il calcolo combinatorio, costituito da metodi per determinare il numero di elementi di un insieme finito E, cioè la sua cardinalità, indicata con $\#E$ (e da altri con card$E$ o $|E|$); conteggiare gli elementi degli insiemi finiti adesso serve proprio per contare i casi favorevoli e i casi possibili di cui sopra.

In questa trattazione elementare, trattiamo il **calcolo combinatorio** – che di per sè sarebbe una matematica elementare – in 2 porzioni:

• una parte l'abbiamo già trattata nell'insiemistica: in particolare

∘ prodotto cartesiano

∘ insieme delle parti

• un'altra parte adesso, in questa lezione e nella succssiva, nel contesto del calcolo delle probabilità:

∘ elencazione con conteggio

∘ cardinalità dell'unione

∘ permutazioni

∘ combinazioni,

∘ disposizioni,

∘ dismutazioni↗.

Per esempio col prodotto cartesiano, e l'elencazione con conteggio, avevamo trovato la probabilità che la somma dei punteggi di 2 dadi sia un numero primo:

$$p = \frac{\#\, casi\ favorevoli}{\#\, casi\ possibili\ equiprobabili} = \frac{15_{\leftarrow elencazione\ con\ conteggio}}{6 \times 6_{\leftarrow prodotto\ cartesiano}}$$

$$= \frac{5}{12}$$

L'*elencazione con conteggio* è adeguata quando è più semplice dell'applicazione di formule. Per esempio per determinare quanti sono i numeri primi minori di 25

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \qquad \rightarrow \textit{ sono } 9$$

o (col computer) di 10 000.
Si troverà facilmente, elencandoli, che i numeri primi ≤ 92 sono 24: ci sono allora $92 - 24 - 1 = 67$ elementi chimici (della tavola periodica "classica", fino all'uranio) con numero atomico maggiore di 1 e non primo (i quali, allora, in via del tutto ipotetica – non vogliamo qua fare chimica nucleare – potrebbero dare tutti i loro protoni ad atomi più piccoli e uguali fra loro).

Un esempio applicato al Calcolo delle Probabilità. La probabilità che un numero primo minore di 25 scelto a caso sia dispari è

$$\frac{8}{9} \approx 0.889 = 88.9\%$$

perchè $\#\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} = 9$ e solo il 2 non è dispari, restandone 8.
Questo sopra, triplice, è il modo in cui in questa trattazione elementare in generale esprimeremo la probabilità, ma si noti che il secondo (0.889), tipico della Matematica, è poco usato nella pratica della Farmacia. Anzi, si faccia attenzione a non confondere 0.889 con 0.889%.

Note sul prodotto cartesiano.
Osservato che il prodotto cartesiano di 2 insiemi finiti A e B ha (ovviamente) cardinalità

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

e con 3 insiemi finiti

$$\#(A \times B \times C) = \#A \cdot \#B \cdot \#C \text{ e similmente con } n \text{ insiemi}$$

osserviamo che parallelamente, per così dire, se un'azione si può fare in n modi e una seconda azione si può fare in m modi, la sequenza delle 2 azioni si può fare in $n \cdot m$ modi. E la sequenza di 3 azioni in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ modi, eccetera. Vediamo un esempio.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ Calcolare quanti sono i diversi possibili 6-meri dei nucleotidi del RNA ovvero le sequenze ("parole") di 6 lettere dell'alfabeto

$$A, C, G, U$$

(di cui recentemente si è molto scritto riguardo la ricerca contro il cancro).

SVOLGIMENTO
Relativamente alla questione medica, e in futuro eventualmente farmaceutica, si può vedere sul sito governativo statunitense PubMed l'abstract dell'articolo scientifico 6mer seed toxicity in tumor suppressive microRNAs.

Per fissare le idee (ma assolutamente non sarebbe necessario) scriviamo alcune delle sequenze/parole:
AAAAAA, AAAAAC, AAAAAG, AAAAAU,
AAAACA, AAAACC, AAAACG, AAAACU,
...
UUUUUA, UUUUUC, UUUUUG, UUUUUU.

Tutte (4096, come vedremo) sono elencate in `https://www.6merdb.org/`

Per calcolare il numero osserviamo che
la 1^ lettera può essere scelta in 4 modi
la 2^ lettera può essere scelta in 4 modi
...
la 6^ lettera può essere scelta in 4 modi
e allora la sequenza di 6 lettere può essere costituita in un numero di modi pari a

$$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$\boxed{4096}$$

Oppure, si potrebbe anche dire che l'insieme delle sequenze/parole è in corrispondenza biunivoca con il prodotto cartesiano

$$\{A, C, G, U\} \times \text{...(in tutto 6 volte)...} \times \{A, C, G, U\}$$

e allora ha cardinalità

$$\Big(\#\{A, C, G, U\}\Big)^6$$

concludendo come prima.

ESERCIZIO$_\mu$ Quante sono le possibili schedine classiche, quelle di 13 risultati 1, 2 o X?

SVOLGIMENTO

L'1-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X

il 2-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X

...

il 13-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X.

In tutto 3^{13} modi cioè

$$1\,594\,323.$$

32.2 Cardinalità dell'unione

Per gli insiemio finiti, dei quali soli ora ci occupiamo, vale (teorema) questa (ovvia: si disegnino i diagrammi di Eulero-Venn) formula (che lega le cardinalità dell'unione e dell'intersezione):

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

In particolare se A e B sono disgiunti (l'intersezione ha 0 elementi) la cardinalità dell'unione è la somma della cardinalità.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

* Supponiamo che di 116 individui

con anticorpo VISα oppure VISγ,73 hanno l'anticorpo VISα, e 53 l'anticorpo VISγ. Quanti hanno entrambi gli anticorpi?

SVOLGIMENTO

Sappiamo che per gli insiemi finiti la numerosità ovvero cardinalità degli insiemi unione e intersezione vale

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

cioè equivalentemente vale

$$\#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$$

e ora con

$A = \{\text{soggetti con VIS}\alpha\}$

$B = \{\text{soggetti con VIS}\gamma\}$
si ha

$$\text{numero di soggetti con entrambi gli anticorpi} =$$
$$= \#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B) =$$
$$= 73 + 53 - 116 =$$
$$\boxed{10}$$

32.3 Permutazioni

Ogni ordinamento totale di un insieme finito non vuoto A si dice *permutazione* degli elementi di A. Esso viene identificato con l'unica $(\#A)$-upla di elementi di A che "rappresenta" quell'ordinamento totale. Per esempio dall'unica 5-upla – come (b, d, a, e, c) – che rappresenta un determinato ordinamento totale di A se esso ha 5 elementi.
Il numero delle permutazioni di un insieme di n elementi si indica talvolta con P_n e si pone anche $P_0 := 1$.
Il numero delle permutazioni di un insieme di n elementi è dato dal *fattoriale*↑ di n, che vale 1 se $n = 0$ e altrimenti $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$:

$$P_n = n!\,.$$

Per esempio 4 prodotti possono essere pubblicizzati ciascuno su 1 di 4 pagine di una brochure in 4! cioè 24 ordini diversi.

Esempio. In quanti ordini diversi si possono mettere in un contenitore di acqua 8 sostanze chimiche diverse?
Che probabilità c'è di ordinarle in un particolare fissato modo mettendole a caso?

È un problema di permutazioni, dell'insieme $\{x_1, \ldots, x_8\}$ o più semplicemente $\{1, \ldots, 8\}$ delle sostanze considerate, che ha 8 elementi. Gli elementi si possono riordinare in $8! = 40\,320$ modi. La probabilità è $1/43\,320 \approx 0.0000231 = 0.00231\%$

Esercizio. In quanti modi diversi si possono allineare 5 prodotti farmaceutici su un espositore?

33 Probabilità combinatoria, seconda parte

33.1 Dismutazioni

Si dice *dismutazione* (o *permutazione completa* o *sconvolgimento*) di un insieme ogni sua permutazione in cui tutti gli elementi cambiano posizione. (Si immaginino degli studenti alle loro sedie, si alzano e "rimescolano", si siedono, ma nessuno sulla sedia che aveva prima). Per esempio per l'insieme ordinato { 1, 2, 3, 4, 5 } ovvero per la 5-upla ordinata $(1,2,3,4,5)$, due permutazioni sono $(4,5,1,2,3)$ e $(2,5,1,4,3)$, ma solo la prima è una dismutazione. Per il numero N di dismutazione di un insieme di n elementi, è (teorema) $N \approx \frac{n!}{e}$; l'errore assoluto è sempre < 0.5; e per $n > 5$ l'errore relativo è minore dello 0.05%, che in questo caso possiamo considerare una buona approssimazione, e $\to 0$ per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N}{n!/e} = 1 \quad \text{ovvero } N \simeq \frac{n!}{\mathrm{e}}$$

in cui $\simeq$ è il simbolo ISO per l'*approssimazione asintotica*.

Esempio. Si abbiano molte persone, e altrettanti foglietti coi loro nomi. Li distribuiamo a caso a quelle persone. Che probabilità c'è che nessuno riceva il foglietto col suo nome? E che qualcuno lo riceva? Ovviamente se non sappiamo il numero n di persone, non possiamo dare una risposta esatta. Tuttavia se, come d'usuale, ci accontentiamo di un valore ben approssimato della probabilità, in pratica possiamo, purchè n, che è stato garantito grande, sia ≥ 5 o meglio > 5, e sorprendentemente la risposta non dipende da quel numero esatto di persone. Consideriamo l'evento che nessuno riceva il foglietto con il suo nome. Così per il primo quesito i casi possibili sono le permutazioni e i casi favorevoli sono le dismutazioni, e allora

$$p \approx \frac{n!/e}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0.368 = 36.8\% \qquad (\textit{viene questo } \forall n{>}5, \textit{ e per } n{=}5 \textit{ viene } {\approx}0.367).$$

E allora la probabilità che qualcuno riceva il foglietto col suo nome (evento complementare) è $\approx 0.632 = 63.2\%$.

33.2 Combinazioni semplici e disposizioni semplici

Consideriamo un insieme $n = 7$ elementi e scegliamone $k = 3$. In quanti modi si può fare? La risposta è data dalle *combinazioni (semplici)* che ora vedremo, ma se anche riteniamo ordinata la terna scelta, si può fare in molti più modi ($3! = 6$ volte tante) e sono le *disposizioni (semplici)*.

Combinazioni semplici. Dato un insieme E di $n > 0$ elementi (cioè non vuoto) e un numero naturale k tale che $0 \le k \le n$, i sottoinsiemi di E di k elementi si chiamano *combinazioni (semplici)* di n oggetti a k a k (per esempio a 3 a 3) e il numero di esse si chiama *coefficiente binomiale*, e si indica con $C_{n,k}$ o $\binom{n}{k}$ e si pone per convenzione $C_{n,0} := 1$. Questo numero si calcola col Triangolo di Tartaglia$_{\downarrow}$ oppure con una formula di esso

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Due note. Numeri enormi li lasceremo indicati, per esempio scriveremo $\binom{365}{23} =$

$$= \frac{365!}{23!\,342!}$$

senza procedere ulteriormente nel calcolo.
E similmente per quest'altro,

$$p = 1 - \frac{365!}{365^{23}\,342!}$$

con un computer od online con WolframAlpha potremmo trovare il valore approssimato $\approx 0.507 = 50.7\%$ ed è la probabilità che fra 23 persone a caso, nate in anni non bisestili, almeno 2 abbiano lo stesso compleanno (approssimando come uniforme la distribuzione delle nascite nell'anno). **Si noti come i fenomeni probabilistici possono essere molto controintuitivi**.

Disposizioni semplici. Dato un insieme E di $n > 0$ elementi (cioè non vuoto) e un numero naturale k tale che $0 \leq k \leq n$, i sottoinsiemi ordinati di E di k elementi si dicono *disposizioni (semplici)* di n oggetti a k a k (per esempio a 3 a 3), e il numero di esse si indica con $D_{n,k}$ e si pone per convenzione $D_{n,0} := 1$.
è (teorema)

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \, .$$

Mnemonici:

co mbinazioni... **co**n $k!$ e **co**sì **co**mpare numero **co**rto

di spo sizioni... **di**menticati $k!$ e **dispo**ni ordinatamente

Esempi. 3 elementi ordinati si possono scegliere da 7 in $\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ modi, e senza riguardo all'ordine in $\binom{7}{3} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35$ modi. (Riordinabili in $3! \cdot 35 = 210$ modi). Si provi a elencare i 35 modi. (Si fissi per esempio $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

Esercizio. In quanti modi si possono scegliere 4 elementi chimici diversi della tavola periodica ("classica") di 92 elementi? E quante sono le quaterne ordinate di 4 elementi?

Per il primo quesito, sono

$$\binom{92}{4} = \frac{92!}{4!\,(92-4)!} = \frac{92!}{4!\,88!} = \frac{92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= 23 \cdot 91 \cdot 15 \cdot 89 = 2\,794\,155$$

(Si provi con Wolframalpha `Binomial[92,4]`).
Per il secondo quesito, sono

$$\binom{92}{4} = \frac{92!}{(92-4)!} = \frac{92!}{88!} = 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 =$$

$$= 67\,059\,720$$

Esercizi. In quanti modi si possono scegliere 23 giorni diversi del 2018? Con o senza significato, quante "parole" di 4 lettere si possono comporre con le lettere C, R, O, N, I, S, T, A?

Esempio sulle combinazioni semplici. Che probabilità c'è di vincere giocando una cinquina su una ruota del lotto? Per essere sicuri di vincere giochiamo 1 euro su ciascuna di esse. Quanto guadagniamo?
Di casi favorevoli ce n'è 1, e i casi possibili sono le combinazioni semplici di 90 oggetti a 5 a 5, che sono in numero di $\binom{90}{5}$, e allora la probabilità è

$$p = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\frac{90!}{5!(90-5)!}} = \frac{5!\,85!}{90!} = \frac{1\cdot\ldots\cdot 5\cdot 1\cdot\ldots\cdot 85}{1\cdot\ldots\cdot 90} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{86\cdot 87\cdot 88\cdot 89\cdot 90} = \frac{1}{86\cdot 87\cdot 22\cdot 89\cdot 3} = \frac{1}{43\,949\,268}\,.$$

Abbiamo speso 43 949 268 euro e 1 cinquina da noi giocata vince; poichè si vince 6 milioni di volte la posta, vinciamo 6 milioni di euro, con un guadagno di −37 949 268 euro. (Ciclopica perdita)

Esempio sulle disposizioni semplici. Quanti sono i numeri esadecimali di 5 "cifre" (da 00000 a FFFFF) con le "cifre" tutte diverse?
è un problema di disposizioni semplici. Consideriamo i sottoinsiemi ordinati di { 0, 1,..., 9, A,..., F } di 5 elementi, che – in base al teorema – sono in numero di

$$D_{16,5} = \frac{16!}{(16-5)!} = \frac{16!}{11!} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11} = 524\,160.$$

Esercizi.
Che probabilità c'è che un numero < 10 sia primo? E < 25? E nei 2 casi, che sia quadrato? Triangolare? Pari?

33.3 Il gioco d'azzardo: patologia, probabilità e storia

Nel 2017 gli italiani hanno speso 55 miliardi per beni durevoli, come automobili ed elettrodomestici, e 88 miliardi in giochi d'azzardo, cioè mediamente circa 1470 euro a testa, diventati 1600 nel 2016; in parte persi, ovvio, mica organizzano i giochi solo per farci divertire; si disse che il lotto è una *tassa per gli stolti*. Bisogna comunque dire che la cinquina del lotto è un caso particolare, gli altri premi del lotto non sono così non equi; e altri giochi sono ancor meno non equi, dando premi più equilibratamente; e in alcuni conta anche l'abilità, per esempio la schedina del calcio.
È facile verificare che in generale i testi in rete sul gioco d'azzardo tendono a drammatizzare la situazione, parlando del centinaio di miliardi circa giocati ogni anno; molto meno spazio viene dato invece al fatto che la maggior parte di quei soldi ritorna i giocatori nelle vincite:

nel 2017 giocati 102 miliardi

vinti 82 miliardi

e allora perdita netta per i giocatori 20 miliardi. Dividendo per 60milioni di italiani, viene una perdita annua pro capite di circa 333 euro. Circa un euro al giorno, con differenze enormi fra regioni, e fra singoli.
Inoltre c'è da dire che coi giochi d'azzardo lo Stato raccoglie cifre enormi senza suscitare avversione: rinunciando ai giochi lo Stato potrebbe dover esigere quei soldi forzatamente. Circa 8 miliardi nel 2017. Una cosa triste è che a pagare sono in larga misura – difficile da quantificare nei dettagli – i meno abbienti. Altra cosa triste è che per molti diventa una malattia, la **ludopatia**, ma questa può esistere anche indipendentemente dai giochi organizzati dallo Stato, giocando fra privati. Altra questione ancora, è che le sale slot offrono alla malavita un facile modo di riciclare il denaro sporco: incassano denaro pulito e per le vincite danno quello proveniente da illeciti, che si disperde nei mille rivi delle spese personali della gente. Tutto questo, ovviamente, fermo re-

stando che di per sè non è immorale giocare d'azzardo, nè fra amici nè con lo Stato, e può essere una cosa sana, se esercitata con l'opportuna misura. Certo, 333 euro l'anno a testa, persi, danno da pensare. Si potrebbero fare anche molte altre cose con tanti soldi. In un decennio recente, le spese per la cura dei denti sono dimezzate.

Una questione molto interessante, invece, è che i giochi d'azzardo forniscono un campo di studi per il calcolo delle probabilità, anzi ne sono perfino una delle origini storiche, con – fra i relativamente moderni e ben noti – Pacioli, Cardano, Tartaglia, e Galileo Galilei che spiegò perchè con 3 dadi il 10 e l'11 siano più probabili del 9 e del 12, che pure sembrano ottenersi in un ugual numero di "modi". Ancora occupandosi di gioco d'azzardo, Pascal e Fermat giunsero al moderno concetto di probabilità.

Complementi

33.4 Triangolo di Tartaglia e potenza del binomio

il *Triangolo di Tartaglia* (o *di Pascal)*, è la *scrittura*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\end{array}
$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

variamente estesa con la Formula di Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(e cioè ogni numero è la somma dei 2 soprastanti, a parte gli 1 ai margini) dove n è il numero di riga a partire dalla 0-esima e k è la posizione nella riga a partire dalla 0-esima.
Il Triangolo di Tartaglia consente il calcolo dei *coefficienti binomiali* $\binom{n}{k}$ mediante sole somme. Ciò è utile sia nel problema delle combinazioni semplici che nella *potenza del binomio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{ovvero}$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

(si noti che nella seconda formula gli a e b nel secondo membro sono scambiati fra loro rispetto alla prima formula, come se là fosse scritto $a^{n-k}\, b^k$, ma è equivalente). I vari coefficienti dei monomi si trovano semplicemente sulla n-esima riga del Triangolo di Tartaglia (intendendo come 1-esima quella con due 1), per esempio $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Si dice *dismutazione* (o *permutazione completa* o *sconvolgimento*) di un insieme ogni sua permutazione in cui tutti gli elementi cambiano posizione. (Si immaginino degli studenti alle loro sedie, si alzano e "rimescolano", si siedono, ma nessuno sulla sedia che aveva prima). Per esempio per l'insieme ordinato { 1, 2, 3, 4, 5 } ovvero per la 5-upla ordinata $(1, 2, 3, 4, 5)$, due permutazioni sono $(4, 5, 1, 2, 3)$ e $(2, 5, 1, 4, 3)$, ma solo la prima è una dismutazione. Per il numero N di dismutazione di un insieme di n elementi, è (teorema) $N \approx \frac{n!}{e}$; l'errore assoluto $\left|N - \frac{n!}{e}\right|$ è sempre < 0.5; e per $n > 5$ l'errore relativo (nel senso di errore percentuale rispetto all'esatto) è minore dello 0.05%, che in questo caso possiamo considerare una buona approssimazione, e $\to 0$ per $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N}{n!/e} = 1 \quad \text{ovvero } N \simeq \frac{n!}{\mathrm{e}}$$

in cui $\simeq$ è il simbolo ISO per l'*approssimazione asintotica.*

34 Sensibilità, specificità, predittività

La questione fondamentale di questa Lezione e della successiva è

$$P(\text{veramente malato } \textit{sapendo} \text{ test positivo})$$

Familiarizziamo con la probabilità condizionalta con un esercizio.

Esercizio$^f_\mu$ risolto. Un'urna U contiene 20 palline bianche e 40 nere, e un'urna V contiene 5 palline bianche e 6 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae a caso una pallina che risulta bianca. Che probabilità c'è che sia stata scelta l'urna U?

Svolgimento$_\mu$

$U : 20b + 40n$

$V : 5b + 6n$

A_1: "scelta a caso l'urna U"

A_2: "scelta a caso l'urna V"

B: "estratta a caso una pallina bianca".

A_1 e A_2 costituiscono una partizione dell'evento certo.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{60}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{60} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{11}} =$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $3 \cdot 11$

$$\frac{11}{11 + 5 \cdot 3} = \frac{11}{26} \approx 0.423 = 42.3\%.$$

(Osserviamo che allora con probabilità $\approx 58\%$ era stata scelta l'urna V e questo riflette il fatto che là c'erano proporzionalmente più palline bianche: visto che è venuta una pallina bianca, più probabilmente avevamo scelto quell'urna).

Esercizio$_\mu$ Costruire e risolvere un esercizio analogo.

In questa Lezione e nella successiva si fa riferimento alla concezione frequentista della probabilità, che detto molto semplificatamente ci fa ritenere che se finora le cose sono andate in un certo modo in un gran numero di casi, continueranno ad andare così. Con riferimento alla Farmacologia: se 3 014 soggetti sono morti di 10 000 a 5 anni dal trattamento, riteniamo che la *probabilità* di morte sia circa del 30% (a 5 anni, con quel trattamento, in una popolazione *simile*).

Traiamo abbondantemente da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Con il termine sensibilità, in statistica, più precisamente nel campo della epidemiologia, si indica la capacità intrinseca di un test di screening di individuare in una popolazione di riferimento i soggetti malati. Essa è data dalla proporzione dei soggetti realmente malati e positivi al test (veri positivi) rispetto all'intera popolazione dei malati.

Un test sarà tanto più sensibile quanto più bassa risulterà la quota dei falsi negativi (cioè di soggetti malati erroneamente identificati dal test come sani). Un test molto sensibile, in definitiva, ci consente di limitare la possibilità che un soggetto malato risulti negativo al test.

Supponiamo che un test di screening dia come risultato solamente due opzioni: positivo al test e negativo. Essere positivi al test equivale ad essere ammalato secondo quel test, ma indagini diagnostiche successive possono rivelare l'effettiva malattia o meno.
Allora si otterranno 4 tipologie di osservati:
Sani Negativi (veri negativi)
Sani Positivi (falsi positivi) $\leftarrow$ *risultano avere la malattia; ma non ce l'hanno...*
Malati Positivi (veri positivi)
Malati Negativi (falsi negativi) $\leftarrow$ *non scoprono la loro malattia*

Rappresentabili così in tabella:
/////// MALATI - SANI
POSITIVI Veri + Falsi +
NEGATIVI Falsi - Veri -

La sensibilità del test verrà così calcolata:

$$S = \frac{V_{+}}{totaleMALATI} = \frac{V_{+}}{V_{+} + F_{-}}$$

ESEMPIO
25 2
4 55
Si troverà 86.2%.

Con il termine specificità, in medicina, si indica la capacità di un test di dare un risultato normale ("negativo") nei soggetti sani:

$$Sp = \frac{V_{-}}{totaleSANI} = \frac{V_{-}}{V_{-} + F_{+}}$$

ESEMPIO
25 2
4 55
Si troverà 96.5%.

Per predittività, in medicina, si intende la probabilità che un soggetto positivo ad un test di screening sia effettivamente malato. Il Valore Predittivo Positivo, che esprime numericamente la predittività, si calcola come quota di soggetti veri positivi sul totale dei positivi (veri e falsi positivi).

$$VPP = \frac{V_{+}}{totalePOSITIVI} = \frac{V_{+}}{V_{+} + F_{+}}$$

ESEMPIO
25 2
4 55

Si troverà 92.6%.
Vediamo ora il caso in cui la prevalenza (frequenza) della malattia è decisamente minore, aumentando ad esempio di un fattore 100 le persone sane e lasciando inalterato il numero dei malati:

25 200

4 5500

Si troverà 11.1.
Esercizio. Relativamente all'ultima tabella, si calcolino prevalenza, sensibilità e specificità.

ESERCIZIO. (Tratto da Wikipedia, l'enciclopedia libera).
≈ % Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	25	200
NEGATIVI	4	5500

Calcolare la predittività, ovvero il Valore Predittivo Positivo.

SVOLGIMENTO

Ricordando la definizione

$$\text{predittività} = \text{Valore Predittivo Positivo} = VVP =$$
$$= \frac{\text{veri positivi}}{\text{totale positivi}} = \frac{V_+}{V_+ + F_+}$$

ora abbiamo

$$VVP = \frac{25}{25+200} = \frac{25}{225} = \frac{1}{9} \approx$$
$$\boxed{\approx 0.111 = 11.1\%}$$

(Notiamo che il valore è piuttosto basso nonostante la specificità sia alta:

$$Sp = \frac{\text{veri negativi}}{\text{totale sani}} = \frac{V_-}{V_- + F_+} = \frac{5\,500}{5\,500+200} = \frac{5\,500}{5\,700} =$$

$$= \frac{55}{57} \approx 0.965 = 96.5\%$$

e questo è dovuto alla rarità della malattia nella popolazione considerata: circa una trentina di malati su poco più di 5 700 soggetti).

Nota di Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> Ossia la probabilità che un soggetto positivo al test sia effettivamente malato è pari all'11, 1%, che equivale a dire che il soggetto ha una probabilità dell'88, 9% di essere sano nonostante il test dica il contrario.

Nota finale. Su questi concetti sono basate le Curve ROC.

Esempio. Consideriamo un ipotetico test di gravidanza con sensibilità predittività del 99%.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

- Si definisce la *probabilità condizionata*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{29}$$

per la quale è apparsa conveniente l'interpretazione di probabilità che si verifichi B *sapendo* che si è verificato A. Per esempio con riferimeno a un dado (regolare)

$$P(\text{“}dispari\text{”}|\text{“}primo\text{”}) = \frac{P(\text{“}dispari\text{”} \wedge \text{“}primo\text{”})}{P(\text{“}primo\text{”})} =$$

$$= \frac{P(\{2,3,5\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{2,3,5\})} =$$

$$= \frac{P(\{3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Nel caso che sapere che si è verificato A non muti per noi la probabilità che si verifichi B, cioè $P(B|A) = P(B)$, si ottiene, da quest'equazione e dalla (29),

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

e quest'equazione definisce assiomaticamente il caso di 2 *eventi indipendenti*. E si estende a 3 o più eventi (ma la questione è delicata↑).

Per esempio

$$P(\text{“la moneta dà testa”} \wedge \text{“il dado dà 4”}) =$$

$$= P(\text{“la moneta dà testa”}) \cdot P(\text{“il dado dà 4”}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.$$

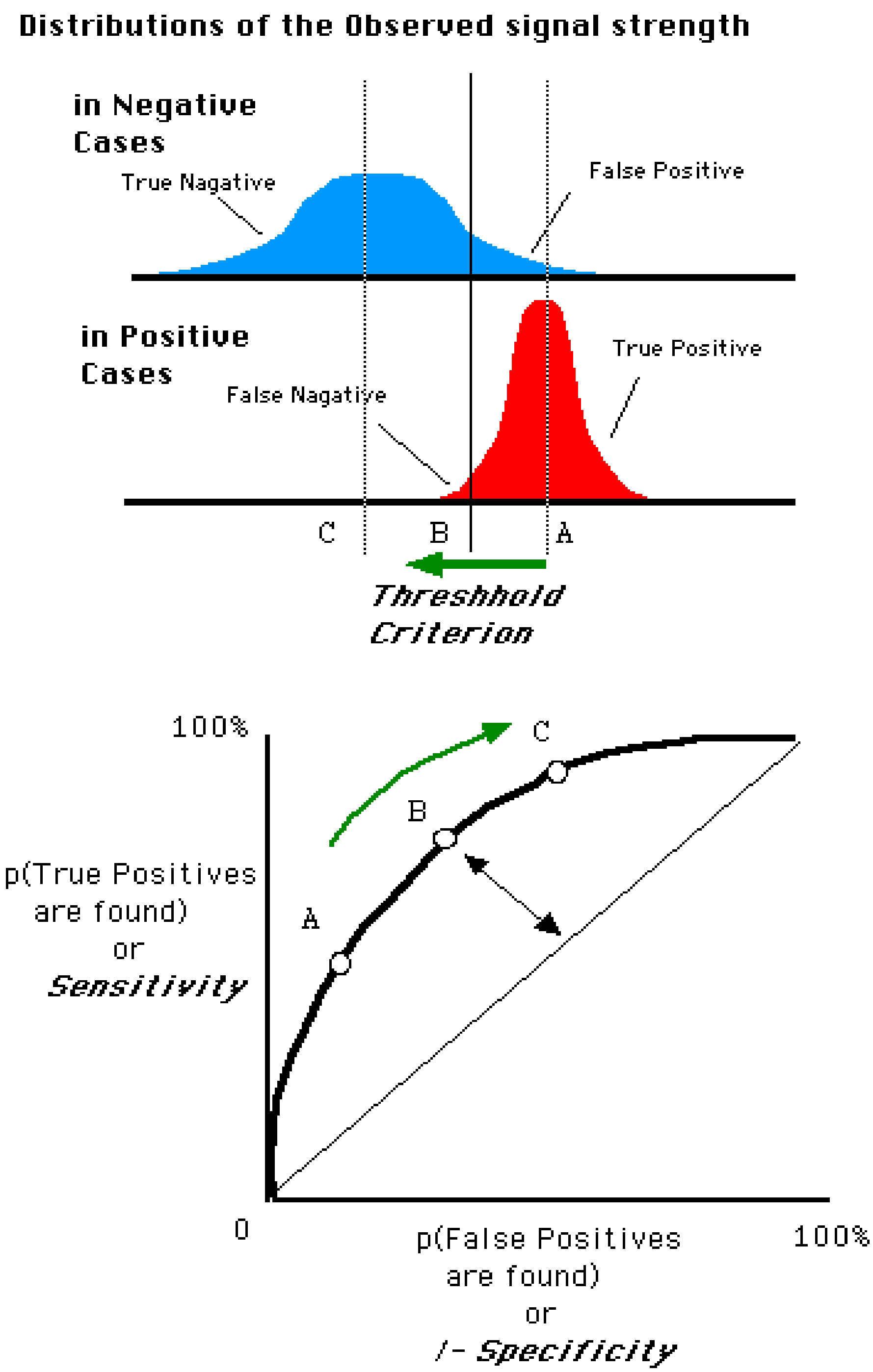
35 Le curve ROC

Traiamo questa Lezione da Wikipedia italiana, l'enciclopedia libera, alla voce *Receiver operating characteristic.*

Nella teoria delle decisioni, le curve ROC (Receiver Operating Characteristic, anche note come Relative Operating Characteristic[1]) sono degli schemi grafici per un classificatore binario. Lungo i due assi si possono rappresentare la sensibilità e (1-specificità), rispettivamente rappresentati da True Positive Rate (TPR, frazione di veri positivi) e False Positive Rate (FPR, frazione di falsi positivi). In altre parole, si studiano i rapporti fra allarmi veri (hit rate) e falsi allarmi.

La curva ROC viene creata tracciando il valore del True Positive Rate (TPR, frazione di veri positivi) rispetto al False Positive Rate (FPR, frazione di falsi positivi) a varie impostazioni di soglia. Il tasso di veri positivi è anche noto come sensibilità, richiamo o probabilità di rilevazione [2]. Il tasso di falsi positivi è anche noto come fall-out o probabilità di falsi allarmi [2] e può essere calcolato come (1 - specificità). Può anche essere pensato come un diagramma della potenza in funzione dell' errore di tipo I :quando la prestazione viene calcolata da un solo campione della popolazione, può essere considerata come una stima di queste quantità. La curva ROC è quindi il tasso dei veri positivi in funzione del tasso dei falsi positivi. In generale, se sono note le distribuzioni di sensibilità e 1-specificità, la curva ROC può essere generata tracciando la funzione di distribuzione cumulativa (area sotto la distribuzione di probabilità da $-\infty$ alla soglia di discriminazione) della probabilità di rilevamento nell'asse y rispetto alla funzione di distribuzione cumulativa della probabilità di falso allarme sull'asse x.

Il ROC è anche noto come curva Receiver Operating Characteristic, poichè è un confronto tra due caratteristiche operative (TPR e FPR) al cambiare del criterio.[3]



Applicazioni

Le curve ROC furono utilizzate per la prima volta durante la seconda guerra mondiale, da alcuni ingegneri elettrotecnici che volevano individuare i nemici utilizzando il radar durante le battaglie aeree. Recentemente le curve ROC sono utilizzate in medicina,[4][5] radiologia,[6] psicologia,meteorologia [7], veterinaria[8], fisica e altri ambiti, come il machine learning ed il data mining.

Concetto basilare

Se si considera un problema di predizione a 2 classi (classificatore binario come da figura: distribuzione rossa e azzurra), scelto un valore di soglia (threshold o cut-off), rispetto a cui decidere il risultato, ovvero se appartenente alla classe positiva (p) o negativa (n), dato che le due curve di distribuzione di probabilità risultano in parte sovrapposte, sono possibili quattro risultati a seconda della posizione del valore di cut-off:

• se il risultato della predizione è positivo p e il valore vero è anche positivo p, viene chiamato vero positivo (true positive - TP);

• se invece il valore vero è negativo, il risultato viene chiamato falso positivo (false positive - FP);

• al contrario, si ha un vero negativo (true negative - TN) quando entrambi, il risultato e il valore vero, sono negativi;

• un falso negativo (false negative - FN) invece si ha quando il risultato è negativo e il valore vero è positivo.

È inoltre possibile rappresentare questo tipo di situazione utilizzando una tabella di contingenza di tipo 2×2, dove le colonne rappresentano la distinzione tra soggetti sani e malati; le righe invece rappresentano il risultato del test sui pazienti. Un risultato qualitativo del test potrebbe essere quello di andare a valutare il numero di falsi positivi e negativi; meno ve ne saranno e maggiormente il test sarà valido.

Una curva ROC è il grafico dell'insieme delle coppie (FP, TP) al variare di un parametro del classificatore. Per esempio, in un classificatore a soglia, si calcola la frazione di veri positivi e quella

di falsi positivi per ogni possibile valore della soglia; tutti i punti così ottenuti nello spazio FP-TP descrivono la curva ROC.
Attraverso l'analisi delle curve ROC si valuta la capacità del classificatore di discernere, ad esempio, tra un insieme di popolazione sana e malata, calcolando l'area sottesa alla curva ROC (Area Under Curve, AUC). Il valore di AUC, compreso tra 0 e 1, equivale infatti alla probabilità che il risultato del classificatore applicato ad un individuo estratto a caso dal gruppo dei malati sia superiore a quello ottenuto applicandolo ad un individuo estratto a caso dal gruppo dei sani.[9]

Le curve ROC passano per i punti (0,0) e (1,1), avendo inoltre due condizioni che rappresentano due curve limite:

• una che taglia il grafico a 45°, passando per l'origine. Questa retta rappresenta il caso del classificatore casuale (linea di "nessun beneficio"), e l'area sottesa AUC è pari a 0,5.

• la seconda curva è rappresentata dal segmento che dall'origine sale al punto (0,1) e da quello che congiunge il punto (0,1) a (1,1), avendo un'area sottesa di valore pari a 1, ovvero rappresenta il classificatore perfetto.

VIII – Variabili aleatorie discrete

36 Introduzione alle variabili aleatorie

36.1 Variabili aleatorie discrete e continue

Una funzione (che ad eventi semplici associa numeri reali)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

si chiama *variabile aleatoria* (purchè sia sufficientemente regolare([101]) come sono tutte quelle che capitano a un livello elementare).

Per esempio una variabile aleatoria è il risultato del lancio di un dado, che potremo rappresentare così in 2 diversi casi:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{\textit{dado equilibrato}}_{\textit{ovvero regolare}} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}^{\textit{qua un certo}}_{\textit{dado truccato}}$$

ed entrambe potrebbero rappresentare anche le durate di due malattie in giorni, alquanto irrealistiche per la lontananza da distribuzioni a campana – si disegnino i bar chart delle probabilità – come pure quest'altra

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

decisamente più realistica, che potrebbe anche rappresentare il punteggio da 1 (morte) a 5 (ottimo), esito (per esempio a 3 anni) di un intervento farmacologico.

Si noti che nel caso delle durate in giorni, 5 è effettivamente quintuplo di 1, mentre "ottimo" non è quintuplo di "morte": in quel caso i numeri sono solo simboli senza valore quantitativo.

Allora, finora, niente di nuovo nella sostanza, solo una diversa impostazione di fenomeni già considerati.

Un'altra variabile aleatoria, non così facilmente rappresentabile, è il peso in kg del primo bambino che nascerà vivo il 1 gennaio

[101]Precisamente deve essere $\{\omega | X(\omega) \leq t\} \in \mathbb{A}$ per ogni t reale; questione sottile.

2020, ora locale del luogo. Potrebbe essere 3.412..., 4.576..., eccetera. Ragionevolmente parlando, ognuno dei singoli valori ha probabilità 0: perchè mai il primo bambino dovrebbe pesare *esattamente* (con infiniti decimali) 3.18452785356... kg? Scriveremo

$$\{X < 3.5\} \text{ intendendo l'evento } \{\omega | X(\omega) < 3.5\}$$

e similmente con $\leq$ e $>$ e $\geq$.
E ancora con tutte le possibili variazioni di $<$ e $\leq$

$$\{2.5 < X \leq 3.5\} \text{ intendendo l'evento } \{\omega | 2.5 < X(\omega) \leq 3.5\}$$

e per questi eventi, e altri del tipo $X \in I \subset \mathbb{R}$, con I insieme sufficientemente regolare (in Farmacia quasi solo intervalli), possiamo invece attenderci probabilità diverse da 0, per esempio
$P(X < 20) = 1$ il bambino peserà sicuramente meno di 20 chili,
$P(X < 0.1) = 0$ il bambino nato vivo non peserà meno di 100 g, e – ipotizziamo qua – con probabilità 50% peserà meno di 2.1 kg: $P(X \leq 2.1) = 0.5$. E magari ancora $P(X \leq 2.5) = 0.7 = 70\%$.

La funzione
$$F_X(t) := P(X \leq t)$$
si chiama *funzione di ripartizione* della variabile aleatoria X, *cumulative distribution function*:

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

In effetti i valori di essa sono in $[0, 1]$ e il grafico ha più o meno vagamente una forma sigmoide, da 0 in $-\infty$ a 1 in $+\infty$.

Si grafichino le funzioni di ripartizione delle v.a. X e Y inizialmente considerate. Si osserverà che i salti hanno ampiezze pari alle corrispondenti probabilità. E questo è un fatto generale che succede per tutte le variabili aleatorie discrete.

La prima v.a., quella del dado, si dice *discreta* (cioè a valori “ben separati”, anche eventualmente infiniti) e la seconda *continua*.

Si noti che, almeno per le variabili aleatorie continue, questa impostazione è veramente innovativa, e permette una valida trattazione di casi che altrimenti nel modo precedente si ridurrebbero semplicemente ad affermare che ogni singolo valore ha probabilità nulla

$$\forall\, t \quad P(X = t) = 0 \qquad (X \textbf{ v.a. continua})$$

e sommando o moltiplicando zeri non si otterrebbe niente di significativo.

Teorema (ovvio). $P\{a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a),\ \forall\, a, b$
e uno o entrambi gli estremi possono essere infiniti, e allora $F_X(x)$ andrà inteso nel senso del limite.

Anticipiamo che per le densità delle variabili aleatorie continue è

$$\boxed{\text{funzione di ripartizione:} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt} \tag{30}$$

$$\boxed{\text{(derivata della f.r.)} \quad F' = f \quad \text{(densità)}} \tag{31}$$

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

La funzione di ripartizione delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con F_X, F_Y, F_Z... ma anche con altri simboli: F, F_1, G...

La densità delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con f_X, f_Y, f_Z... ma anche con altri simboli: f, f_1, g...

Tipico delle densità riferite alla realtà sensibile è avere una forma “più o meno a campana”. (Non succede proprio sempre).
La più “pura” delle campane è la *campana gaussiana* della densità

normale standard

$$\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

che però ha il difetto che (quasi tutti) gli integrali di essa non si riescono a calcolare con le funzioni elementari.
Un modello più semplice di campana è la densità di Cauchy

$$f(t) := \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

per la quale si ha subito, integrando elementarmente,

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}(\arctan b - \arctan a)$$

per esempio

$$P(1 < X \le \sqrt{3}) = \frac{1}{\pi}(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-3}{3\cdot 4} =$$
$$= \frac{1}{12} \approx 0.0833 = 8.33\%.$$ `link a WolframAlpha ->`

La forma più o meno a campana si ravviserà in generale anche nelle densità discrete, per le quali la fondamentale formula

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

prima detta, che vale sia per variabili aleatorie discrete che continue, darà somme o serie invece di integrali.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Naturalmente esistono spazi di probabilità finiti non uniformi, per esempio ottenuti con dadi truccati; oppure con riferimento a una diagnosi e/o trattamento farmacologico, e un fissato intervallo temporale (per esempio 5 anni), e comunque in un'ottica frequentista, con *scores* da 1=morte a 6=ottimamente, potremmo avere per esempio:

$$
\begin{array}{ll}
3\% = P(morte) & \ldots \\
5\% = P(molto\, male) & \ldots.. \\
12\% = P(male) & \ldots\ldots\ldots. \\
20\% = P(stabile) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
40\% = P(bene) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
20\% = P(ottimamente) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

(Si noti la forma più o meno a campana).

Calcoliamo per esempio

$$P(\text{“}migliora\text{”}) = P(\text{“}bene\text{”} \vee \text{“}ottimamente\text{”}) =$$

eventi disgiunti, somma delle probabilità:

$$= P(\text{“}bene\text{”}) + P(\text{“}ottimamente\text{”}) =$$

$$= 40\% + 20\% = 60\%.$$

Per 2 soggetti

$$P(\text{“}entrambi\, morti\text{”}) =$$

$$= P(\text{“}morte\, del\ 1^\wedge\ soggetto\text{”} \wedge \text{“}morte\, del\ 2^\wedge\ soggetto\text{”}) =$$

<u>e nell'ipotesi di indipendenza</u>

$$= P(\text{“}morte\, del\ 1^\wedge\ soggetto\text{”}) \cdot P(\text{“}morte\, del\ 2^\wedge\ soggetto\text{”}) =$$

$$= 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 = 0.09\%$$

(Poco meno dell'1 per mille). Ma se i soggetti sono legati affettivamente, l'ipotesi di indipendenza diventa alquanto inverosimile. (La morte dell'uno in generale aumenta la probabilità di morte dell'altro a prescindere dalla terapia seguita).

Si noti che appena si esce dalla modellizzazione "perfetta" dei dadi e delle monete, si introducono inevitabilmente problematiche che poi di fatto si trasformeranno in incertezze nei risultati statistici. (Dove l'indipendenza, e la normalità gaussiana dei dati – che vedremo – sono spesso ipotesi implicite, di fatto imperfette).

Esistono anche spazi di probabilità infiniti, per i quali nessuna uniformità è possibile, e in cui nella realtà sensibile possiamo aspettarci che in generale tenderà a ricorrere una *distribuzione* in qualche modo *a campana* – eventualmente troncata da una parte.

37 Variabili aleatorie discrete

Data una v.a. discreta, cioè con valori "ben separati", come per esempio la X e la Y della lezione precedente, o queste

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \ldots & \frac{1}{2^k} & \ldots \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \textit{infiniti valori possibili ma staccati} \\ \\ \leftarrow \textit{qua si forma una serie geometrica} \end{matrix}$$

individuiamo dei *valori* x_k, in numero finito o anche infiniti ma comunque "ben separati" (non necessariamente interi) e corrispondentemente le loro probabilità $p_k := P(v.a. = x_k)$:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_k & [\ldots] \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k & [\ldots] \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \textit{fra le quadre possono esserci numeri, se i} \\ \\ \textit{valori sono infiniti, oppure no nell'altro caso} \end{matrix}$$

e ovviamente deve essere, nel senso di una somma o di una serie,

$$\textit{somma su tutti gli indici} \rightarrow \sum_k p_k = 1 \qquad (\textit{esistono serie con\_somma } 1, \textit{non solo geom.})$$

La funzione di ripartizione $F_X(t) := P(X \leq t)$ di una v.a. discreta X è una *funzione a scala (step function)* costante fra x_{k-1} e x_k, con salti pari a p_k in x_1, x_2,...,x_k... e "pallini pieni" a sinistra (continuità a sinistra).

Da adesso consideriamo solo valori interi; allora $p_k = P(v.a. = k)$.

La funzione

$$p_k := \begin{cases} P(X = k) & se\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

si chiama ***densità*** della variabile aleatoria X. Tenderemo a usare la lettera p coi pedici per le probabilità , mentre per i valori della v.a. possiamo usare x_1, x_2... per una v.a. X e y_1, y_2... per una v.a. Y, eccetera. O anche x_0, x_1... iniziando da 0, o da altro numero, a seconda dei casi. Per esempio per le X e W di prima

$$p_k = P(X = k) := 1/6, \quad k = 1, \ldots, 6$$

$$p_k = P(W = k) := 1/2^k, \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

Le densità si rappresentano graficamente coi bar chart.

37.1 Alcuni esempi di variabili aleatorie discrete

Esempio$_\mu$ (sulla notazione “binomiale” delle variabili aleatorie discrete).
Per una v.a. a 3 valori con $p_1 = \frac{1}{\pi}$ e $p_2 = \frac{1}{\pi^2}$ determinare p_3.
Si tratta di trovare l’unico numero incognito p_3 in

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi^2} & p_3 \end{pmatrix}$$

e da $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + p_3 = 1 \qquad \leftarrow$ somma 1 delle probabilità
segue subito $p_3 = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0.5804 = 58.04\%$.

Il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1,6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *“con legge”* e il simbolo $\mathbb{U}\{1,6\}$ lo leggeremo *“con legge uniforme discreta di parametri 1 e 6”*:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \ X \sim \mathbb{U}\{1,6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0,1\}$ rappresenta una moneta *equilibrata*.

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0,1\}$ e $\mathbb{U}\{1,6\}$.

Ecco una densità non uniforme

$$Y := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

che potrebbe rappresentare la durata in giorni di una malattia, come pure quest’altra

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev’essere $0 \le p \le 1$) ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

per esempio con $p := \dfrac{1}{2}$ si ha quella di prima $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^{k-1}} & \dots \end{pmatrix}$

e con $p := \dfrac{1}{3}$ si ha $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $Geom_1\left(\frac{1}{2}\right)$, la variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{1}{2}$ (simbologia per nulla standard purtroppo).

Osservazione. La probabilità di "$X = h$ *vel* $X = k$", con $h \neq k$, essendo eventi disgiunti, è la somma delle 2 probabilità:

$$P(X = h \ vel \ X = k) = P(X = h) + P(X = k)$$

e similmente con 3 o più valori diversi, e questo vale per le v.a. discrete con qualunque distribuzione.
Per esempio per la v.a. W considerata all'inizio

$$P(W = 2 \vee W = 3) = P(W = 2) + P(W = 3) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}$$

Nella prossima Lezione vedremo anche la **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0**, e vedremo meglio le variabili aleatorie uniformi discrete.

38 Variabili aleatorie uniformi e geometriche

In questa lezione approfondiremo le variabili aleatorie uniformi e geometriche accennate nella lezione precedente.

38.1 Variabili aleatorie uniformi discrete

Una **variabile aleatoria uniforme discreta** di parametri interi a e b ha n valori interi a, $a+1$, $a+2$,...,$b = a+n-1$, con le corrispondenti probabilità tutte uguali $p_k = \frac{1}{n}$ per $k = 1, ..., n$, e la sua distribuzione ovvero legge verrà indicata con $\mathbb{U}\{a, b\}$.
Per esempio il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *"con legge"*:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \; X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0, 1\} \text{ rappresenta una moneta } \textit{equilibrata}$$

Ecco un'altra, $\sim \mathbb{U}\{a, b\}$ con $a = -2$ e $b = 4$ e allora $n = b - a + 1 = 7$:

$$Y := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \; Y \sim \mathbb{U}\{-2, 4\}.$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0, 1\}$ e $\mathbb{U}\{1, 6\}$.

38.2 Variabili aleatorie e processo di Bernoulli

La variabili aleatoria di Bernoulli o bernoulliana di parametro p, è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

(per esempio una moneta con testa=1 con $p = \frac{1}{2}$ se regolare) identificabile con

$$\begin{pmatrix} successo & fallimento \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Denoteremo con $B(p)$ questa legge.
Un **processo di Bernoulli** è una successione $(X_1, X_2 ...)$ di variabili aleatorie indipendenti aventi la medesima legge di Bernoulli $B(p)$. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Processo di Bernoulli*:

> Un processo di Bernoulli può essere considerato come una sequenza di lanci di una moneta (eventualmente anche truccata). Ogni singolo lancio è detto prova di Bernoulli.
>
> In particolare, essendo le variabili indipendenti, vale la mancanza di memoria: la probabilità di una prova di Bernoulli non è influenzata dal risultato delle precedenti (che quindi non possono fornire alcuna informazione sulla nuova prova).

Una sua *realizzazione* è una successione di zeri e uni, con l'1 a denotare il successo, con una sua probabilità p, e lo 0 l'insuccesso: come 0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1...
Anche sopravvive, sopravvive, sopravvive, sopravvive, muore (e non serve continuare). (Si noti che qua il successo è la morte).

38.3 Variabili aleatorie di geometriche

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$)

$$X \sim Geom_1(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

per esempio con $p := \dfrac{1}{2}$ si ha quella di prima $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \dots & \frac{1}{2^{k-1}} & \dots \end{pmatrix}$

e con $p := \dfrac{1}{3}$ si ha $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$)

$$X \sim Geom_0(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 0,1,2... con densità

$$p_k = p(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

$$\text{per esempio con } p := \frac{1}{2} \text{ si ha} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \ldots & \frac{1}{2^k} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & \ldots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che vogliamo ottenere un certo risultato con una successione di prove indipendenti, in ciascuna delle quali il successo ha probabilità p. (Per esempio la testa con una moneta e allora $p = \frac{1}{2}$ oppure il 3 con un dado e allora $p = \frac{1}{6}$). Cioè consideriamo un processo di Bernoulli. Allora

$$P(\text{ci vogliono } k \text{ prove per il primo successo}) = p_k = p\,(1-p)^{k-1}$$

$$k = 1, 2, 3...$$

cioè la v.a. "numero di tentativi per avere il primo successo" ha legge $Geom_1(p)$.
Analogamente

$$P(\text{ci capitano } k \text{ insuccessi prima del primo successo}) = p\,(1-p)^k$$

$$k = 0, 1, 2...$$

cioè la v.a. "numero di insuccessi prima avere il primo successo" ha legge $Geom_0(p)$.
Il cosiddetto successo potrebbe per esempio essere un errore in farmacia, il primo della giornata, e in un articolo scientifico hanno effettivamente trovato questo:

> A (...) study involving 50 pharmacies located in six cities across the United States was conducted. A pharmacist trained to detect dispensing errors recorded the number of prescriptions filled by each

> pharmacy staff member and noted which prescription represented the staff member's first dispensing error (defined as any deviation from the prescriber's order) made during the observation period. (...) the observed cumulative distribution of dispensing errors could have come from a geometric probability distribution that assumed dispensing error rates of 2-3%.([102])

(Fra 2 e 3 percento di errori in farmacia rispetto alle indicazioni dei medici!)

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast \approx$ % Per una variabile aleatoria X geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{3}$ calcolare

$$P(X \geq 3).$$

SVOLGIMENTO.

$$P(X \geq 3) =$$

Con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(X < 3) =$$

la X è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori < 3

$$= 1 - P(X = 1 \vee X = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2)\big) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{3}$

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{1-1} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = 1 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{9-3-2}{9}$$

e in conclusione

[102] Am J Health Syst Pharm. 2006 Jun 1;63(11):1056-61. Geometric probability distribution for modeling of error risk during prescription dispensing. Carnahan BJ, Maghsoodloo S, Flynn EA, Barker KN.

$$\boxed{\frac{4}{9} \approx 0.444 = 44.4\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$
$\star \approx \%$ Si consideri un'entità biologica (come batteri, virus, corpuscoli sanguigni...) che da quando si forma, poi ha una vita (in giorni, interi) che è pari a 7 + una variabile aleatoria geometrica X iniziante da 0 di parametro $\frac{1}{2}$. (Quindi può vivere 7 giorni, 8 giorni, 9 giorni... eccetera, con probabilità via via sempre più piccole).
Che probabilità ha di vivere un numero pari di giorni?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{vive un numero pari di giorni}) = P(7 + X \text{ è pari}) =$$
$$= P(X \text{ è dispari}) =$$
$$= P(X \text{ è 1 oppure 3 oppure 5 oppure 7...}) =$$

più formalmente

$$= P(X = 1 \vee X = 3 \vee X = 5 \vee X = 7 \vee ...) =$$

e trattandosi di eventi disgiunti

$$= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + ... =$$

ricordando la densità $p_k = p\,(1-p)^k$ per $k = 0, 1, 2...$ della variabile aleatoria geometrica di parametro p iniziante da 0, nel nostro caso $\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})^k$,

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$

dove si riconosce la serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ (perchè ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...ar^n + ...$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ $\star \approx \%$ Per una variabile aleatoria geometrica Z iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{4}$ calcolare

$$P(Z > 2).$$

SVOLGIMENTO

$$P(Z > 2) =$$

con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(Z \leq 2) =$$

la Z è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori ≤ 2

$$= 1 - P(Z = 1 \vee Z = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(Z = 1) + P(Z = 2)\big) =$$

con la notazione consueta per la densità geometrica iniziante da 1

$$= 1 - (p_1 + p_2) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{4}$

$$= 1 - \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4}\Big)^{1-1} - \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4}\Big)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16 - 4 - 3}{16}$$

e in conclusione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.5625 = 56.25\%}$$

o con minore ma comunque accettabile precisione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.563 = 56.3\%}$$

Esempi ed esercizi

Esempio$^{f}_{\mu}$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{0,7\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0,7\}.$$

Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. U del soprastante esempio.
Esempio$^{f}_{\mu}$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{-3,1\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$V := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{-3,1\}.$$

Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. V del soprastante esempio.
Esercizio. Determinare la v.a. $Z \sim \mathbb{U}\{-4,2\}$ e poi calcolare $P(Z \geq 1)$, $P(Z > 1)$, $P(Z \leq 1)$, $P(Z \geq -\pi)$, $P(Z \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq Z < 1)$, $P(Z^2 = 1)$, $P(Z^2 \leq 1)$. [L'ultime vale $\frac{3}{7}$].
Esercizio. Determinare le v.a. geometriche dei 2 tipi, di parametri $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, e verificare le somme delle loro serie.
Esercizi$^{f}_{\mu}$ Rappresentare graficamente densità e funzioni di ripartizione delle v.a Z e W della lezione 37. Calcolare $P(W < 2)$, $P(W > 2)$, $P(W \geq 4)$, e con le serie $P(W > 100)$ e $P(W < 100)$.
Esercizi. Per una v.a. a 3 valori con $p_3 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $p_2 = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ determinare p_1. Per una v.a. A a 4 valori 0, 1, 2, 3 con $p_1 = \frac{1}{7}$ $p_2 = \frac{1}{11}$ e $p_0 = \frac{1}{5}$ determinare p_3, e poi $P(A \geq 1)$, $P(A > 1)$, $P(A \leq 1)$, $P(A \geq -\pi)$, $P(A \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq A < 1)$, $P(A^2 \leq 1)$, $P(A \neq 1)$.

39 Variabili aleatorie binomiali

Si dice che una variabile aleatoria X è binomiale di parametri n e p (e dev'essere n intero ≥ 1 e $0 \leq p \leq 1$) e si scrive $X \sim B(n,p)$, se ha *densità binomiale*, cioè

$$p_k = P(X = k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, ..., n. \tag{32}$$

Rappresenta il numero k di teste che si ottengono in n lanci di una moneta che ha $P(testa) = p$. Più in generale, dà la probabilità di un certo numero k di successi in uno schema successo-insuccesso con n prove (indipendenti) avendo il successo probabilità p ad ogni prova.

Esempio$^f_\mu$ Con $n = 2$ prove si possono ottenere 0 o 1 o 2 teste (che adesso consideriamo successi) e se la moneta è equilibrata è

$P(k=0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-0} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow P(0\,teste)$

$P(k=1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow P(1\,teste)$

$P(k=2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-2} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow P(2\,teste).$

Nota importante sulla forma a campana. Ecco il grafico della densità del soprastante esempio, che è un bar chart:

0 XXXX 0.25 qua c'è 1 solo caso su 4: CC cioè croce, croce
1 XXXXXXXX 0.5 qua ci sono 2 casi su 4: TC e CT
2 XXXX 0.25 qua c'è 1 solo caso su 4: TT cioè testa, testa

Si disegni la funzione di ripartizione. (Si osserverà che i 3 salti hanno ampiezza pari alle corrispondenti 3 probabilità, e questo è un fatto generale che succede per tutte le variabili aleatorie discrete, come già osservato.)

Si noti che nel soprastante bar chart si vede la distribuzione a campana molto più chiaramente che nel caso di un solo lancio

0 XXXXXX 0.5 (croce)
1 XXXXXX 0.5 (testa)

e si comincia a capire la natura della quasi onnipresente forma più o meno a campana: essa si forma in fenomeni composti da tante "cose che si sommano", parlando in modo (necessariamente) impreciso.
Similmente le altezze degli individui di una popolazione, o qualunque altro parametro biometrico, biomedico o fisiologico, tenderanno ad avere una distribuzione con forma più o meno a campana, perchè ognuno di quei parametri è risultante da molti altri: per esempio in un individuo altissimo potranno aver concorso nella stessa direzione ("successi") la genetica, l'alimentazione, concause fortuite imponderabili, e tale concordanza sarà rara mentre molti più individui avranno un'altezza media, e di nuovo pochi saranno bassissimi.
La forma a campana diventa ancora più evidente con 3 lanci di moneta, ovvero $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, e sempre più al crescere di n. Si faccia il bar chart di $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
Invece l'allontanarsi di p dal valore centrale $\frac{1}{2}$ causerà inizialmente asimmetria nella forma a campana (si faccia il bar chart relativo a $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$) ma al crescere di n l'asimmetria tenderà ad attenuarsi sempre più, rimanendo invece la centratura spostata rispetto alla metà $\frac{n}{2}$ di n: la campana tenderà a centrarsi intorno a $n\,p$.

Prova tu stesso. Leggiamo sul web([103]) "Il termometro segna già−41°, ma da queste parti è normale. Siamo nella nella Jacuzia, nel nord-est della Siberia, chiamata anche la regione del "Polo del Freddo Boreale". Qui d'inverno la temperatura non supera mai gli zero gradi, e rimane quasi sempre al di sotto dei −30°C, raggiungendo talvolta i −60°C." Disegna un ipotetico grafico della densità della funzione temperatura in quel luogo, segnando anche sull'asse delle ascisse il dato rilevato. Osserva sul grafico il significato delle parole usate "mai", "quasi sempre" e "talvolta":

[103] http://www.rainews.it/dl/rainews/media/Siberia-la-raccolta-del-ghiaccio-nella-citta-piu-fredda html Dalle informazioni sappiamo che la funzione densità vale 0 già da 0° in poi, e certamente prima di −273° ma in pratica, usando le conoscenze usuali della realtà sensibile, da −100°.

corripondono a 3 aree di sottografico, se la temperatura viene considerato un parametro "continuo" – cioè, in pratica, che può assumere valori con inifiniti decimali – e a somme di probabilità delle aste di un bar chart, se le temperature ambientali vengono discretizzate – come si usa – in valori interi. La parola "normale" riferita al valore $-41°$ si riferisce a una quarta area, purchè la normalità si riferisca al significato $\leq -41°$, altrimenti nel caso continuo la probabilità dei $-41°$ *esatti* è 0, e nel caso discreto sarà senz'altro *piccola*, tutt'altro che *grande* ("normale").

In mancanza di altre informazioni – che sarebbe Medicina, che qua non vogliamo e non possiamo fare – per le temperature corporee umane possiamo aspettarci similmente un grafico a campana, seppure situato altrove, intorno ai 37°.

Nota sulle distribuzioni con 2 punti di massimo. Invece distribuzioni "bimodali" fanno ritenere che dietro vi siano 2 fenomeni distinti.
Per esempio se misuriamo i tempi di impegno ad uno sportello, e dopo aver (sapientemente) riunito i tempi misurati in classi facciamo l'istogramma, e questo presenta 2 massimi nettamente distinti, lontani, è plausibile che allo sportello i clienti stiano facendo 2 operazione diverse: chi un'operazione più rapida, chi una più laboriosa. (Nella zona intermedia fra i 2 massimi sono i veloci a fare l'operazione laboriosa e i lenti a fare quella semplice).

Esempio$^{f}_{\mu}$ Qual è la probabilità di ottenere [esattamente] 3 volte il numero 1 su 7 lanci di un dado [regolare]?
Il successo ad ognuna delle $n = 7$ prove ha probabilità $\frac{1}{6}$ e allora, con la densità $B\left(7, \frac{1}{6}\right)$, la probabilità cercata è:

$$P(k=3) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{7-3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4 =$$

$$= \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{5^4}{6^7} = 5\cdot7\cdot\frac{625}{279\,936} = \frac{21\,875}{279\,936} \approx 0.0781 = 7.81\%.$$

(Diciamo pure, a parole, circa 8%).

Esempi ed esercizi

Esempio$^{f}_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte il numero 7 con 5 lanci di un dado regolare a 8 facce?
Potremmo sommare le 4 probabilità

$$P(k=2)+P(k=3)+P(k=4)+P(k=5)$$

ma è ovvio che conviene considerare l'evento complementare e cioè calcolare

$$\begin{gathered}1-(P(k=0)+P(k=1))= \\ =1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{5-0}-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{5-1}= \\ =1-1\cdot 1\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{5}-5\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(\frac{7}{8}\right)^{4}= \\ =1-\left(\frac{7}{8}\right)^{4}\cdot\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{8}\right)=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{4}\cdot\frac{2}{8}=1-\frac{2\,401}{16\,384}= \\ =\frac{13\,983}{16\,384}\approx 0.853=85.3\%.\end{gathered}$$

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere 3 volte il numero 4 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte il numero 3 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte il numero 3 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte numeri primi con 4 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte testa con 5 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte croce con 6 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte testa con 7 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero dispari di volte testa con 5 lanci di una moneta regolare?

40 Leggi congiunte e indipendenza

40.1 Introduzione alle leggi congiunte

Considereremo solo coppie di variabili aleatorie discrete ma con qualche attenzione tutto può essere esteso a 3 o più variabili aleatorie. Date 2 variabili aleatorie discrete X e Y

$$X := \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \dots x_k\, [\dots] \\ p_1\, p_2\, p_3 \dots p_k\, [\dots] \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} y_1\, y_2\, y_3 \dots y_k\, [\dots] \\ p_1\, p'_2\, p'_3 \dots p'_k\, [\dots] \end{pmatrix}$$

si può dimostrare che la coppia ordinata (X,Y) è una v.a., detta *2-dimensionale*. La sua densità è la funzione **densità congiunta**

$$p(x,y) := P(X = x \wedge Y = y)$$

per esempio per i 2 dadi, o per la coppia di lanci di 1 dado,

$$(X,Y) = \begin{pmatrix} (1,1)\,(1,2) & \dots & (6,6) \\ \frac{1}{36}\ \ \frac{1}{36} & \dots & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & per\ x, y = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad \textit{che scriveremo anche } p_{i,j}\,.$$

Detto V il prodotto cartesiano degli insiemi dei valori delle v.a.

$$V := \{x_1, x_2, x_3 \dots x_k\, [\dots]\} \times \{y_1, y_2, y_3 \dots x_k\, [\dots]\}$$

è ovviamente

$$\sum_{(x,y)\in V} p(x,y) = 1 \tag{33}$$

e se $A \subseteq V$, avendosi eventi disgiunti si ha ovviamente

$$P(A) = \sum_{(x,y)\in A} p(x,y) \tag{34}$$

per esempio per i 2 dadi regolari

$$P(X+Y=8) = p(2,6) + p(3,5) + p(4,4) + p(5,3) + p(6,2) = \frac{5}{36}.$$

40.2 Densità marginali e indipendenza

Date le 2 v.a. discrete X e Y e la **v.a. bidimensionale** (X,Y) prima considerate, le densità p' di X e p'' di Y si chiamano **densità marginali** di (X,Y). Adesso indichiamo con p la densità congiunta. è (teorema)

$$p'_i = \sum_j p_{i,j} \qquad p''_j = \sum_i p_{i,j}$$

Le 2 v.a. X e Y si dicono **v.a. indipendenti** se

$$p_{i,j} = p'_i \cdot p''_j \qquad \forall\, i,j \quad \textit{ovvero se congiunta=prodotto delle marginali.}$$

Per esempio i 2 dadi o il doppio lancio di prima, con le marginali costantemente $\frac{1}{6}$ e la congiunta costantemente $\frac{1}{36}$. Invece questa densità congiunta

$$p_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{30} & \textit{per } i,j = 1,2,3,4,5,6,\ i \neq j \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

dà luogo a 2 v.a. (non determinate nei valori per adesso)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

che non sono indipendenti perchè $p_{1,2} = \frac{1}{30} \neq \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = p'_1 \cdot p''_2$.
Ecco un'altra densità $p_{i,j}$ di v.a. bidimensionale (X,Y)

$$\begin{array}{llllllll}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & & \\
x_1 & \frac{4}{44} & \frac{3}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \to & \frac{11}{44} & = p'_1 \\
x_2 & \frac{3}{44} & \frac{4}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \to & \frac{11}{44} & = p'_2 \\
x_3 & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{5}{44} & \frac{5}{44} & \to & \frac{14}{44} & = p'_3 \\
x_4 & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \to & \frac{8}{44} & = p'_4 \\
p_{4,1} \nearrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
 & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & & & \\
 & p''_1 & p''_2 & p''_3 & p''_4 & & &
\end{array}$$

con X e Y non indipendenti:

$$p_{1,2} = \frac{3}{44} \neq \frac{11}{44} \cdot \frac{11}{44} = p'_1 \cdot p''_2.$$

(Lasciamo tutto in 44-esimi sebbene qualche semplificazione sarebbe possibile).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{14}{44} & \frac{8}{44} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} \end{pmatrix}.$$

41 Speranza matematica e varianza

La speranza matematica di una v.a. essenzialmente è un numero che congloba
la probabilità degli eventi
col loro
costo ovvero guadagno.

La varianza di una v.a. estende il concetto già visto di varianza di un dataset numerico ovvero di una popolazione: è una misura della variabilità.

Consideriamo in questa Lezione variabili aleatorie discrete, e nella Lezione 44 le continue.

41.1 Speranza matematica

Supponiamo che ora lanceranno un dado, e io posso scegliere o di ricevere 2 euro se viene pari o 5 euro se viene 3: cosa mi conviene scegliere?

• Se spero nel pari, mediamente vincerei metà volte, e allora posso considerare che mediamente vincerò metà dei 2 euro in palio, cioè 1 euro;

• se spero nel numero 3, mediamente vincerei 5 euro 1 volta su 6, e allora posso considerare che mediamente vincerò 5/6 dell'euro euro in palio.

Allora conviene la scommessa sul pari perchè 1 è più di 5/6.

Il concetto è immensamente più generale dei giochi d'azzardo, perchè non solo con le assicurazioni, ma anche coi fatti dell'economia e della salute pubblica e individuale, in ultima analisi, la situazione con
spese certe
e ricavi incerti
è analoga ad un gioco d'azzardo.

Un'attenta considerazione del caso numerico soprastante ci induce a definire come **speranza matematica** (o *media* o *valore atteso*) di una variabile aleatoria discreta $X := \binom{x_1\, x_2\, x_3 \dots x_k\, [\dots]}{p_1\, p_2\, p_3 \dots p_k\, [\dots]}$

$$\mu = E(X) := \sum_k x_k \cdot p_k \qquad \textit{somma su tutti i valori } x_k \textit{ della v.a.}$$

e questa è una somma finita o una serie, e in quest'ultimo caso a livello teorico si richiede anche una condizione di regolarità, $\sum_k |x_k| \cdot p_k < +\infty$ che in questa trattazione elementare diamo ma mai calcoleremo, e comunque è sempre verificata per le variabili aleatorie che considereremo.

41.2 Varianza

Se esiste la speranza matematica, si definisce la **varianza** di una v.a. discreta X in 2 modi equivalenti

$$\sigma^2 = Var(X) := \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot p_k = E(X^2) - E(X)^2$$

e la radice quadrata si dice **deviazione standard**, σ o SD, che ha la stessa unità di misura della variabile aleatoria.

Per esempio le giocate sul pari e sul 3, prima considerate, producono guadagni medi rispettivi

$$E(U) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \qquad E(V) = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} \approx 0.833.$$

Ma con diversa varianza, che in qualche modo esprime la tendenza a rischiare molto per avere molto: la si calcoli nei 2 casi con le formule soprastanti.

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(x)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}\{a,b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
$X \sim B(n,p)$	$n{\cdot}p$	$np(1-p)$
X geometrica iniziante da 0	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
X geometrica iniziante da 1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Esercizio$^f_\mu$ Qual è il valore atteso del punteggio di un dado? E la varianza?
Usando la definizione di speranza matematica si ha

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Usando il teorema sulla speranza matematica di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$X \sim \mathbb{U}\{1,6\} \Rightarrow E(X) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5\,(\textit{come sopra}).$$

Con le 2 definizioni di varianza si ha ugualmente

$$Var(X) = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \ldots + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 = \ldots = \frac{35}{12}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad Var(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

e con il teorema sulla varianza di $\mathbb{U}\{a,b\}$ si ha ugualmente

$$X \sim \mathbb{U}\{1,6\} \Rightarrow Var(X) = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}.$$

41.3 Note su varianza e istogramma della densità

Grande varianza ovvero deviazione standard: valori dispersi.
Piccola varianza ovvero deviazione standard: valori addensati presso la media.

Per la varianza, esistono varianze più piccole (valori più addensati) o più grandi di altre (valori più dispersi) ma non ha molto senso considerare grande o piccola una singola varianza.
Quanto sopra detto vale per qualunque densità discreta (e in effetti, poi, varrà anche per le continue). (Anche se "bimodale").

Se l'istogramma di una densità discreta (o, in seguito, il grafico di una densità continua) ha una forma più o meno a campana, com'è per le variabili aleatorie binomiali,

a grande varianza corrisponde campana bassa e larga

a piccola varianza corrisponde campana alta e stretta.

Quest'osservazione vale anche per l'uniforme discreta e le geometriche, che, con qualche elasticità, si può pure dire che abbiano densità a forma più o meno a campana – seppure molto vagamente. E similmente varrà per l'uniforme continua, l'esponenziale, e molte altre.

41.4 L'aspettativa di vita o speranza di vita

Consideriamo un esserino robotizzato che viene creato il 1 gennaio, e il 31 dicembre lancia al suo interno un dado e se viene 1 si spegne, muore. Se è sopravvissuto, il 31 dicembre dell'anno dopo fa la stessa cosa e così via. La durata della sua vita è una variabile aleatoria di cui possiamo considerare la speranza matematica. In questo caso semplice, è una variabile aleatoria geometrica iniziante da1 di parametro $\frac{1}{6}$ e allora con speranza matematica 6, che è l'aspettativa di vita dell'esserino, in anni.
Possiamo ipotizzare un esserino automatico che lanci due dadi e

una moneta e cessa di vivere solo con 1, 1, testa, che ha probabilità $\frac{1}{72}$, e allora l'esserino ha vita media 72 anni, e l'aspettativa di vita nel mondo è più o meno quella.
È un modello della situazione relativa agli esseri umani, ma con varie semplificazioni:

– l'essere umano può morire ogni giorno, ovviamente in generale con probabilità molto minore di $\frac{1}{72}$;

– la probabilità di morte non è costante negli anni: è molto maggiore nel primo anno che nel secondo, e in vecchiaia aumenta enormemente: un centenario in generale ha probabilità molto minore di $\frac{71}{72}$ di vivere un altro anno;

– la probabilità di morte ad un determinato anno di età varia globalmente nel tempo: un diciottenne del 2018 aveva molta più probabilità di arrivare a 19 anni dei diciottenni del 1918, soggetti a Prima Guerra Mondiale – e altre difficoltà di quel tempo.
Con riferimento all'ultimo punto, come si fa a calcolare la speranza di vita, se non sappiamo quali guerre eventualmente ci saranno, e altre catastrofi, o più in generale cambiamenti – anche migliorativi, ovvio – della sopravvivenza?
È assolutamente impossibile calcolarla, e non ha neppure alcun senso reale la probabilità che una persona vivente oggi sia viva fra 1 anno, senza sapere neppure se il mondo esisterà ancora. (Come sarebbe definita una tale probabilità? Non ha alcun senso). Quello che viene chiamato aspettativa o speranza di vita, detto molto semplificatamente, è il risultato di un calcolo in cui si considera tutto "a bocce ferme", cioè come se le cose dovessero andare come sono andate finora. (Per i ventenni, i ventunenni, i ventiduenni, eccetera, per tutte le classi di età). *Non è una vera speranza matematica* in senso stretto, ma in qualche modo la "imita".

Oltre all'aspettativa di vita alla nascita, si può considerare l'aspettativa di vita residua, ad una determinata età. Per gli esserini robotizzati, è uguale a quella alla nascita, perchè la variabile aleatoria geometrica gode dell'*assenza di memoria*: restano sempre da vivere mediamente 6 o 72 anni nei due casi considerati. (E similmente costante è il tempo da attendere ancora un determinato numero, o ambo, eccetera, del lotto, anche se “in ritardo”, contrariamente a quello che pensano ingenui giocatori). Per l’essere umano ovviamente non è così, per il variare della mortalità al progredire dell’età. In particolare in Italia l’aspettativa di vita a 65 anni ha un importante valore legale e infine sociale perchè a quel valore, determinato dall’ISTAT, Istituto Nazionale di Statistica, è per legge legata la cosiddetta *età pensionabile*.

Sulla Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, Serie Generale - Anno 160, Numero 267, del 14 novembre 2019, nel Decreto 5 novembre 2019 del Ministero dell’Economia e delle Finanze, leggiamo: ”Vista la nota del Presidente dell’Istituto nazionale di statistica (ISTAT) n. 2768968/19 del 16 ottobre 2019, con cui si comunica che la variazione della speranza di vita all’età di sessantacinque anni e relativa alla media della popolazione residente in Italia ai fini dell’adeguamento dei requisiti di accesso al pensionamento con decorrenza 1° gennaio 2021 corrispondente alla differenza tra la media dei valori registrati negli anni 2017 e 2018 e il valore registrato nell’anno 2016 è pari a 0,021 decimi di anno”. (Si tratta, ovviamente, di questione connessa anche a fattori medici e farmaceutici, oltre che sociali, politici e geopolitici; la spesa farmaceutica statale è in enorme diminuzione negli ultimi anni, pare ridotta del 70 percento in un decennio).

41.5 Passeggiate aleatorie

Traiamo da Wikipedia, l’enciclopedia libera, versione inglese alla voce “Random walk”, in italiano *passeggiata aleatoria”*:

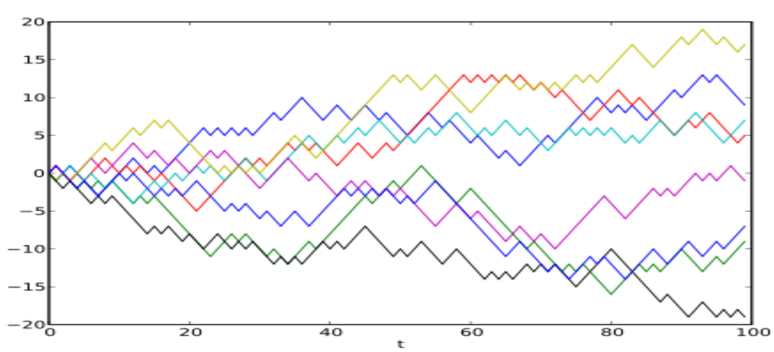
> A random walk is a mathematical object, known as a stochastic or random process, that describes a path that consists of a succession of random steps on some mathematical space such as the integers. An elementary ex-

> ample of a random walk is the random walk on the integer number line, $\mathbb{Z}$, which starts at 0 and at each step moves +1 or −1 with equal probability. Other examples include the path traced by a molecule as it travels in a liquid or a gas, the search path of a foraging animal, the price of a fluctuating stock and the financial status of a gambler can all be approximated by random walk models, even though they may not be truly random in reality.
> (...) If a and b are positive integers, then the expected number of steps until a one-dimensional simple random walk starting at 0 first hits b or $-a$ is ab.

Cioè detto T il numero di passi fino al raggiungimento di b o $-a$,

$$E(T) = a \cdot b.$$

Traiamo da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Random_Walk_example.svg la seguente figura, che rappresenta (la parte iniziale di) 8 cammini aleatori.



Su queste basi ipotizziamo ora un “parametro vitale complessivo”, che non riusciamo in questo esempio semplificato a specificare nei dettagli, ma che comunque non deve superare il valore soglia 7, nè scendere sotto il valore soglia -7, variando di anno in anno nell’individuo, salendo o scendendo di 1 con uguale probabilità 50%. Possiamo proprio immaginare un robottino che ogni 31

dicembre lancia una moneta e somma 1 se viene testa o sottrae 1 se viene croce ad un suo "capitale virtuale", partito da 0, e muore ovvero si spegne se sfora i limiti prestabiliti. In base a quanto sopra detto, con $a = b = 8$, la speranza matematica della vita è 64 anni, cioè $8 \cdot 8$. Ma se ora (come in un videogioco si danno le vite supplementari) supponiamo che la prima volta che una soglia (8 o -8) viene raggiunta, un farmaco modifica di 1 o -1 il parametro vitale nella direzione giusta, ecco che al nostro ipotetico soggetto la Farmacia regala altri anni di vita! Superato il momento critico, quando rischiava di andare a 8 o -8 e morire, ricomincia una nuova vita; certo la ricomincia in posizione rischiosa, a 7 o -7, e al passo successivo può morire (e non è detto che gli sia concessa una seconda salvezza), ma non è detto, magari si allontana dal limite invalicabile e sopravvive ancora a lungo.
Questo può essere visto come uno dei significati della Farmacia: la cura urgente del caso acuto (con qualche speranza che il soggetto si allontani poi dalla situazione limite).

41.6 Esercizi sulla speranza matematica di v.a. discrete

Esercizio$^{f}_{\mu}$ Qual è la vincita netta attesa giocando 1 euro su una cinquina del lotto? (Con la parola "netta" intendiamo che conteggiamo la perdita sicura di 1 euro, il costo della giocata).
Detta V la v.a. "vincita netta", ricordando che si vince 6 milioni di volte la giocata, con probabilità $1/\binom{90}{5} = 1/43\,949\,268$,

$$V = \begin{pmatrix} 5\,999\,999 & -1 \\ \frac{1}{43\,949\,268} & \frac{43\,949\,267}{43\,949\,268} \end{pmatrix}$$

$$E(V) = 5\,999\,99 \cdot \frac{1}{43\,949\,268} - \frac{43\,949\,267}{43\,949\,268} = -\frac{37\,949\,268}{43\,949\,268} =$$

adesso magari semplifichiamo per 2, poi ancora per 2, poi per 3

$$= -\frac{3\,162\,439}{3\,662\,439} \approx -0.8635\, euro$$

cioè una perdita media di circa 86 centesimi di euro. (In generale i giochi d'azzardo sono molto meno svantaggiosi di questo).
Esercizio$^{f}_{\mu}$ Qual è la vincita netta attesa giocando 1 euro su un numero della roulette europea?
La vincita avviene con probabilità $1/37$ perchè i numeri equiprobabili sono 37, da 0 a 36, e dà 36 volte la giocata:

$$V = \begin{pmatrix} 35 & -1 \\ \frac{1}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}$$

$$E(V) = 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37} \approx 0.027\, euro$$

cioè mediamente perdiamo, molto approssimativamente, 3 centesimo ad ogni giocata di 1 euro.

42 Alcune variabili aleatorie continue

Come abbiamo visto, una v.a. è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ che ad eventi associa numeri e si dice continua se i valori riempiono almeno un intervallo.
Per esempio il peso del primo neonato del prossimo anno, misurato con "infiniti decimali" (numero reale, con precisione infinita).
Ogni singolo valore ha probabilità nulla: $P(X = t) = 0, \forall\, t$.

In questa trattazione elementare, le v.a. continue che considereremo sono **molto regolari**: **la funzione di ripartizione**

$$F_X(z) := P(X \le z)$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$, e derivabile salvo al più in 1 o 2 punti.
La derivata della f.r., completata ad arbitrio in quegli eventuali punti particolari ovvero *singolari*,

$f(z) := F'_X(z) = DP(X \le z)$ $\quad$ *spesso denotata f_X, con argomento $z,t,u,x...$*

si chiama **densità** della variabile aleatoria.

Per fissare le idee nella mente, si immagini

la funzione di ripartizione come una curva sigmoide che cresce da 0 a 1

la densità come una funzione a campana nel senso più lato possibile con asintoto l'asse delle ascisse.

Variazioni sono possibili nei singoli casi ma intanto fissiamo nella mente qualcosa da immaginare per la generalità dei casi:

f.r. $\leftrightarrow$ sigmoide $\quad$ *tipo arcotangente ma riscalata fra 0 e 1*

densità $\leftrightarrow$ campana

Una funzione f è densità di una v.a. se e solo se

$$f(t) \ge 0 \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Se f e F_X sono rispettvamente densità e f.r. di una variabile aleatoria continua X, allora (teorema)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall\, x$$

$$P(X = x) = 0 \qquad \forall\, x$$

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt \qquad \forall\, a, b, \ \ \textit{ogni} \le \ \textit{sostituibile con} \ <$$

e in quest'ultima a e b possono essere infiniti (col <, ovvio).

Esempio 1: v.a. di Cauchy.

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

La distribuzione di Cauchy ha in Farmacia almeno 4 utilità:

– fornisce un modello di densità a campana di cui si possono calcolare i valori con le 4 operazioni

– fornisce un modello di densità a campana di cui si possono calcolare gli integrali con funzioni elementari (l'arcotangente)

– fornisce un esempio di variabile aleatoria priva di speranza matematica

– è usata in Spettroscopia: LINK->

Esempio 2: v.a. $\sim \mathbb{U}[a,b]$ oppure $\mathbb{U}(a,b)$, uniforme su $[a,b]$.

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \textit{se } a \le t \le b \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \textit{se } a \le x \le b \\ 1 & \textit{se } x > b \end{cases} .$$

Esempio 3: v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$.

$$f(t) := \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \textit{se } t \ge 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{se } x \ge 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} .$$

La densità esponenziale modellizza molte cose fra cui l'*intertempo* fra 2 chiamate telefoniche a una farmacia o a un qualunque servizio in un tempo del giorno in cui esse arrivano in ogni minuto con la stessa probabilità: Leggiamo sulla Wikipedia in inglese alla voce *Exponential distribution*:

> if we focus on a time interval during which the rate is roughly constant, such as from 2 to 4 p.m. during work days, the exponential distribution can be used as a good approximate model for the time until the next phone call arrives.

Ecco 11 valori (di una simulazione informatica) della variabile aleatoria esponenziale di parametro 3.5, con 3 cifre decimali:
0.163 0.190 0.695 0.132 0.979 0.157 0.023 0.236 0.291 0.113 0.015
Si notino i valori piccoli e i valori grandi, distribuiti in un modo tipico, caratterizzante appunto la variabile aleatoria esponenziale.

Ecco online su WolframAlpha un po' di determinazioni, ad ogni reload nuove, (di una simulazione informatica) della variabile aleatoria esponenziale di parametro 3.5: `link->`

La distribuzione esponenziale ha un'ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate. Traiamo da Wikipedia in inglese, l'enciclopedia libera, alla voce

> The exponential distribution occurs naturally when describing the lengths of the inter-arrival times in a homogeneous Poisson process.
>
> The exponential distribution may be viewed as a continuous counterpart of the geometric distribution, which describes the number of Bernoulli trials necessary for a discrete process to change state. In contrast, the exponential distribution describes the time for a continuous process to change state.

> In real-world scenarios, the assumption of a constant rate (or probability per unit time) is rarely satisfied. For example, the rate of incoming phone calls differs according to the time of day. But if we focus on a time interval during which the rate is roughly constant, such as from 2 to 4 p.m. during work days, the exponential distribution can be used as a good approximate model for the time until the next phone call arrives. Similar caveats apply to the following examples which yield approximately exponentially distributed variables:
>
> • The time until a radioactive particle decays, or the time between clicks of a Geiger counter
>
> • The time it takes before your next telephone call
>
> • The time until default (on payment to company debt holders) in reduced form credit risk modeling
> Exponential variables can also be used to model situations where certain events occur with a constant probability per unit length, such as the distance between mutations on a DNA strand, or between roadkills on a given road.
> In queuing theory, the service times of agents in a system (e.g. how long it takes for a bank teller etc. to serve a customer) are often modeled as exponentially distributed variables. (...)

Abbiamo introdotto la speranza di vita con la variabile aleatoria geometrica, col robottino che può "morire" solo all'ultimo giorno dell'anno. La variabile aleatoria esponenziale è in qualche modo il corrispondente continuo della variabile aleatoria geometrica, e tiene conto della possbilità di morte – o di guasto per gli apparati tecnologici, dai motori alle lampadine ai fusibili – in ogni momento. Entrambe le variabili aleatorie godono dell'assenza di memoria: resta da vivere sempre la stessa quantità di tempo, mediamente. Esattamente come per la variabile aleatoria geometrica, c'è però da dire che sia per gli esseri viventi che per le macchine, la mortalità non è costante: è molto maggiore presso la nascita, e nella vecchiaia. Entrambi i modelli allora sono molto approssimativi, seppure danno un'idea della questione.

43 Quantili delle variabili aleatorie continue

Se l'insieme dove f è positiva è un intervallo, anche se illimitato, allora (si dimostra) per ogni $\alpha \in]0,1[$ esiste un'unica soluzione dell'equazione

$$F_X(t) = \alpha$$

che si chiama *quantile di ordine* α, indicato talvolta con q_α:

$$P(X \leq q_\alpha) = \alpha.$$

Si chiama *mediana* il quartile $q_{0.5}$ di ordine 0.5 ovvero 1/2, o 50%.
Esempio. Per una legge esponenziale di parametro 3 calcolare $P\Big(X \geq \frac{2}{3}\ln 2\Big)$.
La densità è

$$f(x) := \begin{cases} 3e^{-3x} & \textit{se } x \geq 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

e allora

$$P\Big(X \geq \frac{2}{3}\ln 2\Big) = \int_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} 3e^{-3t}\,dt = \star$$

calcoliamo l'integrale indefinito con la (25) con $z := -3t + 0$

$$\int 3e^{-3t}\,dt = \frac{1}{-3}\Big(\int 3e^{z}\,dz\Big)_{z=-3t} = -\frac{1}{3}\big(3e^{z}\big)_{z=-3t} = -e^{-3t}$$

$$\text{riprendiamo } \star = \Big[-e^{-3t}\Big]_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} = -e^{-\infty} - \Big(-e^{-3\frac{2}{3}\ln 2}\Big) =$$

$$\underset{\textit{intendendendo } e^{-\infty} \textit{ nel senso del limite e allora } 0}{=} 0 + e^{-2\ln 2} = e^{\ln 2^{-2}} = 2^{-2} =$$

$$= \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

(e allora $\frac{2}{3}\ln 2$ è il quantile di ordine $\frac{1}{4}$ ossia 0.25 ossia 25%).
Calcolando la probabilità p dell'evento complementare $X < \frac{2}{3}\ln 2$, e poi facendo $1 - p$, si potevano evitare gli infiniti.
Esercizi. Trovare le mediane dell'uniforme e dell'esponenziale. [Si troverà $q_{0.5} = \frac{a+b}{2}$ e $q_{0.5} = \frac{1}{\lambda}\ln 2$ rispettivamente].

Esercizi. Trovare i quartili di ordine $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ dell'uniforme e dell'esponenziale. Per un'esponenziale di parametro 2 calcolare $P(X \geq 3)$. (Si può calcolare come $1 - P(X < 3)$ evitando l'infinito).

Nota. Sia per variabili aleatorie discrete che continue, *distribuzione* è sinonimo di *legge*, e indica sia la *densità* che la *funzione di ripartizione* (e in via teorica anche ogni altra funzione ad esse equivalente ma in pratica useremo quelle due).

Proprietà di ogni f.r. $F(x)$ di v.a. continua:
1) ha valori fra 0 e 1, cioè $0 \leq F(x) \leq 1$;
2) è non decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;
3) tende a 0 per $x \to -\infty$ e tende a 1 per $x \to +\infty$;
4) è continua (in trattazioni di livello superiore continua a destra);
5) è crescente puntualmente ovunque la densità $f = F'$ è positiva.

Proprietà di ogni densità $f(x)$ di v.a. continua:
1) ha valori ≥ 0, sappiamo;
2) ha integrale 1 su tutto $\mathbb{R}$, sappiamo; e poi si dimostra che
3) è continua salvo al più 1 o 2 punti (in questa trattazione).

3 bis) Tutte le densità che considereremo in questa trattazione tendono a 0 per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$ (ma densità particolarmente "capricciose" potrebbero non avere uno o entrambi quei limiti, con infinite oscillazioni con "campate" strette strette);

Esercizi.

•• I principali quantili considerati in statistica sono:

i *quartili* $q_{0.25}$, $q_{0.5}$, $q_{0.75}$, e il secondo è la mediana;

i *decili* $q_{0.1}$, $q_{0.2}$,...,$q_{0.9}$, corrispondenti a 10%, 20%,...,90%;

i *centili* o *percentili* $q_{0.01}$, $q_{0.02}$,...,$q_{0.99}$, corrispondenti a 1%, 2%,...,99%;

due *ventili*, precisamente $q_{0.05}$ e $q_{0.95}$.

Si calcolino relativamente alla densità esponenziale.
Per esempio per i decili si troverà

$$q_{k/10} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10}{10-k} \qquad k = 1, ..., 9$$

(Si noti che per $k = 5$ si ottiene la mediana).

•• Per una v.a. X di densità esponenziale di parametro 5 calcolare $P(X < 2)$, $P(X^3 > 2)$, $P(X^2 \geq 4)$.

•• Si consideri una v.a. Z di densità

$$f(z) := \begin{cases} 6z(1-z) & se\, 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases} .$$

Senza fare calcoli ma col disegno del grafico stabilire quanto vale la mediana e mettere in ordine crescente

$$P(Z < 0.4), \quad P(Z > 0.9), \quad P(Z \leq 0.2), \quad P(Z \geq 0.7).$$

44 Speranza matematica, varianza, covarianza

Definizioni. Consideriamo una v.a. X continua di densità f.

$$\textbf{Speranza matematica: } \mu = E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

se l'integrale con $|x|$ esiste finito, che non verificheremo mai.
La speranza matematica si chiama anche *valore atteso* o *media*.

$$\textbf{Varianza: } \sigma^2 = Var(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$$

Sia per v.a. discrete che continue:

$$\textbf{Deviazione standard: } \sigma := \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2}.$$

$$\textbf{Covarianza: } Cov(X,Y) := E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

e se la covarianza è 0 le v.a. si dicono *incorrelate*.
Diremo **indipendenti** 2 variabili aleatorie X e Y continue se informazioni sui valori assunti da una non modificano le nostre conoscenze probabilistiche sui valori dell'altra, ovvero e per ogni a, x, c, y con $a < x$ e $c < y$

$$P(a < X < x \wedge c < Y < y) = P(a < X < x) \cdot P(c < Y < y)$$

cioè $\{a < X < x\}$ e $\{c < Y < y\}$ sono eventi indipendenti.
Spesso le variabili aleatorie incorrelate sono indipendenti.

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}[a,b]$ ovvero $\mathbb{U}(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
X esponenziale di parametro λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
X ~Cauchy	$\nexists$	$\nexists$

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Abbiamo introdotto la speranza di vita con la variabile aleatoria geometrica, col robottino che può “morire” solo all’ultimo giorno dell’anno. La variabile aleatoria esponenziale è in qualche modo il corrispondente continuo della variabile aleatoria geometrica, e tiene conto della possbilità di morte – o di guasto per gli apparati tecnologici, dai motori alle lampadine ai fusibili – in ogni momento. Entrambe le variabili aleatorie godono dell’assenza di memoria: resta da vivere sempre la stessa quantità di tempo, mediamente. Esattamente come per la variabile aleatoria geometrica, c’è però da dire che sia per gli esseri viventi che per le macchine, la mortalità non è costante: è molto maggiore presso la nascita, e nella vecchiaia. Entrambi i modelli allora sono molto approssimativi, seppure danno un’idea della questione.

44.1 Approfondimenti sulle v.a. discrete e continue

Tutte le cose che diremo qua valgono sia per variabili aleatorie discrete che continue.

Con c intendiamo un qualunque numero reale. E $\sigma := \sqrt{Var(X)}$.

Relazioni di 1 variabile aleatoria con 1 costante:

$$E(c + X) = c + E(X) \tag{35}$$

$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X) \tag{36}$$

$$Var(c + X) = Var(X) \tag{37}$$

$$Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X) \tag{38}$$

Relazioni di 2 variabili aleatorie:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \tag{39}$$

$$X, Y \text{ indip.} \Rightarrow \text{incorrelate} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{40}$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X, Y) \tag{41}$$

$$\text{indip.} \Rightarrow Var(X + ... + X_n) = Var(X_1) + ... + Var(X_n) \tag{42}$$

Disuguaglianza di Chebyshev([104]). Riguarda gli *scarti dalla media* $|X - E(X)|$, precisamente la probabilità che siano "grandi" o per meglio dire superino un fissato numero c:

$$P(|X - E(X)| > c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \tag{43}$$

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.
Essa ci dice che minore è la variabilità della grandezza aleatoria X, minore è la probabilità che X assuma valori distanti dalla media. Equivalentemente con l'evento complementare

$$P(|X - E(X)| \leq c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2} \tag{44}$$

[104] Ovvero di Bienaymè-Chebyshev. Miglior traslitterazione dal russo Čebyšëv.

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.

Scrivendo da adesso μ per la speranza matematica e σ per lo scarto quadratico medio, coi valori di c multipli interi positivi $m\,\sigma$ di σ, $m = 1, 2, 3...$, osservato che $1 - \frac{\sigma^2}{(m\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{m^2}$, la Disuguaglianza di Chebyshev è

$$P(|X - \mu| \leq m\,\sigma) \geq 1 - \frac{1}{m^2} \qquad m = 1, 2, 3...$$

e con $m := 2, 3, 4, 5$ (il caso $m := 1$ non è significativo) per una **variabile aleatoria discreta o continua qualunque** purchè dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2, risulta

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \geq \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} = 0.8888... \approx 88.9\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 4\sigma) \geq \frac{15}{16} = 0.9375 = 93.75\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 5\sigma) \geq \frac{24}{25} = 0.96 = 96\%.$$

Queste maggiorazioni valgono – come detto – per distribuzioni qualunque. Molti che sanno qualcosa di Statistica hanno in mente la notissima formula $P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 95\%$ ma una tale affermazione stringente può essere fatta se si sa che X ha densità normale.

Esercizi. Siano X e Y indipendenti di leggi esponenziali di parametri $\log 3$ $\log 4$ rispettivamente. Calcolare la loro covarianza, e la speranza matematica di X, $2Y$, $3 + Y$ e $\pi X - Y$.

45 Leggi del chi quadrato e t di Student

45.1 Funzione Gamma e Legge Gamma

La **funzione** $\Gamma(x)$, *funzione Gamma*, è una *funzione speciale* dell'Analisi Matematica, cioè, in pratica e semplificando, una funzione non elementare ma di notevole interesse, con una certa definizione che non daremo. I suoi valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche. Ma per i numeri $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4...$ i suoi valori sono semplici:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)! \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}^+$$

(si faccia un grafico) e quelli soli considereremo, per esempio

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma(2) = 1! = 1, \quad \Gamma(3) = 2! = 2, \quad \Gamma(4) = 3! = 6.$$

La **Legge** $\Gamma(\alpha, \lambda)$, Gamma di parametri $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, ha densità

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} & se\ t > 0 \\ \\ 0 & se\ t \le 0 \end{cases} . \tag{45}$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $\alpha := \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ e $\lambda := 2$, e si calcolino e grafichino le funzioni di ripartizione.

Teorema.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

45.2 Densità e leggi del chi quadrato

La legge $\chi^2(n)$ [del] chi quadrato (chi-quadrato, chi quadro, chi-quadro, inglese *chi-square* o *chi-squared*) ovvero χ^2 di parametro n o come si meglio dice *a n gradi di libertà* ha densità

$$f(x) = f(x;n) := \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x \leq 0 \end{cases} . \tag{46}$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $n = 1, 2, 4, 6$, e si calcolino e grafichino le ultime 3 funzioni di ripartizione.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti i quantili. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche.

Il valore di maggior interesse in Statistica Inferenziale è $q_{0.95}$, e in subordine con 0.9 e 0.99:

$$P(X < q_{0.95}) = 0.95 = 95\%$$

$$\textit{equivalentemente}\ \ P(X > q_{0.95}) = 0.05 = 5\%$$

e tale quantile non è un singolo numero perchè viene ulteriormente precisato da n=1,2...

45.3 Densità e quantili di Student, e legge di Cauchy

Come le leggi del chi quadrato, la t **di Student** è una famiglia di leggi, con un parametro, di solito indicato con n o ν, ancora detto *gradi di libertà*: $n = 1, 2, 3....$ Scriviamo le prime 2:

$$f(t;1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t^2+1} \qquad f(t;2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}$$

e nelle successive $\frac{t^2}{2}$ diventa $\frac{t^2}{3}$, $\frac{t^2}{4}$... e l'esponente $\frac{3}{2}$ diventa $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$... e cambia anche la costante moltiplicativa davanti, e ha una espressione che coinvolge la funzione Γ. I grafici un po' si assomigliano:

simmetrici rispetto all'asse y, al crescere di n le campane diventano più alte e strette.

La $f(t;1)$ è la **densità di Cauchy**, che sorprendentemente non ha speranza matematica, ma tutte le altre sì, e allora ovviamente è 0 per la simmetria.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti **i quantili**. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche, purtroppo di difficile lettura a causa di varie ambiguità, col serio rischio di confondere un parametro caratterizzante i quantili, α, con $1-\alpha$ oppure $2(1-\alpha)$ oppure $2\alpha-1$.

Nella riga di testa si trovano alcuni valori, talvolta con la specificazione *"one tail"*, e per associarli correttamente ad α, evitando di confonderlo con $1-\alpha$, o $2(1-\alpha)$, o $2\alpha-1$, si cerchi nella prima riga (cioè per $n=1$) il valore ≈ 6.31 corrispondente ad $\alpha = 0.95$:

$$X \sim t \text{ di Student a 1 grado di libertà} \qquad P(X \leq 6.31) \approx 0.95.$$

Ecco alcuni valori. Qua si intende che α è grande, diciamo > 0.8.

	two tails	$2\alpha-1$	$\to$	0.9	0.95	0.98	0.99
	two tails	$2(1-\alpha)$	$\to$	0.1	0.05	0.02	0.01
	one tail	$1-\alpha$	$\to$	0.05	0.025	0.01	0.005
k	**one tail**	α	$\to$	0.95	0.975	0.99	0.995
1				$\underline{6.31}34$	12.706	31.820	63.657
...				...	...	...	...
100				1.6602	1.984	2.364	2.625

ESEMPIO$_\mu$ Probabilità che una v.a. di legge di Student a 2 gradi di libertà assuma un valore ≤ 2.52:

$$P(X \leq 2.52) = \int_{-\infty}^{2.52} f(t;2)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{2.52} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}\, dt$$

integrale non facile da calcolare al livello di questa trattazione elementare.
Con Wolframalpha `Integrate (1/(2Sqrt[2]))(1/(t^2/2+1)^(3/2)) from -Infinity to 2.52` dà

$$\approx 0.936 = 93.6\%.$$

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \chi^2(n)$ ovvero del χ^2 a n gradi di libertà	n	$2n$
$X \sim t$ di Student a n gradi di libertà	0 per $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$ per $n > 2$

Osservazioni. Quelle che abbiamo visto, e le densità normale e log-normale che vedremo, sono fra le principali densità continue. Ma ne esistono infinite altre, alcune con un nome specifico, altre senza. Si considerino per esempio gli esercizi seguenti.

Esercizio 1_μ Calcolare la speranza matematica della densità

$$g(t) := \alpha\, e^{-2|t|}$$

naturalmente dopo aver determinato la costante α. (La costante viene determinata dall'integrale unitario fra $-\infty$ e $+\infty$, che per la parità della densità è 2 volte l'integrale fra 0 e $+\infty$).
Esercizio 2_μ Calcolare la speranza matematica della densità

$$f(z) := \begin{cases} 0 & se\ \ z < \frac{1}{2} \\ c & se\ \ \frac{1}{2} \le z < 1 \\ \frac{c}{z^3} & se\ \ z \ge 1 \end{cases} \qquad \textit{discontinua!}$$

naturalmente dopo aver determinato c. (Ovviamente bisognerà usare la Formula (14), Regola di Chasles, fatta valere su $]a,b[=]-\infty,+\infty[$, suddividendo 2 volte l'integrale, nei punti $\frac{1}{2}$ e 1).
Esercizio 3$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

$$_{discontinua!} \quad u(x) := a(2+\mathrm{sgn}(x))\, per\ -1 \leq x \leq 2,\ e\ 0\, altrimenti.$$

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

DA METTERE IN QUALCHE LEZIONE ALL'INIZIO

Crescenza (globale) e decrescenza (globale) su intervalli, eventualmente sull'intero dominio di una funzione.

Ci sono 4 casi di cui più importanti il 1° e il 3°.

1) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ allora f si dice crescente.
Esempi: x^3, arctan, lg, ln, exp, $\sqrt{x}$. Anche x^2 per $x \geq 0$.

2) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ allora f si dice non decrescente, o crescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono crescente).
Esempio: $\lfloor x \rfloor$.

3) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ allora f si dice decrescente.
Esempio: e^{-x}. Anche $\frac{1}{x}$ per $x > 0$. Anche x^2 per $x \leq 0$.

4) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ allora f si dice non crescente, o decrescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono decrescente).

Nota 1. x^2, $\sin x$ e $\cos x$ non ricadono in alcuna delle 4 categorie.

Nota 2. x^3 è crescente su $\mathbb{R}$ (globalmente) ma non è crescente in 0 (puntualmente; e infatti la sua tangente in 0 è orizzontale).

46 Legge e speranza matematica di $g(X)$

46.1 Legge di $g(X)$ e standardizzazione

Data una variabile aleatoria continua X e una funzione g sufficientemente regolare (per esempio continua) anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua. (Se X è una variabile aleatoria discreta allora $g(X)$ è una variabile aleatoria qualunque sia g). Si pensi per esempio a $mX + q$, X^2, X^3 e $-X^3$.

Esempio 1: legge di $m\,X + q$.
Troviamo funzione di ripartizione e poi densità di $m\,X + q$ con $m > 0$:

$$F_{m\,X+q}(t) =$$

per definizione e poi per algebra

$$= P(m\,X + q \le t) = P(m\,X \le t - q) =$$

per algebra, essendo $m > 0$

$$= P\left(X \le \frac{t-q}{m}\right) =$$

per definizione di funzione di ripartizione

$$= F_X\left(\frac{t-q}{m}\right)$$

e derivando rispetto a t la prima e l'ultima espressione con la regola di derivazione della funzione composta

$$f_{m\,X+q}(t) = \frac{1}{m}\,f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m > 0$$

e un analogo calcolo con $m < 0$ darà

$$f_{m\,X+q}(t) = -\frac{1}{m}\,f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m < 0$$

e le 2 ultime formule si riassumono in questa formula della densità

$$f_{m\,X+q}(t) = \frac{1}{|m|}\,f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m \ne 0$$

Esempio 2: legge di X^2. Con un analogo tipo di calcoli si troverà

$$F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \qquad \text{se } g(z) := z^2$$

e poi per tutte la densità si ottiene derivando, in particolare

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) \qquad se\, x > 0$$

e ovviamente 0 se $x < 0$.

Definizione. Per una variabile aleatoria X discreta o continua dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2, la nuova variabile aleatoria

$$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad Z \text{ score (è adimensionale)}$$

(che è $mX+q$ con $m := \frac{1}{\sigma}$ e $q := -\frac{\mu}{\sigma}$) si chiama **standardizzazione** di X. Bisogna conoscere media e varianza *veri*, cosa possibile per esempio per un dado: $\frac{X-\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}}$.
La standardizzazione può essere applicata anche ai valori di un dataset:

$$z_i := \frac{x_i - \bar{x}}{\mathrm{SD}}$$

e per calcolare la deviazione standard SD si userà la formula con $\frac{1}{n}$ se il dataset rappresenta tutta la popolazione di interesse, o quella con $\frac{1}{n-1}$ se ne è un campione.

Esempio. Per un dado $X \sim \mathbb{U}\{1,6\}$ è $\mu = \frac{7}{2}$ e $\sigma^2 = \frac{35}{12}$, e allora per la somma di 2 dadi $E(x) = 7$ e per l'indipendenza $\sigma^2 = \frac{35}{6}$ ovvero $\sigma = \sqrt{\frac{35}{6}}$.
Prendiamo ora 100 lanci di coppia di dadi virtuali:
12 8 8 4 5 10 5 6 7 7 8 7 2 4 5 9 11 5 5 12 6 8 7 9 6 7 9 8 9 9 8 10 6 5 5 5 3 6 6 5 7 5 10 8 9 9 6 5 4 7 7 8 4 6 6 11 9 7 6 7 9 4 5 7 5 3 7 8 5 7 9 4 5 5 5 3 9 3 9 4 8 10 8 6 9 8 10 7 7 7 9 8 9 8 4 6 6 8 4 7
Possiamo standardizzare
2.42465 0.548712 0.548712 -1.32723 -0.858241 1.48668 -0.858241 -0.389257 0.0797273 0.0797273 eccetera

Teorema.
Se W è standardizzazione di una v.a. discreta o continua

$$E(W) = 0 \qquad Var(W) = 1.$$

Esercizio. Si scrivano le standardizzazioni dei 2 dadi di (36.1), con quella stessa notazione. E di una moneta regolare.

Teorema. Come detto, data una variabile aleatoria continua X e una funzione sufficientemente regolare g, anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua. In condizioni di ulteriore regolarità X e $g(X)$ hanno speranza matematica.

Se la v.a. continua X ha densità f_X allora

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)\, dt.$$

in particolare (con $g(z) := z^n$)

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx \quad \text{si chiama } \textit{momento}\ n\text{-esimo.}$$

Il momento primo è proprio la speranza matematica di X.

Esempi. Vediamo 2 esempi tratti da un libro che si distingue nella didattica del Calcolo delle Probabilità e della Statistica: *Calcolo delle probabilità*, di Paolo Baldi, ed. McGraw-Hill. Alle pp. 125-126:

> Supponiamo che X sia uniforme su $[0,1]$. Quanto valgono $E[\sin(2\pi X)]$ e $E[\mathrm{e}^X]$?(...)
>
> $$E[\sin(2\pi X)] = \int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx = 0$$
>
> $$E[\mathrm{e}^X] = \int_0^1 \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e} - 1.$$

(L'uso delle soprastanti parentesi quadre non è conforme alle standard seguito in questa dispensa, ma si tenga presente che le notazioni fra i vari Autori differiscono alquanto).

Esercizi. Si consideri una v.a. X con $f_X(x) := x$ fra 0 e $\sqrt{2}$ e 0 altrimenti. Trovare $E(\sin(2\pi X))$, $E(\mathrm{e}^X)$ ed $E(\ln X)$, e anche un'altra matematica con una funzione a scelta. Poi si cerchino le stesse 4 speranze matematiche con una nuova densità a scelta.

46.2 Esercizi sulla legge di $g(X)$

Esercizio. Si trovi densità e f.r. di X^3.

$$P(X^3 \le x) = P(X \le \sqrt[3]{x}) \qquad \text{cioè}$$

$$\boxed{F_{X^3}(x) = F_X(\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dalla (**??**) dopo aver riconosciuto che $g(x) := x^3$ è crescente suriettiva con inversa $\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ per $x \neq 0$,

$$\boxed{f_{X^3}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(\sqrt[3]{x}) \quad x \neq 0}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.
Esercizio. Si trovi densità e f.r. di $-X^3$.

$$P(-X^3 \le x) = P(X^3 \ge x) = 1 - P(X^3 \le x) = 1 - P(X \le -\sqrt[3]{x}) \text{ cioè}$$

$$\boxed{F_{-X^3}(x) = 1 - F_X(-\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dalla (**??**) dopo aver riconosciuto che $g(x) := -x^3$ è decrescente suriettiva con inversa $-\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\boxed{f_{-X^3}(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(-\sqrt[3]{x})}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.

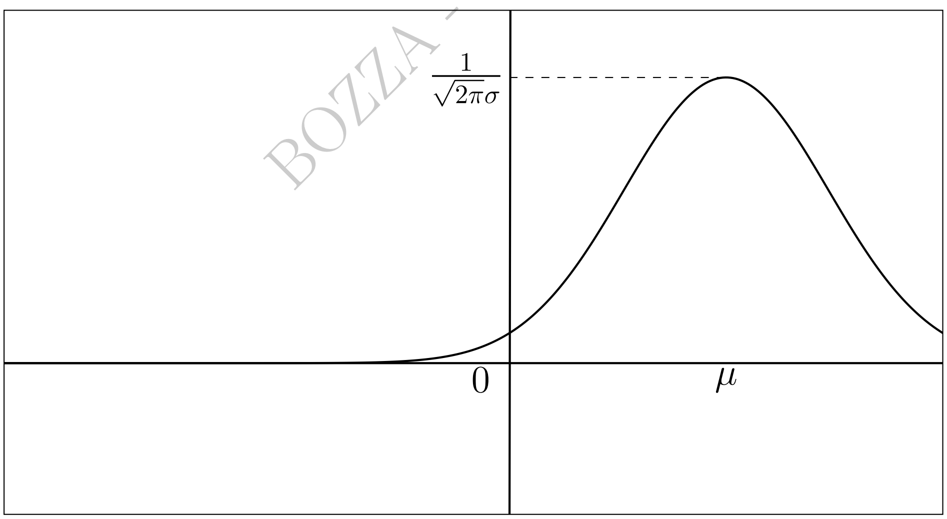
47 Densità e variabile aleatoria normale

47.1 Introduzione alla densità e v.a. normale

La densità **normale** ovvero **gaussiana** ha un grafico detto “a campana”, con limiti 0 a $+\infty$ e $-\infty$, prima crescente e poi decrescente, prima con la concavità verso l’alto, poi verso il basso e infine verso l’alto.

Si tratta in qualche modo della più “pura” e “perfetta” delle densità a campana.

La *moda* (cioè l’eventuale unico punto di massimo di una densità di v.a. continua) esiste e coincide con la media μ, e la densità è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$, e a



causa di questa simmetria anche la mediana è μ: la probabilità di un valore prima di μ è uguale alla probabilità di un valore dopo μ. Per la simmetria la skewness è nulla.

Il massimo assoluto (ovviamente) vale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ e in $\mu \pm \sigma$ ci sono i 2 flessi (che si trovano facilmente con la derivata seconda), e allora

a grande varianza corrisponde campana bassa e larga
a piccola varianza corrisponde campana alta e stretta.

Questa legge è denotata con $N(\mu, \sigma^2)$, ha 2 parametri (come la legge Gamma) ed essi sono proprio la media e la varianza:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{densità normale } N(\mu,\sigma^2)\\[2em] f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\\[2em] (\textit{standard},\ \phi(x),\ \text{ se } \mu = 0 \text{ e } \sigma^2 = 1)\end{array}} \tag{47}$$

I parametri sono normalmente considerati μ e σ^2 (non μ e σ, ma si faccia attenzione che qualche software invece fa proprio così).

Si noti che è strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}$: sono possibili valori grandissimamente positivi o negativi, ma sono pochissimo probabili (globalmente, ovvio: i singoli valori hanno tutti probabilità 0).

Teorema. Se $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_1, \sigma_2^2)$ sono indipendenti

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$c + X \sim N(c + \mu_1, \sigma_1^2) \qquad cX \sim N(c\mu_1, c^2\sigma_1^2). \tag{48}$$

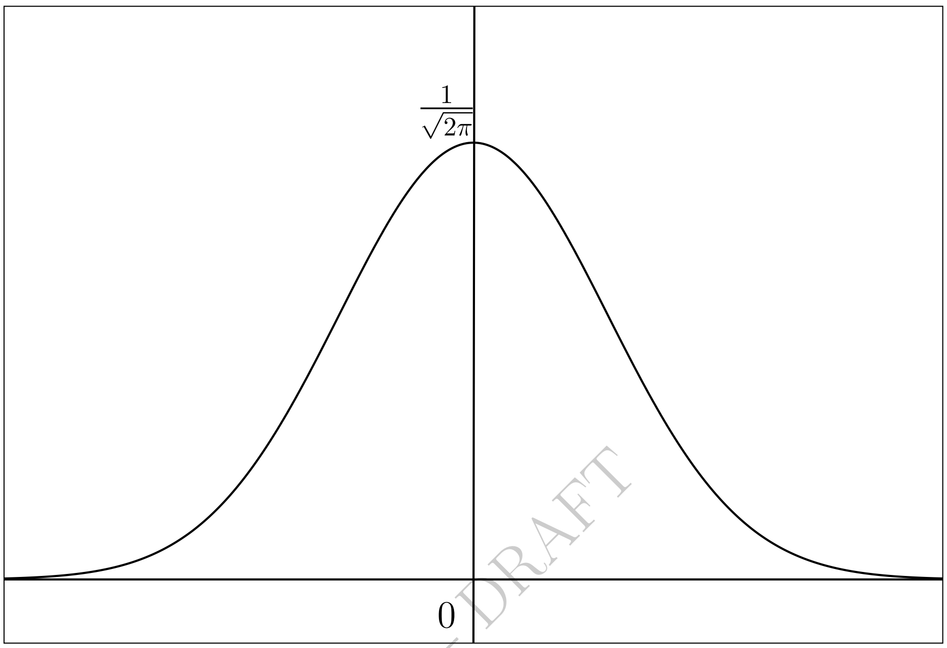
47.2 Variabile aleatoria normale standard

(A causa delle (48)) la standardizzazione di una qualunque variabile aleatoria normale è una variabile aleatoria normale $N(0, 1)$. (Avendo media 0 e varianza 1, in base alla (47)) ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad =: \phi(x)$$

(*densità normale standard*, denotata con $\phi(x)$).
Ha anche moda 0 e mediana 0 e skewness 0.

I punti di flesso sono in ± 1.



La sua funzione di ripartizione si indica con $\Phi(x)$

$$\boxed{\Phi(x) \text{ f.r. normale standard}} \tag{49}$$

e si chiama *funzione di ripartizione normale standard*, in Inglese *(standard) normal cumulative distribution function*, e (per le (30) e (47)) è

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

e derivando

$$\boxed{\Phi'(x) = \phi(x)} \tag{50}$$

(corrispondentemente a (31)).

L'integrale che definisce questa *funzione speciale (dell'Analisi Matematica)* non può essere risolto in termini di funzioni elementari.
Valori numerici (approssimati) di $\Phi(x)$ si ottengono in vari modi.

La funzione inversa di $\Phi(x)$ dà i quantili normali, molto importanti nella Statistica. Il quantile di ordine α si indica con ϕ_α:

$$\boxed{\phi_\alpha := \Phi^{-1}(\alpha)} \tag{51}$$

Il grafico della funzione ϕ_α ha dominio $]0,1[$, in 0.5 vale (ovviamente) 0, tende a $-\infty$ in 0 e a $+\infty$ in 1.
Si disegni quel grafico e su esso si trovi il punto $(0.975, \approx 1.96)$.

Si verifica subito che la standardizzazione di una variabile aleatoria normale è una variabile aleatoria normale standard e allora fra le 2 valgono le relazioni

$$\boxed{\begin{array}{c} Y \sim N(0,1) \; \textit{standardizzazione di} \; X \sim N(\mu,\sigma^2) \\ \\ Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad X = \sigma Y + \mu. \end{array}} \tag{52}$$

47.3 Scarti dalla media per v.a. normale

Se si sa che la variabile aleatoria X è normale si ottengono[105] disuguaglianze, che ora vediamo, molto più stringenti di quelle ottenute con la Disuguaglianza di Cebyshev, valida per variabili aleatorie *qualunque*.

[105] Si ha, per ogni $\delta > 0$,

$$P(|X-\mu| \le \delta) = P(|\sigma Y| \le \delta) = P(\sigma |Y| \le \delta) = P\Big(|Y| \le \frac{\delta}{\sigma}\Big)$$

e con facili calcoli→ si conclude

$$P(|X-\mu| \le m\,\sigma) = 2\,\Phi(m) - 1$$

e coi classici valori (che si trovano per esempio sulle tavole) si ottengono le approssimazioni.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(|X-\mu| \le \sigma) \approx 68.3\%$$

$$P(|X-\mu| \le 2\,\sigma) \approx 95.4\%$$

$$P(|X-\mu| \le 3\,\sigma) \approx 99.7\%$$

$$P(|X-\mu| \le 1.96\,\sigma) \approx 0.95 = 95\%$$

dove la quarta è una lieve modificazione della seconda per avere con più precisione 95%. Si faccia un disegno.

Per una normale standard diventano (semplificando i decimali)

Normale standard		$X \sim N(0,1)$	
$P(-1 \le X \le 1)$	$\approx 68\%$		
$P(-1.96 \le X \le 1.96)$	$\approx 95\%$	(o spesso $-2 \le X \le 2$)	(α)
$P(-3 \le X \le 3)$	$\approx 99.7\%$		

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione. Compresa la (α) ovviamente.

Fermiamoci un momento!

Ha avuto ampio risalto sui media un articolo scientifico sull'invenzione di un nuovo tipo di test diagnostico del cancro, che si fa in meno di 10 minuti e non richiede un laboratorio – e allora potenzialmente potrà interessare le farmacie.
È stato pubblicato su una rivista scientifica di altissimo livello, Nature Communications.
Apprezziamo quante cose riusciamo a capire, con lo studio fatto finora, in questa figura dell'articolo: Link->

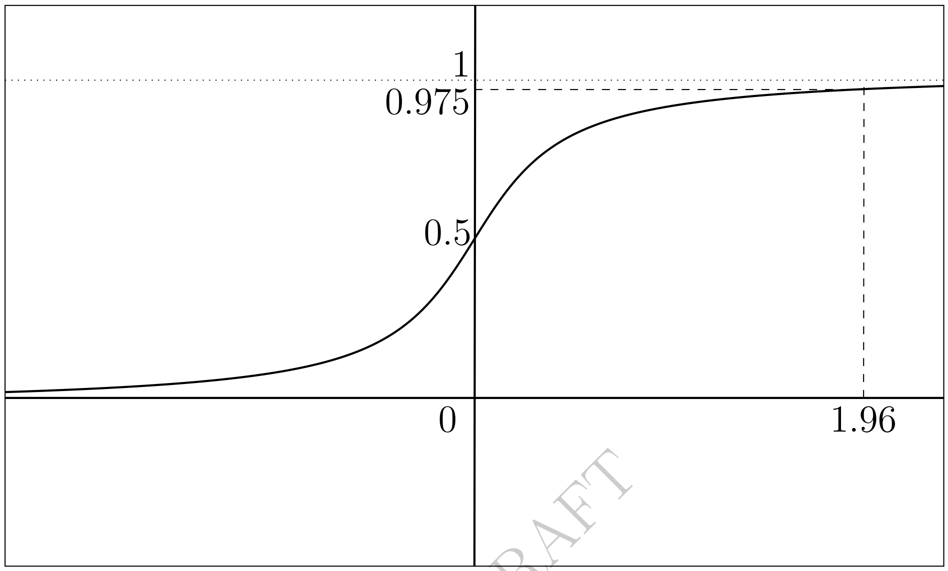
- le figure a campana
- le curve ROC
- l'AUC, area under the curve, usata per valutare la curva ROC ovvero la bontà del test diagnostico
- specificità, sensitività; e PPV (Positive Predictive Value) è quello che in questa trattazione è stato indicato VPP (Valore Predittivo Positivo, essenzialmente la predittività.
- i box [and wisker] plot – fatti nel modo semplice di questa trattazione:

> "In the box and whisker plots, the middle lines of the boxes represent the median (50th percentile) and the terminal line of the boxes represents the 25th to 75th percentile. The whiskers represent the lowest and the highest value"

- i bar chart

(I "peluzzi" sopra le colonne del bar chart, questione che non abbiamo trattato, si riferiscono alle deviazioni standard dei dataset di misurazioni).

48 Approssimazione di $\Phi(x)$ e ϕ_α



Valori numerici (approssimati) della funzione di ripartizione normale standard $\Phi(x)$ e dei quantili normali ϕ_α si ottengono:

(1) con quelle (rare) calcolatrici scientifiche che la implementano;

(2) online in www.wolframAlpha.com digitando

`CDF[NormalDistribution[0,1],`$_{valore\ di\ x}$`]` per avere $\Phi(x)$,

`InverseCDF[NormalDistribution[0,1],`$_{valore\ di\ \alpha}$`]` per avere ϕ_α;

(3) con molti software di manipolazione matematica, fra cui Maxima e Mathematica$^{(R)}$;

(4) magari a memoria per alcuni pochi valori speciali, in particolare senz'altro l'ovvio $\phi_0 = \frac{1}{2}$ e

$$\boxed{\phi_{0.975} \approx 1.96} \tag{53}$$

e magari tutti questi:

x	$\Phi(x) = P(X \le x)$	
0	0.5	il primo è ovvio per simmeteria
≈ 1.64	≈ 0.95	e il terzo vogliamo ricordarlo:
≈ 1.96	≈ 0.975	$\phi_{\mathbf{0.975}} \approx \mathbf{1.96}$ ovvero $\Phi(1.96) \approx 0.975$
≈ 2.58	≈ 0.995	e come sopra scriveremo gli altri.
$(+\infty)$	(1)	Quest'ultimo vale solo come limite.
ϕ_α	α	

(e si faccia attenzione che questi non sono i valori di $P(|X| < x)$);

(5) con le apposite tavole numeriche, che si trovano su internet cercando *normal table* o (e sono essenzialmente le stesse) *normal quantile table*.

(6) con apposite formule di approssimazione. Ne esistono molte decine, più o meno precise e più o meno semplici. Ne considereremo 3:

– questa semplicissima ma poco precisa, err. ass. < 0.04

$$\forall x \ge 0 \qquad \Phi(x) \approx \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{(3-x)^2}{12}} & x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

– quella di Shah (1985) di un esercizio seguente, err. ass < 0.006:

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\, 0 \le x \le 2.2 \\ 0.99 & se\, 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\, x \ge 2.6 \end{cases}$$

– questa più precisa[106] con err. ass. < 0.0002

$$\forall x \ge 0 \qquad \Phi(x) \approx 2\hat{}(-22\hat{}(1 - 41\hat{}(x/10)))$$

[106] http://m-hikari.com/ams/ams-2014/ams-85-88-2014/epureAMS85-88-2014.pdf (A. Soranzo, E. Epure – 2014) Ecco la sua inversa (che si ottiene subito ricavando x, che è

che ha un'inversa esprimibile con funzioni elementari che dà ovviamente i quantili normali.

Nota 1. Le prime 2 formule di approssimazione sono definite a tratti, sono poco precise ma hanno il vantaggio che si possono calcolare con le 4 operazioni e la radice quadrata. In particolare la prima, per un uso agevole della calcolatrice la si esprima così, in $[0,3]$:

$\sqrt{}$`((3-x)^2)·(-1)/12+1` *tutto sotto radice*

(Si calcola 3-x, si eleva al quadrato ovvero si moltiplica per se stesso, si moltiplica per -1, si divide per 12, si somma 1, si estrae la radice quadrata).

Nota 2. Sia le tavole numeriche che, di solito, le formule di approssimazione danno (approssimano)

$\Phi(x)$ solo per $x \geq 0$

ϕ_α solo per $\alpha \geq 0.5$

e per i valori di $x < 0$ e $\alpha < 0.5$ si usano le formula di simmetria

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)} \tag{54}$$

$$\boxed{\phi_{1-\alpha} = -\phi_\alpha} \tag{55}$$

(che seguono dalla parità della densità normale standard).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\approx$ $^{\%}$ Per una variabile aleatoria normale standard X calcolare

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8)$$

ϕ_α)

$$\forall \alpha \in [0, 0.5[\qquad \phi_\alpha \approx \frac{10}{\log 41} \log\left(1 - \frac{\log((-\log\alpha)/\log 2)}{\log 22}\right)$$

(che ha errori assoluto e relativo rispettivamente $|\varepsilon(\alpha)| < 5 \cdot 10^{-3}$ $\forall \alpha \in [0.5, 9925]$, $|\varepsilon_r(\alpha)| < 1\%$ $\forall \alpha \in [0.5, 0.99908]$);

usando questa classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\, 0 \leq x \leq 2.2 \\ 0.99 & se\, 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\, x \geq 2.6 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO è

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8) = P(X \leq 0.8) - P(X < -1.2) =$$

trattandosi di densità continua le probabilità con $<$ e $\leq$ sono uguali

$$= P(X \leq 0.8) - P(X \leq -1.2) =$$

per definizione di $\Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \Phi(-1.2) =$$

e con la forumla di simmetria $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \big(1 - \Phi(1.2)\big) =$$

$$= \Phi(0.8) - 1 + \Phi(1.2) =$$

e con l'approssimazione data

$$\approx \frac{0.8\,(4.4-0.8)}{10} + 0.5 - 1 + \left(\frac{1.2\,(4.4-1.2)}{10} + 0.5\right) =$$

$$= 0.788 - 1 + 0.884$$

e in definitiva (recuperando il simbolo $\approx$ da più sopra)

$$\boxed{\approx 0.672 = 67.2\%}$$

48.1 Variabile aleatoria log-normale

Se X è una variabile aleatoria $N(\mu,\sigma^2)$ allora $Y := \mathrm{e}^X$ si dice *log-normale* di parametri μ e σ^2, che però non sono rispettivamente media e varianza della nuova variabile aleatoria.
Inversamente, se Y è log-normale di parametri di parametri μ e σ^2, allora $X := \ln Y$ è $N(\mu,\sigma^2)$.
Consideriamo ora solo il caso $\mu = 0$ **e** $\sigma^2 = 1$:

$$\forall x > 0 \qquad F_{\mathrm{e}^X}(x) = P(\mathrm{e}^X \le x) = P(X \le \ln x) = F_X(\ln x)$$

e per i non positivi, considerando i 2 casi disgiunti $x = 0$ e $x < 0$

$$\forall x \le 0 \qquad F_{\mathrm{e}^X}(x) = P(\mathrm{e}^X \le x) = P(\mathrm{e}^X = x) + P(\mathrm{e}^X < x) = 0 + 0$$

e in definitiva

$$F_Y(x) = F_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \le 0 \end{cases} .$$

Derivando troviamo la densità log-normale di parametri $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, ricordando che $\Phi'(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, e naturalmente (derivata della funzione composta) deriviamo anche ln:

$$\forall x > 0 \qquad f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \phi(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

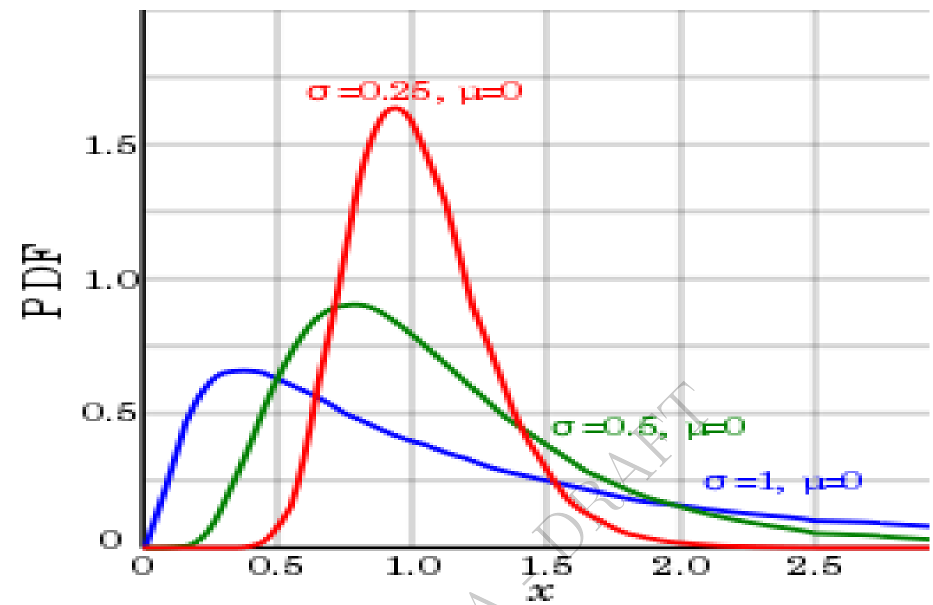
trovandosi in definitiva

$$f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \le 0 \end{cases} \tag{56}$$

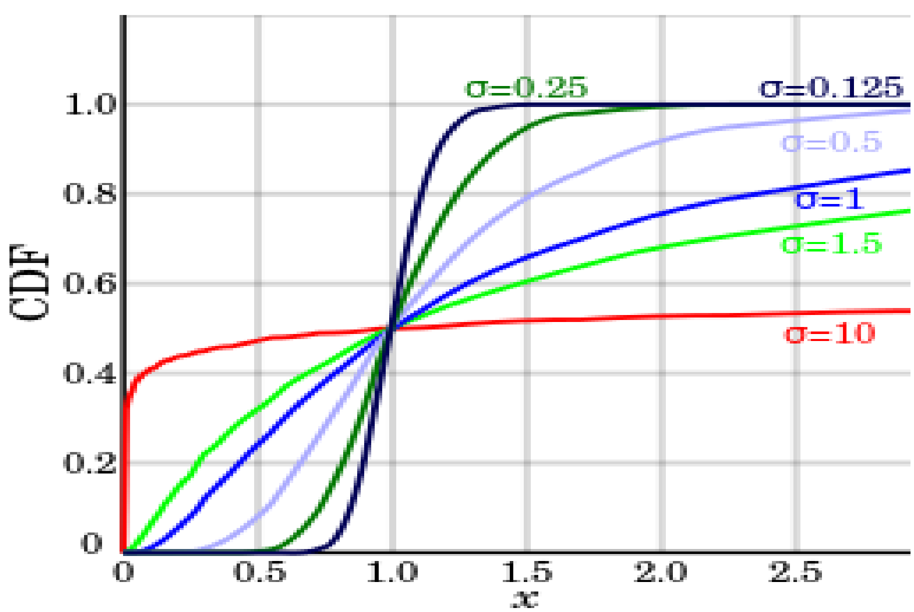
e con μ e σ^2 generici la

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{densità } \mathit{Lognormal}(\mu,\sigma^2) \\ \text{log-normale di parametri } \mu \text{ e } \sigma^2 \\ f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, x}\, e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \le 0 \end{cases} \end{array}} \tag{57}$$

Traiamo da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PDF-log_normal_distributions.svg la seguente figura con i grafici della densità log-normale per alcuni valori dei parametri.



Traiamo da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CDF-log_normal_distributions.svg la seguente figura con i grafici della fun log-normale per alcuni valori dei parametri.



(Secondo alcuni Autori i parametri della $Lognormal(\mu, \sigma^2)$ sono μ

e σ, secondo altri[107] sono μ e σ^2, e in questa trattazione seguiamo questo secondo standard, ma si faccia attenzione in particolare usando i vari software).

I 3 valori coincidenti per la normale standard, media moda e mediana, $E(X) = Mod(X) = \phi_{0.5}$, hanno 3 destini diversi: per la log-normale $Y := \mathrm{e}^X$ la mediana è e^μ, con $\mu = E(X)$:

$$P(Y \le \mathrm{e}^\mu) = P(\mathrm{e}^X \le \mathrm{e}^\mu) = P(X \le \mu) = \frac{1}{2} \text{ per simmetria}$$

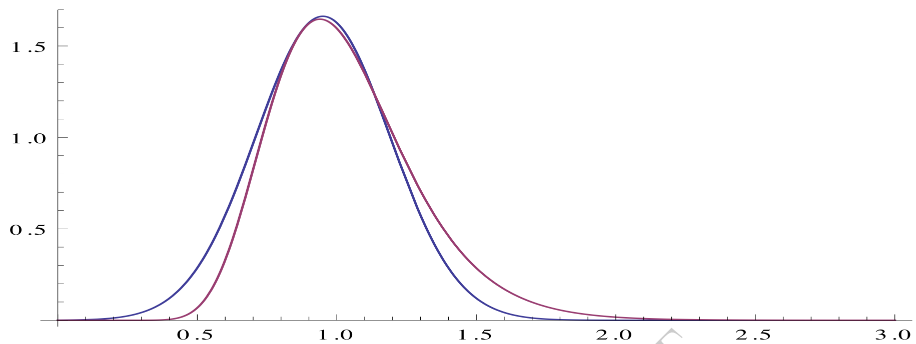
ma media e moda hanno diverse espressioni.

Esercizio. Si faccia lo studio di funzione di (57). Quanto vale la funzione di ripartizione in -1, 0, $\mathrm{e}^{1.64}$, $\mathrm{e}^{2.58}$, 100?

48.2 Confronto fra normale e log-normale, e cigni neri

Si veda nella seguente figura quanto possano assomigliarsi normale e log-normale nella regione intorno alla moda. Sono rappresentate $N(0.95, 0.24)$ e Lognormal$\left(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{16}\right)$.

[107]Si confrontino per esempio le Wikipedie italiana e in inglese.



Dati empirici, sperimentali, di una variabile aleatoria per sua natura X log-normale, potrebbe essere facile erroneamente ritenerli provenienti da una variabile aleatoria Y normale. Non cambierà molto nella regione intorno alla media, ma lontano da essa le *code* hanno comportamento diversissimo: le code log-normali sono molto più *pesanti*. Tantochè

$$P(X \geq 2) \approx 0.000\,607\,\%$$

$$P(Y \geq 2) \approx 0.28\,\%$$

circa 458 volte più probabile.

È – solo in parte – la questione dei *cigni neri*, eventi importanti erroneamente ritenuti quasi impossibili, e invece poi si verificano. Possono verificarsi per aver identificato come normale una distribuzione molto simile, non necessariamente log-normale, ma con almeno una coda molto più pesante. O facendo consimili errori. (Il concetto di cigno nero comunque è più ramificato).

Bisogna essere molto cauti nel ritenere normale il modello sottostante i dati empirici, che essendo limitati in numero non evidenziano i casi rarissimi – cosa preoccupante se si tratta di eventi avversi gravi a un medicinale. Se semplicemente lo riteniamo normale, magari confortati da qualche test statistico, e invece è solo quasi nomale, ma ha una coda (tipicamente destra ma può essere sinistra, o entrambe) molto più pesante della normale, finisce che eventi ritenuti tanto rari da non doversene preoccupare, invece poi tanto impossibili non sono.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

49 Legge dei Grandi Numeri

49.1 Inquadramento euristico della situazione

Supponiamo di lanciare una moneta equilibrata un numero grandissimo di volte, e continuiamo a farlo, conteggiando il numero di teste e il numero di croci. Alcuni ingenui credono che i 2 numeri tendano a diventare sempre più simili, ma questo è falso: è impensabile che lanciando un milione di volte la moneta siano venute esattamente 500mila teste e 500mila croci, o 500 001 o anche 500 002 o simili. Anzi si potrebbe dimostrare che la differenza fra teste e croci tenderà in generale ad essere sempre più grande, non più piccola! Invece quello che tende a succedere è che le proporzioni di teste e di croci tenderanno ad uguagliarsi, tendendo entrambe ad $\frac{1}{2}$. Quello che possiamo effettivamente aspettarci dopo un milione di lanci è una situazione di questo tipo:

teste: $500\,000 \pm$ qualche centinaio: $\#teste = 500\,000 + r := n_0$
croci: $500\,000 \mp$ qualche centinaio: $\#croci = 500\,000 - r := n_1$
r: qualche centinaio in positivo o in negativo, p.es. 424 o -723
frazione di teste: $\frac{500\,000+r}{1\,000\,000} = \frac{1}{2} + \frac{r}{1\,000\,000} \approx 0.5$
frazione di croci: $\frac{500\,000-r}{1\,000\,000} = \frac{1}{2} - \frac{r}{1\,000\,000} \approx 0.5.$

Le *proporzioni empiriche* tendono ad uguagliarsi, non le quantità!
Questo diventerà ancora più evidente al crescere del numero di lanci, cioè l'approssimazione a 0.5 varrà con sempre più decimali, salvo casi sfortunatissimi, comunque sempre possibili.
Similmente avviene per qualunque p_1 fra 0 e 1 che sia la probabilità della testa della moneta (che se $p_1 \neq 0.5$ è non regolare): detto n il numero di lanci, e associato l'1 alla testa e 0 alla croce,
proporzione empirica di teste $\bar{p}_{n,1} = \frac{\#teste}{n} \to p_1$
proporzione empirica di croci $\bar{p}_{n,0} = \frac{\#croci}{n} \to p_0 := 1 - p_1$.
Similmente per un dado avremo 6 limiti $p_1,\ldots,p_6$, cioè le proporzioni empiriche dei risultati tenderanno alle probabilità *vere*

dei vari risultati, per esempio, per un dado regolare, sempre $\frac{1}{6}$:

$$\forall\, k \in \{1, ..., m\} \quad \bar{p}_{k,n} \to p_k = P(X = k) \tag{58}$$

e per il dado $m = 6$, e per una moneta invece $k \in \{0, 1\}$.
Questo tendere però non è quello deterministico, dei limiti delle successioni della matematica: seppure – come si può dimostrare – ha probabilità 0, rimane comunque possibile (!) che un dado *regolare* dia sempre 5, proprio *per sempre*, e allora in quel caso

$$\bar{p}_{5,n} = \frac{\#\, uscite\; del\; 5}{n} = \frac{n}{n} \equiv 1 \not\to \frac{1}{6} = P(X = 5) = p_5.$$

(Si noti però che questo evento possibile ha probabilità 0).

Esercizio. Ipotizzare e graficare le $\bar{p}_{k,n}$ per $n = 100$, $k = 1, ..., 6$.

49.2 Limite in probabilità e Legge dei Grandi Numeri

In quanto detto, resta non definito cosa si intende per il "tendere" ai numeri p_k, e si è ben detto che ci possono essere casi sfortunatissimi. Si tratta di un tendere probabilistico, non deterministico com'è quello dei limiti delle funzioni reali di variabile reale. Esso è precisato e inquadrato dal concetto di *convergenza in probabilità* di una successione di variabili aleatorie X_n, che definiamo senza insistervi particolarmente. Si immagini la X_n di cui parliamo come la proporzione empirica $\bar{p}_{1,n}$ di teste dopo n lanci, che, sì, è una variabile aleatoria, "prima" di fare i lanci. Il limite della convergenza in probabilità di una successione di variabili aleatorie è esso stesso in generale una variabile aleatoria; solo che nell'esempio prima considerato è la variabile aleatoria discreta

$$X := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = p$$

che vale 0.5 con probabilità 1. (Variabile aleatoria *costante*). Ma in generale il limite X di una convergenza in probabilità è proprio una variabile aleatoria con una funzione di ripartizione non banale, ed è una variabile aleatoria discreta o continua.

Definizione. Diremo che X_n converge in probabilità a X

$$X_n \to^P X \text{ se } \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \eta) = 0 \quad \forall\, \eta > 0 \tag{59}$$

(o indifferentemente con $> \eta$). (Ha un valore teorico, in questa trattazione elementare la useremo solo una volta fra poco: ci basta conoscerla e capirla).

Legge dei Grandi Numeri. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di ugual legge con speranza matematica μ e varianza σ^2. Allora per la *media empirica*

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

$$\text{è} \quad \forall\, \eta > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \eta) = 0$$

ovvero equivalentemente, **nelle ipotesi dette** (poco stringenti)

nelle ipotesi sopradette (poco stringenti)

$$\bar{X}_n \to^P \mu$$

ovvero:
la media empirica, sperimentale, (α)
tende (in probabilità)
alla media "vera",
la speranza matematica

Detto altrimenti: *sperabilmente* (qua è il senso probabilistico) troveremo *circa* la speranza matematica di una v.a. di densità sconosciuta – com'è in generale in Statistica, e nella pratica – facendo la media di *molti* valori tratti (indipendentemente, ovvio) da quella v.a. (Il senso del limite è nelle parole "circa" e "molti").

Con $X_h := 1$ per testa e 0 altrimenti per $h = 1, \ldots, n$, si riottiene il

primo caso considerato, con $\bar{X}_n$ la proporzione empirica $\bar{p}_{1,n}$.
Per una moneta regolare la frazione di teste tende in probabilità a $\frac{1}{2}$.
Per un dado regolare la frazione di risultati 3 tende in probabilità a $\frac{1}{6}$.

Possiamo fare i calcoli *esattamente*. La probabilità di k teste è

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

e ipotizzando una moneta regolare ($p = 1/2$, $p^k(1-p)^{n-k} = 2^{-n}$)

$$p_k = \binom{n}{k} 2^{-n}$$

e in particolare la probabilità i fare tante teste quante croci, che è 0 se n è dispari, per n pari è

$$\binom{n}{n/2} 2^{-n}$$

Con n piccolo è possibile fare facilmente il calcolo esatto, per esempio per $n := 6$ la probabilità è $\frac{5}{16}$ e per $n := 20$

$$\binom{20}{10} 2^{-20} \approx 0.176197 \quad \text{circa 1 su 6.}$$

L'esatto pareggio allora è alquanto improbabile([108]) già con $n = 6$.

[108] La (60) con $n := 20$ ci dà

$$10 - 2\sqrt{5} \leq X \leq 10 + 2\sqrt{5}$$

cioè

$$5.527... \leq \mathit{numero\,di\,teste} \leq 14.472...$$

ovvero

$$\mathit{numero\,di\,teste} = 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9 \vee 10 \vee 11 \vee 12 \vee 13 \vee 14$$

e questo evento ha probabilità

$$p_6 + \ldots + p_{14} = 2^{-20}\left(\binom{20}{6} + \ldots + \binom{20}{14}\right) =$$

$$= \frac{125647}{131072} \approx 0.959 = 95.9\%.$$

Prima si era detto *almeno* 75%, ora si trova *esattamente* 0.95.... (Ma questo calcolo per $n := 1\,000\,000$ è improbo).

Consideriamo n lanci di moneta con probabilità $\frac{1}{2}$ di fare testa.
Con la Disuguaglianza di Chebyshev si trova([109]) che con probabilità almeno del 75% il numero di teste verifica

$$\frac{n}{2} - \sqrt{n} \leq X \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}. \tag{60}$$

Allora con un milione di lanci, almeno al 75% il numero di teste sta fra 499 000 e 501 000.
Nella prossima Lezione vedremo che in effetti quella probabilità è > 95.4%, molto di più.
Si noti che effettivamente $\frac{501\,000}{1\,000\,000} \approx 0.5$, e similmente con 499 000.
Detto in altri termini

$$\frac{\frac{n}{2} \pm \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{2} \quad per \quad n \gg .$$

Ripetiamo che **si potrebbe dimostrare che la differenza fra teste e croci tenderà in generale ad essere sempre più grande, non più piccola!** Eppure, la proporzione tende al 50%. (Tende "in probabilità", ora sappiamo).

[109]Per lo studente interessato:

$$P(|X - E(X)| > c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \qquad \forall\, c$$

equivale, con l'evento complementare, a

$$P(|X - E(X)| \leq c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2}.$$

Se X è il contatore di teste (successi) in n lanci, allora $X \sim B(n,k)$. Essendo per la $B(n,k)$ la varianza $np(1-p)$ e la speranza matematica np, con la moneta regolare $n/4$ e $n/2$ rispettivamente,

$$P(|X - n/2| \leq c) \geq 1 - \frac{n/4}{c^2}$$

e fissando $c := 2\sigma = 2\sqrt{VarB(n,k)} = 2\sqrt{n/4} = \sqrt{n}$

$$P(|X - n/2| \leq \sqrt{n}) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}$$

cioè

$$P\Big((\Big|X - \frac{n}{2}\Big| \leq \sqrt{n}\Big) \geq \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

e ricordando che $|f(x)| \leq g(x)$ equivale a $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ si trova la (60).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (58), (59), (α) oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

50 Approssimazione Normale

Oltre alla convergenza in probabilità esistono altri tipi di convergenza per successioni di variabili aleatorie e in questa trattazione se ne considererà una che ora vediamo.

Definizione. Diremo che X_n **converge in legge** a X

$$X_n \to^L X \text{ se } \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \tag{61}$$

(con ovvio significato dei simboli) per ogni punto x in cui $F_X(x)$ è continua. (Ha un valore teorico, non la useremo realmente in questa trattazione elementare: ci basta conoscerla e capirla).

In sostanza la convergenza in legge corrisponde alla convergenza delle f.r. di X_n alla f.r. di X.
Si noti che le X_n possono essere discrete anche se X è continua.

Teorema Limite Centrale. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti (discrete o continue) di ugual legge con speranza matematica μ e varianza σ^2. Allora la standardizzazione della somma delle prime n tende in legge ad una normale standard. Ciò si esprime in base alla (61) con una formula[110] non semplicissima di valore teorico. Da un punto di vista più applicativo, per le variabili aleatorie ora considerate vale allora l'

Approssimazione Normale

$$P\Big(X_1 + \ldots + X_n \le x\Big) \approx \Phi\Big(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) \tag{62}$$

qua sopra e qua sotto le condizioni da sapere

[110]Per il lettore interessato questa è la formula:

$$\exists\, X \sim N(0,1) \qquad S_n^* := \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \to^L X$$

e tradizionalmente questa approssimazione si ritiene sufficientemente buona per $n \geq 30$ (secondo altri Autori $n \geq 50$) in questi casi:

* se le $X_k \sim B(m, p)$ con $n\,p \geq 5$ e $n\,(1-p) \geq 5$

* per tutte le altre distribuzioni degli esercizi scolastici e anche di questa trattazione, e spessissimo anche della pratica.

Osservazione. Allora, la forma a campana e in particolare la variabile aleatoria normale standard è una sorta di "attrattore" per le variabili aleatorie, perchè anche se ne sono alquanto diverse, la loro somma standardizzata, a certe condizioni sopra dette, tende proprio alla $N(0,1)$, in legge.

Teorema. La convergenza in probabilità implica quella in legge.

Esempio. Calcoleremo la probabilità di ottenere più di 28 teste in 50 lanci di moneta equilibrata.
I risultati X_k hanno legge $B(1, \frac{1}{2})$, con speranza matematica $\mu = \frac{1}{2}$ e varianza $\sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, allora $\sigma = \frac{1}{2}$, e allora

$$P\Big(X_1 + \ldots + X_{50} > 28\Big) = 1 - P\Big(X_1 + \ldots + X_{50} \leq 28\Big) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\Big(\frac{28 - 50 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{50}}\Big) \approx 1 - \Phi(0.849) \approx 1 - 0.802 \approx 0.2 = 20\%.$$

La classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\; 0 \leq x \leq 2.2 \\ \\ 0.99 & se\; 2.2 < x < 2.6 \\ \\ 1 & se\; x \geq 2.6 \end{cases}$$

in 0.849 darebbe 0.801 invece del più preciso 0.802 che troviamo con Wolframalpha. Ma per il risultato finale ragionevolmente espresso da 20% non cambia nulla.

ESERCIZIO$_\mu$
Calcolare con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con 1 000 000 di lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra 499 000 e 501 000 compresi.

SVOLGIMENTO
Per il contatore di teste

$$X_1 + .. + X_{1\,000\,000}$$

cerchiamo

$$\begin{aligned} q &= P(499\,000 \le X \le 501\,000) = \\ &= P(X \le 501\,000) - P(X < 499\,000) = \\ &= P(X \le 501\,000) - P(X \le 498\,999) \end{aligned} \tag{63}$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di 1 000 000 di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$\begin{aligned} &P(X_1 + ... + X_{1\,000\,000} \le x) \approx \\ &\approx \Phi\Big(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Phi\Big(\frac{x - 1\,000\,000\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000}}\Big) = \\ &= \Phi\Big(\frac{x - 500\,000}{500}\Big) \end{aligned}$$

e applicandola alla (64) la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} q &= \Phi\Big(\frac{501\,000 - 500\,000}{500}\Big) - \Phi\Big(\frac{498\,999 - 500\,000}{500}\Big) = \\ &= \Phi\Big(\frac{1\,000}{500}\Big) - \Phi\Big(\frac{-1\,001}{500}\Big) \approx \\ &\approx \Phi(2) - \Phi(-2) = \end{aligned}$$

e con la formula di simmetria

$$\Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_{0.975} \approx 1.96 \approx 2$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 = 0.95 = 95\%$$

ESERCIZIO$_{\mu}$
Calcolare con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con $n \geq 100$ di lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra $\frac{n}{2} - \sqrt{n}$ e $\frac{n}{2} + \sqrt{n}$ compresi. (Per semplicità di calcolo si ipotizzi n quadrato perfetto).

SVOLGIMENTO
Per il contatore di teste

$$X := X_1 + .. + X_n$$

cerchiamo

$$q = P(n/2 - \sqrt{n} \leq X \leq n/2 + \sqrt{n}) =$$
$$= P(X \leq n/2 + \sqrt{n}) - P(X \leq n/2 - \sqrt{n} - 1) \tag{64}$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di n di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$P(X_1 + ... + X_n \leq x) \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{x - n\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{x - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right)$$

e applicandola alla (64) la probabilità cercata è

$$q = \Phi\left(\frac{n/2 + \sqrt{n} - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{n/2 - \sqrt{n} - 1 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi\left(-2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$

per la formula di simmetria

$$= \Phi(2) - 1 + \Phi\left(2 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \star$$

ed eliminando senza qua voler approfondire il minuscolo $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$= \Phi(2) - 1 + \Phi(2) =$$

$$= 2\,\Phi(2) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_{0.975} \approx 1.96 \approx 2$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 = 0.95 = 95\%$$

Volendo fare il calcolo con più precisione, riprendendo da $\star$ (usando la $f(x+h) \approx f(x) + h\,f'(x)$ valida per piccolo h)

$$\star \quad = \Phi(2) - 1 + \Phi(2) + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$= 2\,\Phi(2) - 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$= 0.95 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

che è più del 95%.

ESERCIZIO$_{\mu}$

Calcolare con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con $n \geq 100$ di lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra $\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}$ e $\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}$ compresi. (Per semplicità di calcolo si ipotizzi n quadrato perfetto pari).

SVOLGIMENTO

Per il contatore di teste

$$X_1 + .. + X_n$$

cerchiamo

$$q = P(n/2 - \sqrt{n}/2 \le X \le n/2 + \sqrt{n}/2) =$$
$$= P(X \le n/2 + \sqrt{n}/2) - P(X \le n/2 - \sqrt{n}/2 - 1) \qquad (65)$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di n di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$P(X_1 + \ldots + X_n \le x) \approx$$
$$\approx \Phi\Big(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Phi\Big(\frac{x - n\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$
$$= \Phi\Big(\frac{x - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big)$$

e applicandola alla (65) la probabilità cercata è

$$q = \Phi\Big(\frac{n/2 + \sqrt{n}/2 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{n/2 - \sqrt{n}/2 - 1 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$
$$= \Phi\Big(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{n} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$
$$= \Phi(1) - \Phi\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$

per la formula di simmetria

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$

ed eliminando senza qua voler approfondire il minuscolo $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(1) =$$
$$= 2\,\Phi(1) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_1 \approx 0.84$

$$\approx 2 \cdot 0.84 - 1 = 0.68 = 68\%$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (61), (62), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

51 Note finali sul Calcolo delle Probabilità

51.1 Esiste la probabilità?

La posizione epistemologica della probabilità è non banale.

Esempio 1.
Alessio e Berto sono due gemelli identici, maschi, italiani. Alessio legge che l'1% dei maschi europei hanno un certo gene. Essendo maschio europeo ritiene di avere l'1% di probabilità di avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). Berto legge che il 10% degli italiani hanno quello stesso gene. Essendo italiano ritiene di avere il 10% di probabilità di avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). La cosa sorprendente è che essendo gemelli identici, entrambi hanno il gene, oppure non ce l'hanno.

Chissà qual è la probabilità che abbiano quel gene...

Si noti che a seconda che si consideri il soggetto come italiano, o maschio europeo, si hanno valori diversi per la – sfuggente – *probabilità di avere quel gene.*

La valutazione (numerica) della probabilità dipende da ciò che si sa del soggetto, non è qualcosa di associato inesorabilmente al soggetto stesso – quel qualcosa non esiste.

Nota. Eppure molte persono leggono statistiche di quel genere, e *realmente* pensano che riguardino *loro stessi*, come se le malattie colpissero *a caso*, come una lotteria – che quella sì non guarda in faccia nessuno – senza relazione con la condizione economico-sociale, lo stile di vita e le dinamiche esistenziali pregresse, l'età, il genere, eccetera eccetera. (Fino a giungere al *singolo caso*).

(E l'alcol e il fumo e le droghe leggere e le droghe pesanti...)

Una malattia infantile risulta mortale in, diciamo, 1 caso su n? L'agiato lettore farebbe bene riflettere con *quali* sventurati fa la media un suo eventuale figliolo. Figli di poveri tossicodipendenti che raccolgono da terra siringhe sporche di sangue, e le utilizzano. Bambini denutriti per povertà, anche estrema, con spaventose carenze nutrizionali. Che poi magari quella statistica è fatta a livello europeo, e comprende *milioni* di Rom in Romania, in condizioni di disagio estremo. O bambini non poverissimi ma comunque non curati a bene: si cerchi in rete, della bimba morta *di fame* a Milano, e i genitori il giorno dopo avrebbero comprato un'automobile....

La fortuna è cieca ma la sfortuna ci vede benissimo

(e "sa" ove colpire più probabilmente).

51.2 Ma alla fine la probabilità verrà considerata?

Si potrebbe ipotizzare che con una conoscenza esatta dei possibili benefici ovvero danni e delle loro probabilità, l'umanità nel suo complesso e magari pure i singoli, farebbero le scelte giuste, più razionali, tali da massimizzare la speranza matematica del vantaggio.
A parte le difficoltà nel realizzare con tale precisione le ipotesi, anche se sono verificate l'essere umano si comporta ben diversamente. Leggiamo per esempio a proposito del premio Nobel Kahneman e di un suo collaboratore:

> Attraverso numerosi esperimenti di psicologia cognitiva, infatti, Kahneman e Tversky dimostrarono come le scelte degli esseri umani violassero sistematicamente i principi

della razionalità economica([111])

51.3 ...Forse sì, ma dalle intelligenze artificiali

Altra questione è quella dell'incipiente ingresso nel nostro mondo delle intelligenze artificiali: il freddo calcolo probabilistico che necessariamente faranno le automobili a guida automatica è diverso dalle attuali scelte operative umane.
Se

non facendo nulla, un carrello fra poco ucciderà 10 persone con probabilità stimata del 90%

ma facendo una cosa, per esempio azionando una leva, una persona può farne morire 1 sola, altra,

nessuna persona ragionevole farà quella cosa, e lascerà gli eventi al loro corso. Un'intelligenza artificiale invece proprio farà quella cosa, perchè la speranza matematica è più favorevole:

nel primo caso, speranza matematica -9 (cioè 9 vite umane in meno)

nel secondo caso, speranza matematica -1. Che è meglio di -9.

Naturalmente ci si prospetta un mondo dove le intelligenze artificiali guideranno non solo le automobili, ma praticamente tutti i sistemi.

51.4 Il Calcolo delle Probabilità è controintuitivo

Già abbiamo visto il sorprendente fatto dell'aspettativa di vita residua, che sempre "si crea" davanti al robottino considerato in (41.5): gli restano in media da vivere sempre 72 anni. E sarebbe anche possibile fare regole diverse per ll suo spegnimento, fissandole *prima di avviarlo*, in modo che, se sopravvive al primo anno, gliene aspettano da vivere mediamente perfino più di 71, anche 100 o un milione.

[111] Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Teoria del prospetto*.

Similmente è sempre uguale il numero di estrazioni del lotto da aspettare mediamente per avere una certa combinazione qualunque, indipendentemente dai "ritardi" tanto seguiti da certuni.
Per esempio sempre 18 estrazioni, per il numero singolo, su una determinata ruota.

Abbiamo anche visto il fenomeno del *cigno nero*.

Paradosso del compleanno

> Il paradosso afferma che la probabilità che almeno due persone in un gruppo compiano gli anni lo stesso giorno è largamente superiore a quanto potrebbe dire l'intuito: infatti già in un gruppo di 23 persone la probabilità à circa 0,51 (51%); con 30 persone essa supera 0,70 (70%), con 50 persone tocca addirittura 0,97 (97%), anche se per arrivare all'evento certo occorre considerare un gruppo di almeno 366 persone (367 se si considera l'anno bisestile).([112])

Il Problema di Monty Hall

- Dietro ciascuna di tre porte c'è un'automobile o una capra (due capre, un'automobile in tutto); la probabilità che l'automobile si trovi dietro una data porta è identica per tutte le porte;
- Il giocatore sceglie una delle porte; il suo contenuto non è rivelato;
- Il conduttore sa ciò che si nasconde dietro ciascuna porta;

[112] Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Paradosso del compleanno*

• Il conduttore deve aprire una delle porte non selezionate, e deve offrire al giocatore la possibilità di cambiare la sua scelta;

• Il conduttore aprirà sempre una porta che nasconde una capra;

• Cioè, se il giocatore ha scelto una porta che nasconde una capra, il conduttore aprirà la porta che nasconde l'altra capra;

• Se invece il giocatore ha scelto la porta che nasconde l'automobile, il conduttore sceglie a caso una delle due porte rimanenti;

• Il conduttore offre al giocatore la possibilità di reclamare ciò che si trova dietro la porta che ha scelto originalmente, o di cambiare, reclamando ciò che si trova dietro la porta rimasta.

Le possibilità di vittoria aumentano per il giocatore se cambia la propria scelta?
(...) La risposta è sì; le probabilità di trovare l'automobile raddoppiano. ([113])

Esistono molti paradossi del Calcolo delle Probabilità. Alcuni mostrano quanto esso sia controintuitivo, come sopra. Altri mostrano quanto sia problematica la definizione stessa di probabilità. LINK->

Il seguente esercizio ci mostra invece un fatto sorprendente.

[113] Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Problema di Monty Hall*; che continua: "(...) L'obiezione più comune alla soluzione è fornita dall'idea che, per varie ragioni, il passato possa essere ignorato quando si valutano delle probabilità. Dunque, la scelta della prima porta e il ragionamento del conduttore circa quale porta aprire si possono trascurare; dal momento che si può scegliere tra due porte, la probabilità di scegliere quella giusta dovrebbe essere pari al 50%, indipendentemente che si decida di cambiare o mantenere la porta scelta."

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$

$\ast \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità $\frac{1}{n}$, con n un numero che per adesso non specifichiamo. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probabilità c'è che andando n volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso, per n molto grande, diciamo pure per n tendente all'infinito?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{punto al 1-esimo viaggio}) = ... = P(\text{punto all'}n\text{-esimo viaggio}) = \frac{1}{n}$$

Evento complementare:

$$P(\text{non punto al 1-esimo viaggio}) = ... = P(\text{non punto all'}n\text{-esimo viaggio}) = 1 - \frac{1}{n}$$

Evento composto:

$$P(\text{mai punto negli } n \text{ viaggi}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \quad (n\, volte)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Evento complementare:

$$P(\text{punto almeno 1 volta negli } n \text{ viaggi}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

e allora al limite per n tendente all'infinito

$$P(\text{punto almeno 1 volta negli } n \text{ viaggi con } n \text{ grandissimo}) \approx$$

$$\approx \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

e ricordando che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

e allora in conclusionela probabilità cercata vale

$$\boxed{1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.632 = 63.2\%}$$

(Per esempio con $n = 10$ si ha $\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 0.651$).
Detto molto grossolanamente: se facendo una cosa si prende una malattia con probabilità $\frac{1}{n}$, facendo quella cosa n volte si prende la malattia con probabilità circa del 63%, supponendo l'indipendenza degli eventi ed n molto grande.
Si noti la sorprendente (quasi) indipendenza dal numero n.

Un'analoga (quasi) indipendenza l'abbiamo vista con le dismutazioni.

51.5 Conclusioni

Nel mondo perfetto e pulito di monete e dadi e giochi d'azzardo (com'è il Problema di Monty Hall), si presentano fenomeni controintuitivi, ma almeno chiari.

Alcuni esempi visti ci mostrano come sia sottile la questione dell'esistenza stessa di una probabilità in senso oggettivo e univoco – ed esistono esempi molto più sottili.

Nella realtà del mondo ordinario, storico, complessissimo, vi è come una ricorrente tentazione di applicare verso il futuro le frequenze empiriche rilevate, cioè di dare alla probabilità frequentista un valore predittivo su sistemi non isolati come invece sono i dadi e le monete, per quanto eventualmente non regolari (se sono regolari la probabilità frequentista non serve, ci basta quella classica).
Questo potrà ancora funzionare abbastanza bene per singoli sistemi biologici (una gravidanza umana probabilmente durerà circa 9 mesi, come risulta abbia sempre fatto), **in particolare sull'effetto**

dei farmaci (che tende – almeno in parte – a riprodursi nel tempo nei vari soggetti trattati) ma, nei fatti, diventa largamente illusorio per la Storia umana nel suo complesso. Uno stratega militare del passato disse che "le previsioni a tre mesi valgono zero". (Comunque, in tempo di pace le situazioni sono più stabili che in tempo di guerra).
Venendo a tempi più recenti, il Nobel per l'Economia Paul Samuelson ci ricorda che

> The stock market has forecast nine of the last five recessions([114])

Le previsioni sul futuro delle farmacie in Italia e del loro mercato, sono molto aleatorie. Chi l'avrebbe mi detto qualche decina d'anni fa, che entrando in una farmacia si sarebbero visti foulard, profumatori d'ambiente, pupazzetti di Babbo Natale, eccetera!

Definitivamente,

> Prediction is very difficult, especially about the future.

[114] In https://en.wikiquote.org/wiki/Paul_Samuelson

Esercizio risolto$_L$ Tre urne A, B e C contengono palline bianche e nere secondo lo schema

$$A : 2b + 2n \qquad B : 3b + 1n \qquad C : 1b + 3n.$$

Si estrae una pallina da A e si vede il colore:
• se è bianca la si mette in C e poi si estrae una pallina da C e la si mette in A;
• se è nera la si mette in B e poi si estrae una pallina da B e la si mette in A.
Qual è la probabilità di ripristinare la situazione iniziale?
Quali altri casi si possono avere e con quali probabilità?

come all'inizio
2/5 ↗○ A ○○●● B ○○○● C ○●●●
C ○○●●●
3/5 ↘● A ○●●● B ○○○● C ○○●●
nuovo caso I
B ○○○●
B ○○○● 1/2 ↗○ A ○●●
A ○○●●
C ○●●● 1/2 ↘● A ○○●
nuovo caso II
3/5 ↗○ A ○○○● B ○○●● C ○●●●
B ○○○●●
2/5 ↘● A ○○●● B ○○○● C ○●●●
come all'inizio
C ○●●●

Ripristino della soluzione iniziale: può avvenire in 2 modi, eventi disgiunti; ciascuno dei 2 addendi è un prodotto perchè corrispende ad eventi composti (cioè $\cap$ ovvero *et*) indipendenti; probabilità: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$.
Nuovi casi e loro probabilità, valendo le osservazioni soprastanti:
I: $(A : 1b + 3n;\ B : 3b + 1n;\ C : 2b + 2n)$, $p' = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$,
II $(A : 3b + 1n;\ B : 2b + 2n;\ C : 1b + 3n)$, $p'' = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$.
Esercizio$_\mu$ Costruire e risolvere un esercizio analogo.

B1 – ESERCIZI SUL CALCOLO DELLE PROBABILITà

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il testa con 5 lanci di una moneta regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 5 volte il testa con 6 lanci di una moneta regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 5 volte il croce con 7 lanci di una moneta regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il numero 2 con 5 lanci di un dado regolare a 4 facce?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 1 volta il numero 3 con 7 lanci di un dado regolare a 4 facce?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il numero 2 con 5 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte il numero 1 con 8 lanci di un dado regolaree?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 7 volte il numero 7 con 8 lanci di un dado regolare a 8 facce?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 6 volte un numero primo con 7 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 6 volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero primo con 6 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero primo con 10 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero quadrato di volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero quadrato con 6 lanci di un dado regolare?

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero triangolare di volte testa con 9 lanci di una moneta regolare?

52 Introduzione alla Statistica Inferenziale

IL PRIMO COMPITO DELLA STATISTICA INFERENZIALE: DISTINGUERE FRA VARIAZIONI SIGNIFICATIVE E NON SIGNIFICATIVE: Lezioni (52), (56), (58.1), (**??**), (60), (61).
PER ESEMPIO PER DISTINGUERE PLAUSIBILI EFFETTI CASUALI DA SPERABILI EFFETTI CAUSALI DEI FARMACI.

Vedremo anche altre 2 cose: gli stimatori, Lezione (53), e gli intervalli di fiducia, Lezioni (54), (55).

52.1 Introduzione

Se abbiamo un dado appena comprato da un rivenditore di cui ci fidiamo, lo riteniamo regolare, cioè riteniamo equiprobabili i suoi risultati, e similmente per una moneta nuova di zecca:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{\textit{dado equilibrato}}_{\textit{ovvero regolare}} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\textit{moneta equilibrata}}_{\textit{ovvero regolare}}$$

Su queste basi con il Calcolo delle Probabilità possiamo fare moltissime affermazioni certe sui suoi risultati comunque incerti:
– per esempio che conviene scommettere che la somma di 2 lanci del dado sarà 7 piuttosto che 8,
– e conviene scommettere che su un milione di lanci della moneta il numero di teste sarà fra 499 000 e 501 000 piuttosto che no.
Questo è appunto il Calcolo delle Probabilità, e abbiamo visto quante implicazioni ha nella Farmacia.

Tuttavia, gli effetti di un farmaco sono ben lontani da questo tipo di regolarità che hanno il dado e la moneta equilibrati.

Qua entra in campo la Statistica Inferenziale. Mentre nel Calcolo delle Probabilità si parte da una distribuzione e si trovano molte affermazioni conseguenti, come quelle sopra riportate, nella Statistica Inferenziale si suppone noto il tipo di distribuzione, per esempio binomiale o normale o log-normale, ma si ignorano i valori dei parametri della distribuzione, e si vogliono fare affermazioni ragionevoli su essi. Specialmente sulla media e la varianza.

Per esempio potremmo avere un dado di forma irregolare, fatto con un astragalo, o giocare a testa e croce con un frisbee, e ci ritroviamo con distribuzioni di tipo noto ma con parametri incogniti:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 \end{pmatrix}$$

$$Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

La statistica inferenziale vuole fare affermazioni ragionevoli sui parametri di distribuzioni per il resto note.
Per esempio, se p è $\frac{1}{2}$, che potrebbe corrispondere al farmaco che non fa nè bene nè male, oppure no. Solo ragionevolmente parlando. La certezza sfugge dalla Statistica Inferenziale inesorabilmente.

Tali affermazioni ragionevoli verranno fatte non sulla base della simmetria com'è per dadi e monete, che fa ritenere l'equiprobabilità dei casi possibili, bensì sulla base di molti valori sperimentali ovvero empirici (determinazioni) della variabile aleatoria oggetto di indagine – cioè sulla base di una determinazione (storica, realmente avvenuta nel tempo) di un campione aleatorio. Cioè, lanciamo molte volte l'astragalo o il frisbee, o diamo il farmaco a molti soggetti, e conteggiamo i risultati.

Così spiega Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *inferenza statistica*:

> Si considereranno principalmente campioni casuali semplici di dimensione $n > 1$, che possono venire interpretati come n realizzazioni indipendenti di un esperimento di base, nelle medesime condizioni. Dal momento che si considera un esperimento casuale, si coinvolge il calcolo delle probabilità. Nell'inferenza statistica c'è, in un certo senso, un rovesciamento di punto di vista rispetto al calcolo delle probabilità. Nell'ambito di quest'ultimo, noto il processo di generazione dei dati sperimentali (modello probabilistico) siamo in grado di valutare la probabilità dei diversi possibili risultati di un esperimento. Nella statistica il processo di generazione dei dati sperimentali non è noto in modo completo (il processo in questione

> è, in definitiva, l'oggetto di indagine) e le tecniche statistiche si prefiggono di indurre le caratteristiche di tale processo sulla base dell'osservazione dei dati sperimentali da esso generati.

Dovremo però cercare di ragionevolmente distinguere il plausibile effetto casuale, dallo sperabile effetto causale. Per esempio è ben possibile che una moneta o frisbee pur regolare abbia fatto 3 teste su 4 lanci, ma se dà testa 300 volte su 400, sarà ragionevole ritenere che no, non sia regolare. La linea di confine – sottile e problematica – fra il plausibile effetto casuale e lo sperabile effetto causale viene demarcata da formule basate sulle funzioni del chi quadrato, della t di student, della gaussiana, e altre.

Così ancora spiega Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla stessa voce *inferenza statistica*:

> Nell'ambito dell'inferenza statistica, si distinguono due scuole di pensiero, legate a diverse concezioni, o interpretazioni, del significato della probabilità:
>
> - Inferenza classica, o frequentista;
> - Inferenza bayesiana.
>
> La prima è legata agli storici contributi di R. Fisher, K. Pearson, e rappresenta la posizione maggioritaria. La seconda, allo stato attuale (2005) ancora minoritaria, ma in crescita, è fondata sull'uso del risultato del teorema di Bayes ai fini dell'inferenza statistica.

Questa trattazione elementare segue il primo modello.

52.2 Esempio

La probabilità che il contatore X_n di teste in n lanci di moneta regolare assuma un valore

$$\frac{n}{2} - \sqrt{n} \leq X_n \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}$$

(che con la Disuguaglianza di Chebyshev si può dimostrare esser $> 75\%$) con calcoli non banali si può dimostrar essere $> 95.4\%$ per ogni $n \geq 4$, cioè

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| \leq \sqrt{n}\right) > 95.4\% \qquad \forall\, n > 4. \tag{66}$$

Questo ci permette di fare una prima puntatina nella statistica della della Farmacia.

Supponiamo di avere una popolazione di monete regolari, e consideriamo malattia la loro regolarità, cioè il fare testa con probabilità $\frac{1}{2}$.
Ne prendiamo un bel campione per fare un test terapeutico, diciamo 10 000. (Il numero di soggetti ragionevole da considerare è questione statistica non banale; qua scegliamo 10 000).
Le curiamo con una goccia di farmaco (per esempio una goccia di colla al centro dalla parte della testa) e ci chiediamo se la cura ha funzionato, cioè se adesso sono meno regolari. Cioè ci chiediamo se le abbiamo curate dalla loro regolarità.
Lanciamo le 10 000 monete 1 volta ciascuna ottenendo 10 000 risultati indipendenti e diciamo $X_{10\,000}$ il numero di teste.
Noi vorremmo che questo numero sia molto diverso 5 000, cioè la metà di 10 000.
Supponiamo di ottenere 5 100: possiamo essere soddisfatti?
(5100 è proprio $n + \sqrt{n}$).
Sì perchè se le monete erano ancora regolari c'era meno del 4.6% di probabilità (100% − 95.4%) che venisse un risultato così estremo, lontano dalla metà. (Siamo soddisfatti ma di poco, se veniva 5 200 o magari 6 000 era molto meglio).
La soglia ordinaria di *significatività* della Statistica è il 5%.
Se ne otteniamo 5 050 non siamo soddisfatti: una tale deviazione è ben compatibile con la regolarità.
Questa è solo un'idea iniziale: nella pratica scientifica seria, bisogna fissare la soglia prima di fare l'esperimento.

Si noti però che in generale nella Farmacia in generale con un farmaco si vuole sbilanciare un parametro <u>in una fissata direzione</u>, (si pensi alla glicemia troppo alta o alla sideremia troppo bassa), non semplicemente smuoverlo in una direzione qualunque.
Questo complicherà le cose. Per intanto abbiamo capito essenzial-

mente cosa vuol dire distinguere variazioni significative da variazioni non significative: queste ultime *potrebbero ben essere* (qui sta il 95%) *fluttuazioni casuali*.

Con l'approssimazione normale si può dimostrare che, purchè n sia sufficientemente grande, lo sbilanciamento di teste rispetto alla metà in una direzione o nell'altra

$$\left| X_n - \frac{n}{2} \right|$$

con probabilità $\approx 68.3\%$ è $< \frac{1}{2}\sqrt{n}$,
con probabilità $\approx 27\%$ sta fra $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ e $\sqrt{n}$,
con probabilità $\approx 4.6\%$ è $> \sqrt{n}$

Riscriviamo l'ultima:

$$P\left(\left| X_n - \frac{n}{2} \right| > \sqrt{n} \right) \approx 4.6\% \qquad \forall\, n\, molto\, grande \tag{67}$$

strettamente imparentata alla (66) perchè 4.6 è 100-95.4.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (66), (67), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

53 Stimatori e stimatori non distorti

53.1 Parametri e stimatori; stimatori non distorti

Supponiamo che fra poco avremo le altezze di $n := 100$ persone, prese a caso dai 60milioni di italiani, e allora l'altezza di un italiano a caso è una variabile aleatoria X, e gli n numeri che stiamo per avere sono essi stessi variabili aleatorie X_1,...,X_n, e dopo che li avremo saranno numeri $x_1, ..., x_n$, detti *determinazioni* della variabile aleatoria. Chiameremo anche *campione aleatorio* le variabili aleatorie X_1,...,X_n e *campione* i numeri $x_1, ..., x_n$, ma non ci formalizzeremo su questa distinzione. La Statistica Descrittiva ci ha dato definizioni di media e varianza di quei numeri $x_1, ..., x_n$. Nel Calcolo delle Probabilità abbiamo definito la media ovvero speranza matematica e la varianza della variabile aleatoria X, ma qual è la relazione fra le 2 medie e le 2 varianze? Ottenere da n numeri una *stima* di un *parametro* incognito di una v.a. ovvero della sua legge, è un *problema di stima.* Ogni funzione

$$h(X_1, ..., X_n)$$

di un campione aleatorio si dice *stimatore*, in generale stimatore di un parametro incognito u della densità della variabile aleatoria, variabile aleatoria che sappiamo esistere ma non conosceremo mai in forma esatta (legge ovvero distribuzione, cioè densità o funzione di ripartizione), ma di cui avremo n determinazioni. Scriveremo

$$\hat{v} := h(X_1, ..., X_n)$$

e diremo che $\hat{v} = h(X_1, ..., X_n)$ (variabile aleatoria) è uno stimatore di v e $\hat{v} = h(x_1, ..., x_n)$ (numero) è una stima di v.
Per esempio per una v.a. $\mathbb{U}[0, a]$ o $\mathbb{U}\{0, a\}$ (uniforme fra 0 e a, continua o rispettivamente discreta)

$$\hat{a} := 2\,\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \qquad = 2\,\bar{X}_n \tag{68}$$

è lo *stimatore dei momenti* del parametro a. (Il doppio della media aritmetica).

Esistono molti criteri di bontà di uno stimatore, e noi ne consideremo uno: diremo che lo stimatore $\hat{u}$ del parametro incognito u è *non distorto* se la speranza matematica di $\hat{u}$ è u, cioè $E(\hat{u}) = u$.

53.2 Stimatori non distorti di media e varianza

La differenza basale fra la *statistica descrittiva* e la *statistica inferenziale* è che la prima opera (in generale) su numeri e la seconda su variabili aleatorie, con il che la prima ricade in quella che abbiamo chiamato *matematica della certezza* e la seconda nella *matematica dell'incertezza*.
Se abbiamo n numeri

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

nella statistica descrittiva queste sono la media e la varianza degli n numeri:

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad Var(x_1, x_2, ..., x_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 .$$

Se invece supponiamo che $x_1, x_2, ..., x_n$ siano *determinazioni* di una variabile aleatoria X con una certa media μ e una certa varianza σ^2 *incognite*, dalle precedenti formule possiamo immediatamente definire questi (ragionevoli) stimatori – che sono variabili aleatorie – di μ e σ^2:

$$\hat{\mu} := \bar{X} := \bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \tag{69}$$

$$W := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2 .$$

Si dimostra che il primo è stimatore *non distorto* della media μ, cioè $E(\bar{X}_n) = \mu$, ma il secondo non è stimatore non distorto di σ^2, cioè la sua speranza matematica è diversa dal parametro che si vuol stimare.

Si dimostra invece che (e si noti la differenza nel denominatore)

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 \ \left[:= \hat{\sigma}^2 \ {\scriptstyle \leftarrow scrittura\, rara,\, scriveremo\, S^2} \right] \qquad (70)$$

è lo *stimatore non distorto della varianza*: $E(S^2) = \sigma^2$.

Riassumiamo:
Per una v.a. discreta o continua X, supponiamo di sapere che:
1) ha distribuzione di un certo tipo noto dipendente da un parametro incognito, sia esso a, per esempio $\mathbb{U}[-b,b]$ o $N(\mu,1)$ o $N(0,\sigma^2)$ o $\Gamma(\alpha,1)$ (dove a è rispettivamente b, μ, σ^2 e α);
2) avremo n determinazioni indipendenti $x_1,...,x_n$ di X, che per ora, "prima" di averle, sono n variabili aleatorie $X_1,...X_n$.

Non sapremo mai quanto vale a ma vogliamo stimarlo con uno stimatore $\hat{a}$ coi dati $x_1,...,x_n$, ovvero (prima di averli) $X_1,...,X_n$.

La teoria degli stimatori dei momenti è ricca e interessante([115])

[115]Per lo studente interessato, qualche dettaglio.

Stimatore dei momenti col momento primo Lo stimatore $\hat{a}$ *dei momenti, col momento primo*, attribuisce al parametro a quel valore che farebbe avere alla densità $f_a(x)$ come media, ovvero speranza matematica ovvero momento primo, il valore che è proprio la media di $X_1,...X_n$.

Esempio 1. Per una densità $N(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 noto (ora $a := \mu$)

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n).$$

Esempio 2. Per una densità esponenziale di parametro λ (ora $a := \lambda$) è

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} =^{EQ} \bar{X}_n$$

$$\Rightarrow \ \hat{\lambda} := \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n}\ .$$

Esempio 3. Per una densità $\Gamma(\alpha,\lambda)$ con α noto (ora $a := \lambda$) è

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} =^{EQ} \bar{X}_n$$

$$\Rightarrow \ \hat{\lambda} := \frac{\alpha}{\bar{X}_n} = \frac{n\,\alpha}{X_1 + ... + X_n}\ .$$

ma nella nostra trattazione elementare ci limitiamo molto.

Esempio 4. Per una densità uniforme $\mathbb{U}[-u,u]$ è

$$E(X) = \frac{u-u}{2} = 0$$

che non dipende dal parametro incognito $a = u$: il metodo dei momenti col solo momento primo non si può applicare.

Metodo di calcolo dello stimatore dei momenti 1) Si calcola la speranza matematica di $f_a(x)$ come funzione di a;
2) se dipende da a la si uguaglia a $\bar{X}_n$, media di X_1,...,X_n;
3) si risolve (se possibile) l'equazione in a;
Quella soluzione trovata, in termini di X_1,...,X_n è lo stimatore dei momenti, inteso come funzione (ed è una variabile aleatoria), per esempio

$$\hat{a} := \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}$$

e in termini di x_1,...,x_n è lo stimatore dei momenti inteso come valore dello stimatore, nel caso specifico di un campione x_1,...,x_n considerato, per esempio

$$\hat{a} := \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n}$$

e quando a x_1,...,x_n si sostituiscano i loro valori, è un numero, per esempio

$$\hat{a} := \frac{3}{8+7+5} = \frac{3}{20} = 0.15.$$

4) Se $E(X)$ non dipende dal parametro incognito a, si usi allora il momento secondo uguagliandolo alla media quadratica.

Esempio 4 bis. Per una densità uniforme $\mathbb{U}[-u,u]$ è

$$E(X) = \frac{u-u}{2} = 0$$

che non dipende dal parametro incognito $a = u$. Con il momento secondo $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_a(x) \, dx$, ora che la densità è $\frac{1}{2\,u}$ fra $-u$ e u,

$$E(X^2) = \int_{-u}^{u} \frac{x^2}{2\,u} \, dx = \Big[\frac{x^3}{6\,u}\Big]_{-u}^{u} = \frac{u^3}{6\,u} - \frac{-u^3}{6\,u} = \frac{u^3}{3\,u} =$$

$$= \frac{u^2}{3} =^{EQ} \frac{1}{n}(X_1^2 + \ldots + X_n^2) \quad {\scriptstyle \leftarrow media\ quadratica}$$

$$\rightarrow \quad \hat{u} := \sqrt{\frac{3\,(X_1^2 + \ldots + X_n^2)}{n}}\,.$$

A un livello superiore si considerano parametri 2-dimensionali, come $a := (\mu, \sigma^2)$, ottenendosi un sistema di equazioni.

53.3 Stimatori di massima verosimiglianza

Lo stimatore $\hat{a}$ *di massima verosimiglianza* "cerca di essere" quello che renderebbe massimamente probabile l'uscita di x_1,...,x_n, se a valesse $\hat{a}$. Il metodo per trovarlo non è semplicissimo.
Ci limitiamo a dare la formula dello stimatore di massima verosimiglianza del parametro λ della legge esponenziale:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n} \,. \tag{71}$$

(Che non è non distorto). ([116])

[116] Per lo studente interessato, ecco i dettagli sugli stimatori di massima verosimiglianza. Lo stimatore $\hat{a}$ *di massima verosimiglianza* "cerca di essere" quello che renderebbe massimamente probabile l'uscita di x_1,...,x_n, se a valesse $\hat{a}$. Se per esempio avremo una sola determinazione di $N(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 noto, ovviamente stimeremo $\hat{a} := \hat{\mu} := X_1$. (Si disegni la campana gaussiana col massimo in μ).
Naturalmente, trattandosi di una densità continua, se $\mu = x_1$, la probabilità di quella particolare uscita x_1 è 0 comunque, come per qualunque altro valore e con qualunque valore del parametro μ, ma è chiaro che $\mu := x_1$ "cerca di essere" quello che renderebbe massimamente probabile l'uscita x_1 perchè almeno con quel valore di μ la densità ha un massimo in x_1.
Meno evidente è $\hat{\mu}$ se $n \geq 2$, ma si dimostra che è la media campionaria $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ perchè la densità congiunta, prodotto delle densità $f_\mu(x)$ per l'indipendenza, calcolata in x_1,...,x_n,

$$f_\mu(x_1) \cdot ... \cdot f_\mu(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot ... \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ha un punto di massimo in $\bar{X}$ perchè lo ha il suo ln

$$n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} - \Big(\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2} + ... + \frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

come si vede derivando rispetto al parametro, in questo caso μ,

$$0 - \Big(\frac{x_1-\mu}{\sigma^2} + ... + \frac{x_n-\mu}{\sigma^2}\Big)$$

e uguagliando a 0: $n\,\mu = x_1 + ... + x_n \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) = \bar{X}_n$.

Massima verosimiglianza: il metodo generale Generalizzeremo come segue il procedimento visto nell'esempio.
In questa trattazione elementare, prenderemo come stimatore di massima verosimiglianza $\hat{a}$ (di un parametro incognito a di una densità $f_a(x)$ per il resto nota) lo zero, se esiste unico (ad un livello superiore si considera il caso di non unicità) della derivata rispetto ad a del logaritmo naturale

$$\ln f_a(x_1) + ... + \ln f_a(x_n)$$

della funzione di verosimiglianza

$$f_a(x_1) \cdot ... \cdot f_a(x_n).$$

Procederemo allora con questi passaggi:
1) calcolo di $f_a(x_1)\cdot\ldots\cdot f_a(x_n)$ lasciando indicati x_1,...,x_n (cioè considerandoli variabili reali e non costanti numeriche);
2) calcolo del logaritmo naturale della predetta funzione;
3) derivazione della predetta funzione rispetto al parametro a;
4) uguagliamento a 0 della predetta funzione;
5) risoluzione dell'equazione.
Quello zero trovato, in termini di X_1,...,X_n è lo stimatore di massima verosimiglianza inteso come funzione (ed è una variabile aleatoria), per esempio

$$\hat{a} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

e in termini di x_1,...,x_n è lo stimatore di massima verosimiglianza inteso come valore dello stimatore, nel caso specifico di un campione x_1,...,x_n considerato, per esempio

$$\hat{a} := \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

e quando a x_1,...,x_n si sostituiscano i loro valori, è un numero, per esempio

$$\hat{a} := \frac{1}{3}(8 + 7 + 5) = \frac{20}{3} \approx 6.67.$$

Ad un livello superiore, si considerano anche parametri 2-dimensionali, per esempio $a := (\mu, \sigma^2)$. (Là sono incogniti sia μ che σ^2).

Esempio: parametro λ dell'esponenziale Ora il parametro incognito è $a := \lambda$ e la densità

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{se } x \geq 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} .$$

La parte della definizione per $x < 0$ non è rilevante e similmente avviene per tutti i casi di interesse pratico in cui la densità è nulla per $x < 0$. (E per tutti i casi di questa trattazione elementare).
1) calcolo di $f_a(x_1)\cdot\ldots\cdot f_a(x_n)$ lasciando indicati x_1,...,x_n:

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \geq 0 \qquad f_\lambda(x_1)\cdot\ldots\cdot f_\lambda(x_n) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x_1}\cdot\ldots\cdot\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x_n} =$$

$$= \lambda^n\, \mathrm{e}^{-\lambda\,(x_1+\ldots+x_n)}$$

2) Calcolo del logaritmo naturale della predetta funzione:

$$n \ln \lambda - \lambda\,(x_1 + \ldots + x_n)$$

3) derivazione della predetta funzione rispetto al parametro λ:

$$\frac{n}{\lambda} - (x_1 + \ldots + x_n)$$

4) uguagliamento a 0 della predetta funzione:

$$\frac{n}{\lambda} - (x_1 + \ldots + x_n) =^{EQ} 0$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (68), (69), (70), (71), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

Naturalmente bisogna conoscere anche le formule di media e varianza, riportate in questa Lezione, che sono state già illustrate in Statistica Descrittiva.

5) risoluzione dell'equazione:

$$\lambda = \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n}\,.$$

Infine, lo stimatore del parametro λ della legge esponenziale risulta

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

dove si è riconosciuto il reciproco della media campionaria $\bar{X}_n$.

54 Intervalli di fiducia e caso di μ di $N(\mu, \sigma^2)$

54.1 Introduzione agli intervalli di fiducia

Se X è una variabile aleatoria normale $N(\mu, \sigma^2)$ con μ incognito, e ne avremo un campione aleatorio X_1,...,X_n (variabili aleatorie indipendenti tutte con la stessa legge $N(\mu, \sigma^2)$) oppure ne abbiamo delle determinazioni (numeri) x_1,...,x_1, possiamo stimare μ con la media campionaria $\hat{\mu} := \bar{X}_n$ e allora numericamente $\hat{\mu} = \bar{x}_n$. Potrebbe essere per esempio $\bar{x}_n \approx 2.019$ sia se $n = 1$ sia se $n = 100$: la *stima puntuale* ottenuta non distingue i due casi mentre è chiaro che nel secondo caso il valore 2.019 è molto più "sicuro" se non nella sua esattezza (che comunque ha probabilità 0) almeno nella sua vicinanza al valore vero.

Questo della media aritmetica è il modo antico di fare nella Statistica, anche Medica.
Invece il modo moderno è quello di dare un intervallo di valori in cui *sperabilmente* sta il valore vero, come ora mostreremo.

La *stima intervallare* è costituita da 2 stimatori $\hat{u}$ e $\hat{v}$ tali che il parametro incognito, sia ora esso a (per esempio μ di $N(\mu, \sigma^2)$) sia nell'*intervallo aleatorio* $[\hat{u}, \hat{v}]$ con probabilità $\geq 95\%$

$$P(a \in [\hat{u}, \hat{v}]) \geq 95\% \qquad \text{e secondo altri Autori } =$$

fino a che $\hat{u}$ e $\hat{v}$ sono variabili aleatorie dipendenti da X_1,...,X_n, cioè prima di venire determinate coi dati numerici x_1,...,x_n: dopo, il parametro a o sta o non sta nell'intervallo determinato, e sarebbe arduo anche solo definire in che senso si potrebbe attribuire una probabilità a quel fatto; si potrebbe farlo solo con la concezione soggettiva della probabilità ma con essa si può proporre *qualunque* valore di probabilità. (È un po' come chiedersi che probabilità ha 2019 di essere primo: o è primo o non lo è, non c'è una grande questione probabilistica). La questione è sottile e di fatto diffusissima è la credenza erronea che a stia nell'intervallo di confidenza con probabilità 95%, o più in generale $(1-\alpha)100\%$. L'articolo scientifico riportato in questo link-> su sito governativo statunitense (associato al PubMed)

> provide an explanatory list of 25 misinterpretations of P values, confidence intervals, and power.

Fissati i valori $x_1,\ldots,x_n$ e conseguentemente i valori di $\hat{u}$ e $\hat{v}$ non si parla più di probabilità ma di *(livello di) confidenza*, p.es. 95%.

Scriveremo per esempio

$$a \in [1.9, 2.1] \quad \alpha = 0.05$$

ma altri Autori scriveranno diversamente e variamente, per esempio

$$\mathrm{C.I.}_{95} = 1.9 - 2.1$$

dove C.I. sta per *confidence interval* e 95 sta per 95% ovvero $\alpha = 0.05$.

Tutto questo si estende mutando la soglia 95% in qualunque altro *livello* $1-\alpha$, e normalmente si usano anche 90% e 99%, e si estende a qualunque parametro incognito di una densità per il resto nota.

Il complemento α di $1-\alpha$ si chiama *(livello di) significatività*, e in generale è $5\% = 0.05$ o $10\% = 0.1$ o $1\% = 0.01$.
Purtroppo α e $1-\alpha$ vengono scambiati fra loro nei vari testi.

Il *(livello di) di significatività* è affine al *p value* dei test statistici, che vedremo in seguito, salvo che quest'ultimo non è prefissato ma si calcola dopo: è l'ultimo valore di significatività possibile coi dati che abbiamo, il valore discriminante. Se avessimo pre-fissato un α più piccolo non saremmo riusciti a dimostrare niente, neppure con l'incerta certezza statistica. La speranza è avere un p value piccolissimo, indice di una forte certezza statistica.

54.2 Intervalli di fiducia per μ per campioni gaussiani

Precisiamo dapprima che *intervallo di fiducia* e *intervallo di confidenza* sono sinonimi.

In questo paragrafo considereremo, per una $N(\mu, \sigma^2)$:
• la stima intervallare di μ essendo noto σ^2;
• la stima intervallare di μ essendo ignota anche σ^2.

Tutte le formule di questo paragrafo valgono per campioni gaussiani e (approssimatamente) anche per campioni non gaussiani se la numerosità è $n \geq 30$ e la densità non è "troppo" asimmetrica.

Per μ con σ^2 <u>nota</u>, intervallo di fiducia bilatero centrato al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è "piccolo", come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, "grande"):

$$\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}},\, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad (\alpha = ...) \tag{72}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha = ...)$$

(si specifichi α se noto) e in particolare ricordiamo il valore $\phi_{0.975} \approx 1.96$ da cui l'intervallo classico con livello di confidenza del 95%, cioè $\alpha = 0.05$,

$$\left[\bar{X}_n - 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\, \bar{X}_n + 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (\alpha = 0.05) \tag{73}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

Come sopra, per μ con σ^2 <u>non nota</u>, caso più verosimile:

$$\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] \quad (\alpha = ...) \tag{74}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad (\alpha = ...)$$

(si specifichi α se noto) con i quantili di Student e la radice quadrata S_n dello stimatore S_n^2 della varianza.

Si noti che esistono infiniti intervalli bilateri allo stesso livello, non centrati in $\bar{X}_n$, e 2 unilateri; ne mostreremo solo 1 unilatero.

Per μ, un intervallo <u>unilatero</u> al livello di confidenza $1-\alpha$:

$$\Big] -\infty,\, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha}(n-1)\Big]. \quad \text{\scriptsize (Qua ovviamente } \sigma^2 \text{ non nota).} \tag{75}$$

(Si specifichi α se noto).

La quantità $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ che ricorre nelle precedenti formule ha un nome:

$$\textit{errore standard} := \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{76}$$

e potrebbe trovarsi abbreviato *se*, dall'inglese.

Note sui quantili. I valori dei quantili di Student si trovano sulle tavole, cartacee o sulla rete, di non immediata lettura purtroppo, e vengono calcolati da molti software.
Per grandi valori di n, i quantili di Student possono in pratica sostituirsi coi quantili normali, le cui tavole sono di più facile lettura. Questa sostituzione diventa possibile perchè per grandi valori di n lo stimatore S_n^2 tende a σ^2, cosicchè di fatto la varianza diventa "sperabilmente nota" e (circa) uguale a S_n^2.
Non faremo mai quest'approssimazione incerta, preferendogli la formula (74), ma ci si aspetti di trovarla nei testi scientifici, in particolare l'incerta formula per il classico 95%

$$\bar{X}_n \pm 1.96\, \frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

che eviteremo per grandi n ed eviteremo come la peste per piccoli n. Certo per $n > 120$ l'approssimazione 1.96 non è cattiva; ecco alcuni quantili di Student per $\alpha = 0.05$ ovvero $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$:

30 2.042
40 2.021
60 2.000
120 1.980
∞ 1.960
ed eccolo, infine al limite, l'1.96.
D'altra parte, è inutile cercare qua il pelo nell'uovo, quando poi nella pratica l'1.96 stesso viene approssimato spesso con 2, da cui la classica formulazione *pratica*, che troviamo su Wikipedia (in inglese) alla voce Confidence interval:

plus or minus twice the standard error

cioè

$$95\%\ \text{C.I.:}\quad \bar{X}_n \pm 2\,\frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{77}$$

di largo uso *pratico*, ma la eviteremo, preferendogli la formula (74). Ma può essere utile per semplici stime a mente.

Tavole (stampabili) dei quantili normali, di Student e del chi quadrato (e altre) si trovano per esempio a questo `link->`

Ecco un esempio di intervallo di fiducia tratto da un articolo scientifico riportato su PMC, sito governativo statunitense:

> The seroprevalence of latent toxoplasmosis in subjects involved in traffic accidents (N = 146) and in the general population living in the same area (N = 446) was compared [...] subjects with latent toxoplasmosis had a 2.65 (C.I.$_{95}$= 1.76-4.01) times higher risk of an accident than the toxoplasmosis-negative subjects.

(Si noti che la *stima puntuale* 2.65 non è al centro dell'intervallo $[1.76, 4.01]$, che è bilatero ma non centrato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
≈ Conoscendo la varianza 3.2 di una variabile aleatoria normale si determini l'intervallo di fiducia bilatero consueto della media al livello 95% relativamente a questo campione

-1.32 3.78 1.58 1.55 3.96 0.85 4.78 3.74 3.25 0.99

esprimendolo in entrambe le forme usuali: $a \pm b$, e anche $[u, v]$.

Svolgimento.
La media degli $n = 10$ dati é 2.316.
Consideriamo la classica formula dell'intervallo di fiducia al 95% ovvero 5%

$$\mu = \bar{X}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

per la quale ora troviamo $2.316 \pm 1.96 \frac{\sqrt{3.2}}{\sqrt{10}}$ e a conti fatti

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.316 \pm 1.109 \quad (\alpha = 0.05) \\ \\ \mu \in \left[1.207, 3.425\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

ovvero, con sole 3 cifre significative come nei dati originali,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.32 \pm 1.11 \quad (\alpha = 0.05) \\ \\ \mu \in \left[1.21, 3.42\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

(Si potrebbe obiettare che un corretto arrotondamento a 3 cifre significative di 3.425 é 3.43 e non 3.42; questo é vero ma il 3.425 era giá esso stesso un arrotondamento, di 3.4247..., e arrotondando a 3 cifre significative quest'ultimo, che é il vero valore, si ottiene appunto 3.42).
(I valori erano stati ottenuti simulando $N(2.4, 3.2)$).

ES.ERCIZIO$_{\mu 2019}$

≈ Di 200 soggetti si è misurato un parametro fisiologico producendo un campione che si ritiene gaussiano, e con un foglio di calcolo si è trovato

$$\frac{1}{200}\sum_{k=1}^{200} X_k = 83.21 \qquad \frac{1}{199}\sum_{k=1}^{200}(X_k - \bar{X}_{200})^2 = 1\,405.38$$

Con la grossolana *formula pratica*, di largo uso nelle Scienze Applicate,

$$C.I._{95}: \ \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

trovare il consueto intervallo di fiducia della media, nella forma $C.I._{95}: [a,b]$.

SVOLGIMENTO

(Il termine $\pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ ha un errore circa del 2% per $n = 60$ e circa dell'1% per $n = 120$, rispetto al più corretto $\pm\frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{0.975}(n-1)$, coi quantili di Student, e poi tende a 0; ma tutto ciò non serve per rispondere al quesito).

Ci sono dati

$$\bar{X}_{200} = 83.21 \qquad S^2_{200} = 1\,405.38$$

da cui con la *formula pratica* riportata

$$C.I._{95}: \ 83.21 \pm 1.96\,\frac{\sqrt{1\,405.38}}{\sqrt{200}} \approx$$

$$\approx 83.21 \pm 1.96\,\frac{37.4884}{14.1421} \approx$$

$$\approx 83.21 \pm 1.96 \cdot 2.651 =$$

$$= 83.21 \pm 5.1956$$

e infine nella forma richiesta

$$\boxed{C.I._{95}: \ [78.0, 88.4]}$$

ESERCIZIO. (Salvo la contestualizzazione è tratto dal libro di Paolo Baldi citato).
$\star$ Per il campione gaussiano di varianza 3.61 (che potrebbe essere costituito per esempio dai pesi in grammi di animali da laboratorio di una certa fissata età o di semi o frutti di interesse fitoterapico, se per essi è supposta nota la varianza in base a ricerche precedenti)

7.63 12.22 8.74 7.95 13.43 8.15 9.22 8.14 7.04 9.56

si determini l'intervallo di fiducia consueto (bilatero, centrato) con $\alpha = 0.05$, nella forma $[a, b]$.

SVOLGIMENTO

Essendo nota e perfino dichiarata la varianza, è da intendersi che l'*intervallo di fiducia consueto (bilatero, centrato)* sia l'intervallo di fiducia consueto (bilatero, centrato) per la media.
Ricordando la sua formula

$$\bar{X}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (\alpha = 0.05)$$

ora con $n = 10$ e $\sigma^2 = 3.61$ e allora $\sigma = 1.9$ si ha

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{1.9}{\sqrt{10}} \approx 1.178$$

e la media

$$\bar{X}_{10} = \frac{1}{10}(x_1 + ... + x_{10}) = 9.208$$

e in definitiva si trova l'intervallo di fiducia 9.208 ± 1.178 ($\alpha = 0.05$) o piuttosto, senza decimali qua veramente poco significativi, 9.21 ± 1.18, e qualcuno direbbe perfino 9.2 ± 1.2, che scritto nella forma $[a, b]$ richiesta è infine

$$\boxed{[8.03, 10.39] \qquad (\alpha = 0.05)}$$

e in effetti anche validamente

$$\boxed{[8, 10.4] \qquad (\alpha = 0.05)}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (72), (73), (74), (76), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
In particolare, con le (75), (77), bisognerebbe saper operare se vengono fornite.

55 Intervalli di fiducia per la varianza

Per σ^2 con μ non nota, (un) intervallo di fiducia bilatero al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è "piccolo", come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, "grande"):

$$\Big[\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\,S_n^2\,,\ \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\,S_n^2\Big]. \quad {\scriptstyle (Non\, centrato\, in\, S_n^2).} \tag{78}$$

Come sopra, un intervallo unilatero:

$$\Big[0\,,\ \frac{n-1}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\,S_n^2\Big]. \tag{79}$$

Nota 1. Le 2 formule soprastanti valgono per campioni gaussiani e (approssimatamente) anche per campioni non gaussiani se la numerosità è $n \geq 30$ e la densità non è "troppo" asimmetrica.

Nota 2. I quantili del chi quadrato, oltre a venire calcolati (approssimatamente) da molti software, si trovano (approssimati) per alcuni tipici valori di α e piccoli valori di n su apposite tavole numeriche, e poi vale (teorema) l'approssimazione

$$\forall\, n \geq 30 \qquad \chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}\Big(\phi_\alpha + \sqrt{2\,n-1}\Big)^2. \tag{80}$$

Nota 3. Si possono considerare anche intervalli di fiducia per altri parametri e altri tipi di variabili aleatorie, per esempio↑ per p di $B(1,p)$.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria la formula (78), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
In particolare, con le (79), (80) bisognerebbe saper operare se vengono fornite.

XII—— Test statistici

56 I Test Statistici

Dalle determinazioni $x_1,\ldots,x_n$ di un campione aleatorio $X_1,\ldots,X_n$ tratto da una v.a. X di densità nota salvo un suo parametro a, vogliamo rispondere con "sì" o "no" , con "ragionevole certezza statistica" ovviamente, a una domanda sul parametro incognito.

La domanda potrebbe essere per esempio $\mu > 0$, oppure $p = \frac{1}{2}$, che nella realtà sensibile può significare per esempio la regolarità di una moneta, modellizzata con una v.a. $B(1,p)$.

In Farmacia: la glicemia è diminuita? (Cioè, così tanto da far ragionevolmente ipotizzare un effetto causale piuttosto che casuale).

Il test statistico si preordina – prima di avere i dati in mano ovvero prima di fare un esperimento nella realtà sensibile – formulando un'ipotesi statistica, indicata con H o H_0, *ipotesi nulla*, e una ipotesi *alternativa*, indicata con A o rispettivamente H_1, per esempio

$$H : p = \frac{1}{2} \qquad A : p \neq \frac{1}{2}\,.$$

Anticipiamo che l'ipotesi nulla H va identificata in generale col caso che si spera che non sia. ("Vogliamo A!").

Un esempio minimo potrebbe essere così: lanceremo 5 volte la moneta e rifiuteremo l'ipotesi di regolarità se viene testa 0 o 5 volte, perchè se la moneta è regolare quei risultati hanno complessivamente probabilità 1/16, un po' pochino.
In realtà la statistica usuale viene fatta "a 1/20", cioè al 5 ovvero 95%; ma largheggiando possiamo fare Statistica "al 90%" e allora respingeremmo l'ipotesi della regolarità con 0 o 5 teste su 5 lanci.

L'insieme $\{0,5\}$ è la *regione critica* ovvero di rigetto dell'ipotesi (nulla). La regione critica di solito viene espressa come un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ in cui una certa funzione del campione aleatorio

può cadere (e allora rifiutiamo H) o non cadere (rifiutiamo H). In questi termini, potremmo porre la regione critica $\{0, 5\}$ e verificare se vi cade $X_1 + ... + X_5$ o più usualmente porre $D := \{0, 1\}$ e verificare se vi cade $\bar{X}_5$. In casi più significativi di questo microscopico esempio la regione critica di solito ha una forma del tipo $x > x_0$ (test unilatero) oppure $x < x_1 \vee x > x_2$ (test bilatero).
Vediamo un altro esempio. Sia I la variabile aleatoria che è la glicemia (iniziale) di un soggetto qualunque di un campione di 20 soggetti (persone iperglicemiche) e F la glicemia (finale) dopo la somministrazione di un certo farmaco. Ci potrebbe interessare se mediamente la glicemia diminuisce con quel farmaco cioè se la media (parametro incognito) della variabile aleatoria $X := I - F$ è > 0. (Iniziale grande, finale piccola).
Si formula l'ipotesi nulla: il farmaco non riduce la glicemia:

$$H : \mu \leq 0 \qquad \text{(finale grande come o più dell'iniziale)}$$

essendo μ la media di X.
In realtà spero che riduca la glicemia: ipotesi alternativa:

$$A : \mu > 0 \qquad \text{(finale più piccola dell'iniziale)}$$

Misuriamo la glicemia nei 20 soggetti (campione, o più precisamente determinazione $i_1, \ldots, i_{20}$ di un campione aleatorio $I_1, \ldots, I_{20}$). Diamo ai 20 soggetti il farmaco. Misuriamo di nuovo la glicemia dei 20 soggetti ottenendo così 20 determinazioni $f_1, \ldots, f_{20}$ della variabile aleatoria F. Facciamo 20 sottrazioni ottenendo 20 determinazioni $x_1, \ldots, x_{20}$ della variabile aleatoria X, differenza *prima-dopo* ovvero iniziale-finale. Della variabile aleatoria X vogliamo sapere se la media (speranza matematica) è > 0, come speriamo, oppure no.

L'idea ingenua è fare la media aritmetica dei 20 numeri e concludere che se è > 0 il farmaco ha diminuito la glicemia.
Se fosse così in questo e analoghi casi, la statistica inferenziale non servirebbe, ma non è così: quella verifica non dice di per sè

sostanzialmente nulla perchè non distingue l'effetto del farmaco dalle inevitabili fluttuazioni casuali di X, che, non per niente, è da considerarsi una variabile *aleatoria*. (Non possiamo certo aspettarci un effetto *deterministico* del farmaco, che *sempre* riduca la glicemia).
È invece necessario applicare un opportuno test statistico, cioè di fatto applicheremo una <u>non banale</u> formula che ci potrà dire, nel caso che la media aritmetica degli x_i sia > 0, che quell'effetto con ragionevole plausibilità non è casuale. Se invece la media aritmetica viene negatitiva l'esperimento è andato male e la statistica non ci aiuta ulteriormente. Alla fine rifiutiamo o non rifiutiamo l'ipotesi nulla. Speriamo di rifiutarla.
Alcuni dicono "accettare" l'ipotesi nulla ma il modo corretto di vedere le cose è "non rifiutarla". Non abbiamo dimostrato che è vera: semplicemente non siamo riusciti a dimostrarla *verosimilmente falsa*.

Media degli X_i, differenza prima-dopo

Statistica ingenua:

La glicemia mediamente non è diminuita; il farmaco non funziona	La glicemia è diminuita; il farmaco funziona

0

Statistica inferenziale:

Non rifiutiamo l'ipotesi che la glicemia sia uguale o aumentata ovvero $\mu \leq 0$	Rifiutiamo l'ipotesi che la glicemia sia uguale o aumentata ovvero $\mu \leq 0$

0	*soglia*	È plausibile che il farmaco funzioni.

Insomma X deve essere mediamente ben > 0, non solo > 0, per escludere con ragionevole verosimiglianza la fluttuazione casuale.

Quanto > 0, lo dicono apposite formule che vedremo, che fanno uso dei quantili, di Student in questo caso.

I quantili si trovano e soprattutto si trovavano su tavole numeriche, che permettevano di ottenere la "ragionevolezza al 95%" o ancor meglio al 99%, e anche con altri *livelli di confidenza* tipici. Diciamo subito che nella pratica si trova scritto indifferentemente "al 99%" o "all'1%" con lo stesso significato, e similmente con 95 e 5, eccetera: purtroppo c'è un'ambiguità terminologica.
Da adesso in questo paragrafo facciamo rifermento al valore "piccolo": non 0.95 ma 0.05, non 0.99 ma 0.01, eccetera.
Oggi quei quantili vengono calcolati da numerosi software. L'uso di questi software ha permesso nei tempi moderni un passo ulteriore: trovare proprio la soglia discriminante, l'ultimo valore per il quale si passa dal non rifiutare al rifiutare l'ipotesi nulla, e questo valore soglia può ben essere diverso da 0.05 o 0.01, per esempio può essere 0.046, ed è il p-value.
Questo 0.046 è proprio il p-value dei 10 000 lanci di moneta con 5 100 teste prima considerato, come si potrebbe calcolare col computer: rifiutiamo l'ipotesi (nulla) di regolarità (per poco). Ma al livello dell'1%, detto del 99% da altri Autori, non possiamo rifiutarla. (Stiamo cercando di fare un'affermazione troppo categorica ma l'esperimento non ce lo consente; ce lo consentirebbe se fossero venute molte più teste.).

L'ideale è trovare un p-value piccolissimo, magari $< 10^{-6}$, ma almeno ≤ 0.05.

Definizione. Formalmente il p-value è definito come la probabilità di ottenere un valore uguale o più estremo di quello ottenuto, nell'ipotesi che sia vera l'*ipotesi nulla*.

In casi semplici il p-value può essere calcolato a mano, per esempio con i 5 lanci di moneta prima considerati, per rifiutare l'ipotesi (nulla) della regolarità, il risultato T,T,T,T,T ha p-value 1/16 = 0.0625 e l'ipotesi non viene rifiutata al livello del 5% ovvero 0.05 ovvero del 95% ovvero 0.95. Il valore $\frac{1}{16}$ viene da

$$= P(T,T,T,T,T \vee C,C,C,C,C) =$$

$$= P(T,T,T,T,T) + P(C,C,C,C,C) =$$

probabilità di 5 successi o 0 successi, casi ugualmente estremi, e di più estremi di quanto ottenuto non ce n'è, con $B(5, \frac{1}{2})$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}\,.$$

57 Errori di I e II Specie

Come detto, prima di eseguire un test statistico dobbiamo formulare un'ipotesi nulla H e la complementare ipotesi alternativa A. Per esempio

$$H: \quad \mu \leq 0$$
$$A: \quad \mu > 0$$

dove μ potrebbe essere la media di una variabile aleatoria X di cui disporremo di un campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$. I ruoli delle 2 ipotesi non sono interscambiabili: in linea generale come ipotesi alternativa va fissata quella che speriamo vera (e come ipotesi nulla quella che ci avrebbe fatto perdere tempo).
Tratto ovvero prodotto ovvero rilevato il campione x_1,...,x_n, ne calcoliamo l'opportuna funzione che la statistica ci insegnerà a seconda del tipo di test, sia essa ora $g(x_1, .., x_n)$, per esempio la media $\bar{x}_n$, ci sono 4 casi relativamente alla regione critica D, a $g(x_1, .., x_n)$, e alla verità dell'ipotesi H:

1) $g(x_1, .., x_n) \in D$ ed è vera H:
male respingo ipotesi vera: errore di prima specie.
2) $g(x_1, .., x_n) \in D$ ed è vera A:
bene respingo ipotesi falsa: è il caso sperato. (α)
3) $g(x_1, .., x_n) \notin D$ ed è vera H:
non respingo ipotesi vera: ho perso tempo.
4) $g(x_1, .., x_n) \notin D$ ed è vera A:
male non respingo ipotesi falsa: errore di seconda specie.

L'errore di prima specie è considerato molto più grave.
Ad esempio per un farmaco si può mettere l'ipotesi che non curi, sperando di falsificarla con l'esperimento.
La cosa peggiore è diffondere a milioni di persone un farmaco che non cura, solo perchè in un *trial clinico* – necessariamente molto più limitato – ha dato buona prova di sè, causando appunto l'errore di prima specie – di fatto sempre possibile.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, in cui chiamano *null hypothesis H0* l'*ipotesi nulla* H_0, ma purtroppo *hypothesis* quella che in questa trattazione è chiamata *alternativa*:

> Hypothesis: "A patient's symptoms improve after treatment A more rapidly than after a placebo treatment."
>
> Null hypothesis (H0): "A patient's symptoms after treatment A are indistinguishable from a placebo."
>
> A Type I error would falsely indicate that treatment A is more effective than the placebo, whereas a Type II error would be a failure to demonstrate that treatment A is more effective than placebo even though it actually is more effective.

Stabiliamo cosa intendiamo per "il farmaco funziona".
Per esempio
aumenta la sopravvivenza a 5 anni rispetto al placebo
riduce la massa tumorale
riduce la glicemia negli iperglicemici.

I 4 casi in dettaglio sono questi.

1) e 3) è vera l'ipotesi H: il farmaco è inutile o dannoso (esempio: sopravvivenza a 5 anni uguale o diminuita).
2) e 4) è vera l'alternativa A: il farmaco è utile (esempio: sopravvivenza a 5 anni aumentata).

1) e 2) La sperimentazione dà esito buono.

1) Per caso i soggetti trattati sono vissuti a lungo e il farmaco dannoso fa bella figura e magari si diffonde: GRAVISSIMO.

2) I soggetti trattati sono vissuti a lungo grazie al farmaco che giustamente fa bella figura

3) e 4) La sperimentazione dà esito cattivo.

3) non respingo l'ipotesi che il farmaco sia inutile o dannoso; il farmaco inutile o nocivo è stato correttamente riconosciuto tale sperabilmente non verrà commercializzato. Ho perso tempo, speravo fosse utile.

4) Per caso i soggetti trattati sono vissuti poco ma il farmaco in generale funziona: il farmaco utile viene purtroppo abbandonato. Peccato.

Gli errori di prima e seconda specie hanno un analogo molto suggestivo negli errori giudiziari. L'ipotesi nulla è l'innocenza:

	innocente	colpevole
condannato	errore di I specie	ottimo
assolto	bene (ma perso tempo)	errore di II specie

Sull'assoluzione del colpevole, errore meno grave della condanna di un innocente, vale il classico: IN DUBIO PRO REO.
(Ovviamente lo scopo dell'apparato giudiziario non è assolvere gli innocenti ma condannare i colpevoli: se facesse questo e non altro realizzerebbe il suo compito, per questo è scritto "perso tempo").

In Medicina e Farmacia, gli errori di I e II specie si presentano anche nella considerazione dei test diagnostici, **ma con una seria duplicità ovvero ambiguità.**

In ambito medico alcuni considerano

ipotesi nulla: la malattia è presente

altri

ipotesi nulla: malattia non presente.

Con riferimento al secondo modo di impostare la questione, si ha allora questo schema:

	sano	malato
positivo	falso positivo: errore di I specie *male respingo ipotesi vera*	vero positivo: ottimo: trovato!
negativo	vero negativo bene ma perso tempo	falso negativo: errore di II specie (condizione non rilevata)

In quest'ottica, il peggio sarebbe curare un sano, il falso positivo a un test diagnostico, a rischio di danneggiarlo: era già sano! PRIMUM NON NOCERE.

Nell'altra ottica il peggio, l'errore di I specie, sarebbe il falso negativo, in pratica non avvertire della malattia il malato.

Attenzione a quest'ambiguità.

Nota sul parametro medico su cui si fa il test. Per un chemioterapico si può ipotizzare di testare la sopravvivenza a 5 anni (confrontando farmaco e placebo); oppure la riduzione della massa tumorale in un breve tempo; se poi in un tempo doppio il paziente muore, questo non rientra nella statistica. È ovvio che la sopravvivenza a 5 anni richiede una sperimentazione lunghissima,

e costosa.
Ma per quanto di altissimo valore, anche quel solo parametro è poco, nella complessità della realtà: non si è tenuto conto della qualità della vita in seguito alla somministrazione del farmaco.

Tutt'altra questione: non si è tenuto conto neppure del costo economico: gli stessi soldi il Sistema Sanitario potrebbe spenderli con maggiore beneficio complessivo per la cura di altre malattia. (Resource Management, e in caso di sanità privata anche ROI, Return On Investment).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H e alternativa A, ad un certo livello α, la regione critica sia $[20.18, +\infty[$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 19.2, e che sia vera A. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non è possibile rispondere perchè non è specificato il quantile

SVOLGIMENTO
Lo stimatore T vale 19.2 che $\notin$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) è falsa (perchè è vera l'alternativa). Allora "male non respingo ipotesi falsa", cioè

$$\boxed{\text{Si commette un errore di seconda specie}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H, e alternativa A vera, al livello $\alpha = 0.1$, la regione critica sia $T > 734.66$ e il calcolo dello stimatore del test dia $T = g(x_1, ..., x_n) = 786.45$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non ha senso perchè α deve essere ≤ 0.05 ossia 5%.

SVOLGIMENTO
Lo stimatore cade nella regione critica, perchè $786.45 > 734.66$, e allora l'ipotesi viene respinta, ed essa è falsa perchè l'alternativa è vera. Siamo nel caso *"bene respingo ipotesi falsa"* che, come è ben noto, per i test statistici

$\boxed{\text{Era il caso in generale sperato}}$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria la formula (α) oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

58 Alcuni Test di Student

In questa Lezione α è un numero positivo e minore di 1 ma "grande", diciamo $> 0.5 = 50\%$, tipicamente $0.95 = 95\%$ (oppure $0.99 = 99\%$).

Diremo i test
al livello di significatività $1 - \alpha$,
al livello di confidenza α
e altri diranno, e anche noi talvolta, semplicemente,
al livello α
al livello $1 - \alpha$, per esempio 5%, da cui traiamo $\alpha = 0.95$.
Stando attenti a non confondere α e il suo complemento: α è grande in questa Lezione, $1 - \alpha$ piccolo; entrambi fra 0 e 1.

58.1 Test di Student per la media $\leq$ e $=$

Supponiamo di avere dei numeri – per esempio parametri fisiologici, naturali o conseguenti ad una terapia – e di chiederci se la loro media è maggiore di 1492, per esempio.
A questo la Statistica antica, in pratica la Statistica Descrittiva, risponde molto semplicemente: si fa la media aritmetica e si risponde "sì" se è > 1492.
Invece la Statistica moderna, in pratica la Statistica Inferenziale, accetta che la media sia > 98 in maniera statisticamente significativa, o per meglio dire respinge l'ipotesi che sia ≤ 1492, solo se la media aritmetica è ben più grande di 1492.

Quanto più grande? Fissato il livello di confidenza
– basterà poco se la numerosità n è grande.
– ci vorrà molto se la variabilità S^2 è grande.

Il tutto è risolto da una formula. Essa combina n e S^2 e α coi quantili di Student. E risponde *sì* o *no* in termini di *vero* o *falso*.

Teorema. Sia $X_1,...,X_n$ un campione gaussiano cioè $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ sono indipendenti (o anche non gaussiano se n è sufficientemente grande), sia μ_0 è un numero reale. Allora (coi soliti stimatori $\bar{X}_n$ e S_n^2 di media e varianza) si hanno questi 2 test al livello α (e altri dicono al livello $1-\alpha$; in ogni caso α è "grande", tipicamente 0.95 o addirittura 0.99):

$$\begin{cases} H : \mu \le \mu_0 \\ A : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \textit{rifiuta } H \textit{ se } \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} > t_\alpha(n-1) \tag{81}$$

$$\begin{cases} H : \mu = \mu_0 \\ A : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \textit{rifiuta } H \textit{ se } \left|\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}\right| > t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1) \tag{82}$$

Gli autori che usano $1-\alpha$ per α hanno formule diverse. Quanto grande n, nel caso non gaussiano cioè normale? Secondo diversi Autori $n > 30$ oppure $n > 120$. Se normale, va bene per qualunque n.

In pratica. Coi valori $x_1,..,x_n$ si calcola lo stimatore T che è

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \quad \text{o nel secondo caso il valore assoluto di questo}$$

e

se supera il quantile si respinge l'ipotesi (vero = sì = rifiuto H) altrimenti "non la si respinge" (falso = no = non rifiuto H).

Nota. Capiamo la prima formula.

– Supponiamo fissato il livello α.

Con n grande T tende a superare il quantile anche con piccola superiorità di $\bar{X}_n$ su μ_0.

Con S^2 grande T stenta a superare il quantile anche con grande superiorità di $\bar{X}_n$ su μ_0. (Dati inconsistenti, si contraddicono).

– Ma anche α partecipa, e infatti è nel quantile.

Più è piccolo α ovvero è grande il livello di confidenza $1-\alpha$ ricercato, più cresce il quantile ovvero la soglia da superare (col triplice contributo combinato di grande n, grande sopravanzare di $\bar{X}_n$ su μ_0, e/o piccolo S^2).

Esempio estremo per fissare le idee: $n = 2$.
Con $n = 2$, due soli dati, è $n - 1 = 1$ e ci serve $t_\alpha(1)$ da trovarsi con le tavole o i software o addirittura coi calcoli perchè $f(t;1)$ è la densità di Cauchy:

$$f(t;1) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t;1) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\arctan x - \frac{1}{\pi}\arctan(-\infty) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$$

e la sua inversa dà i quantili di student $t_\alpha(1)$ risolvendo

$$F(x) \overset{EQ}{=} \alpha \qquad > 0.5 \text{ (“grande”)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x = \alpha \quad \Big/ + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\arctan x = \alpha - \frac{1}{2} \quad \Big/ \cdot \pi$$

$$\arctan x = \pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

un'attenta analisi mostrerebbe che possiamo applicare la tangente

$$\Big/ \tan \qquad \text{(che “mangia” l'arcotangente)}$$

$$x = \tan\left(\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right)$$

che è il quantile di Student cercato,

$$t_\alpha(1) = \tan\left(\pi\left(\alpha - 0.5\right)\right) \qquad \alpha > 0.5$$

e alcuni valori li avremo in forma esatta:
($t_{0.5}(1) = 0$, basta che $\bar{X}_n = \bar{X}_2 > \mu_0$, ma l'affermazione è irrilevante per troppo basso livello di confidenza, 50%)
$t_{\frac{2}{3}}(1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$
$t_{\frac{5}{6}}(1) = \sqrt{3} \approx 1.73$
($t_1(1) = +\infty$, cioè mai: livello di confidenza voluto troppo alto)
ottendendosi questa tavola dei quantili di Student

α	0.5	0.667	0.833	1
$t_\alpha(1)$	0	0.577	1.73	$+\infty$

che fanno capire chiaramente la situazione. Ma nessuno di quei 4 quantili è usato nella pratica. Più significativamente, con una calcolatrice che ci dia la tangente di

$\pi\,(0.95 - 0.5)$
$\pi\,(0.99 - 0.5)$
$\pi\,(0.995 - 0.5)$

otteniamo questa tavola dei quantili di Student

α	0.95	0.99	0.995
$t_\alpha(1)$	6.31375	31.8205	63.6567

La troviamo confermati nella tavola della Lezione (45). Indicati con "one tail", cioè test "a una coda", perchè indaghiamo sul $\leq$ e non $\neq$, che sarebbe a 2 code.
Dal sito del NIST in https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda3672.htm traiamo questa tavola dei quantili di Student

ν	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1.	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.313
2.	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3.	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4.	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5.	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6.	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7.	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.782
8.	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.499
9.	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.296

10.	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.143
11.	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.024
12.	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.929
13.	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14.	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15.	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16.	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17.	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18.	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19.	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20.	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21.	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22.	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23.	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24.	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25.	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26.	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27.	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28.	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29.	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30.	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31.	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32.	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33.	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34.	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35.	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36.	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37.	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38.	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39.	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40.	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
41.	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301
42.	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296
43.	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291
44.	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
45.	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
46.	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47.	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48.	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49.	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50.	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
51.	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258
52.	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255
53.	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251
54.	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248
55.	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
56.	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242
57.	1.297	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239
58.	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237
59.	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234
60.	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232

61.	1.296	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229
62.	1.295	1.670	1.999	2.388	2.657	3.227
63.	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225
64.	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223
65.	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220
66.	1.295	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218
67.	1.294	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216
68.	1.294	1.668	1.995	2.382	2.650	3.214
69.	1.294	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213
70.	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
71.	1.294	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209
72.	1.293	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207
73.	1.293	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206
74.	1.293	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204
75.	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643	3.202
76.	1.293	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201
77.	1.293	1.665	1.991	2.376	2.641	3.199
78.	1.292	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198
79.	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640	3.197
80.	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
81.	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194
82.	1.292	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193
83.	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191
84.	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190
85.	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189
86.	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.188
87.	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187
88.	1.291	1.662	1.987	2.369	2.633	3.185
89.	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184
90.	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
91.	1.291	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182
92.	1.291	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181
93.	1.291	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180
94.	1.291	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179
95.	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178
96.	1.290	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177
97.	1.290	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176
98.	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175
99.	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175
100.	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
$+\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Esempio. Dal classico Matematica e Statistica – Le basi per le Scienze della vita, di Marco Abate.

Il proprietario dell'azienda vinicola da te preferita teme che il tasso alcolico del suo vino quest'anno possa non *essere più pari al 12.5% indicato in etichetta e ti chiede d'investigare. Misurando il tasso alcolico di 6 bottiglie, ottiene i seguenti valori:*

$$11.5,\ 11,\ 12.5,\ 13.1,\ 12.7,\ 12.4\ .$$

Supponendo che il tasso alcolico nel vino segua una distribuzione normale, verifica o smentisci il timore del proprietario. L'ipotesi nulla è he il tasso alcolico medio del vino sia 12.5% Siccome abbiamo supposto una distribuzione normale, possiamo applicare il test T con $\nu = 6 - 1 = 5$ gradi di libertà. La media dei campioni è $M_6 = 12.2$ mentre la deviazione standard campionaria è $s_6 \simeq 0.79$. Quindi il valore del test è:

$$|T_5| = \frac{12.2 - 12.5}{0.79}\sqrt{6} \simeq 0.93.$$

(...) il valore di soglia al livello di affidabilità 0.1 (QUINDI PER NOI $\alpha = 0.9$) (...) è 2.015, ben più alto del valore che abbiamo ottenuto. Quindi i dati statistici da te raccolti non smentiscono l'ipotesi nulla e non confermano il timore del proprietario.

Si noti che noi abbiamo agito come un'autorità di controllo: vogliamo dimostrare che non è 12.5 e allora mettiamo come ipotesi alternativa proprio quella. Solo al 90% è stato fatto, poco.
Il valore 2.015 è il quantile $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1)$ cioè $t_{\frac{1+0.9}{2}}(6-1)$ cioè $t_{0.95}(5)$.

Esercizio. Del libro di Paolo Baldi già citato:

L'altezza media delle reclute alla visita di leva del 1970 era di 169 cm; 121 reclute vengono scelte a caso nel 1980. I valori di media varianza del campione sono:

$$\bar{X} = 171 \qquad \leftarrow \textit{intende } \bar{X}_n \textit{ con } n{:=}121$$

$$S^2 = 85 \qquad \leftarrow \textit{intende } S_n^2 \textit{ con } n{:=}121$$

Si può affermare che l'altezza media delle reclute è aumentata?

(Siccome si vuole dimostrare che l'altezza è aumentata si metta come ipotesi che non è aumentata, e siccome nulla è detto sul livello del test si usi la classica soglia del 5%).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (81) e (82), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

59 Test di Student per campioni indipendenti

Ecco un test di Student per le medie di 2 campioni indipendenti.
Teorema. Siano $X_1,...,X_n$ un campione aleatorio (gaussiano oppure con n sufficientemente grande) di media μ_X e varianza σ_X^2 sconosciute e $Y_1,..,Y_m$ un campione aleatorio (gaussiano oppure con m sufficientemente grande) di media μ_Y e varianza $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 =: \sigma^2$ (uguale a quella del primo campione e sconosciuta), con le X_i e le Y_i indipendenti fra loro. Siano

$$S_{tot}^2 := \frac{1}{n+m-2}\Big((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2\Big) \tag{83}$$

$$\Big[= \frac{1}{n+m-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_m)^2\Big)\Big]$$

$$T := \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_{tot}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\,. \tag{84}$$

Allora

(1) Si ha questo test (bilatero) al livello $1-\alpha$ (e altri dicono al livello α; in ogni caso α è "grande", tipicamente 0.95):

$$\begin{cases} H: \mu_X = \mu_Y \\ A: \mu_X \neq \mu_Y \end{cases} \qquad rifiuta\ H\ se\ |T| > t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n+m-2) \tag{85}$$

(2) (test unilatero) una diversa formula che non diamo, per

$$H: \mu_X > \mu_Y \qquad A: \mu_X \leq \mu_Y\,.$$

==

Se i 2 campioni hanno uguale numerosità la (84) si semplifica:

$$T := \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}}\sqrt{n}$$

(È un facile calcolo; comunque tale semplificazione non è obbligatoria, si può usare la (84) senza semplificarla).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (83), (84), (85), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

60 Il Test del χ^2, quello basico

60.1 La teoria del Test del χ^2, quello basico

Il primo test del chi quadrato, dei due che considereremo, lo chiameremo semplicemente *Test del chi quadrato*.
Si riferisce a una variabile aleatoria discreta, sia essa X, con un numero finito k di valori che possiamo identificare con k numeri interi, per esempio 0,1 oppure 1,...,6; per fissare le idee diciamo 1,...,k. Nel discorso che segue si possono immaginare, per fissare le idee, $n = 2000$ lanci di un dado. Se abbiamo n determinazioni x_1,...,x_n di X, ce ne sono n_1 che valgono 1, n_2 che valgono 2,..., n_k che valgono k. Sono le *"frequenze assolute (osservate ovvero empiriche)"*. (Dividendole per n si ottengono le *"frequenze relative (osservate ovvero empiriche)"* $\bar{p}_i := \frac{n_i}{n}$, che tendenzialmente dovrebbero assomigliare alle p_i, le probabilità *"teoriche"*, e con esse si ottiene la formula alternativa che daremo in parentesi).
Il test vuole respingere l'ipotesi che la densità di X sia data dai valori $(p_1, ..., p_k)$. Per esempio escludere la regolarità di un dado, cioè $H : (p_1, ..., p_6) = (\frac{1}{6}, ..., \frac{1}{6})$, $A : (p_1, ..., p_6) \neq (\frac{1}{6}, ..., \frac{1}{6})$. (Naturalmente gli indici potrebbero essere 0,...,$k-1$).
Fissato *prima* di vedere i dati (come sempre si deve fare in un test statistico serio) il livello di significatività α, tipicamente 0.05, il rifiuto si ha se

$$T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) \quad \left(\text{o: } n \sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{p}_i - p_i)^2}{p_i}\right) \tag{86}$$

purchè

$$n\,p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, ..., k. \tag{87}$$

Se con l'ultima classe si ha $n\,p_k < 5$, si associano le classi $k-1$ e k, e se col nuovo $\tilde{p}_{k-1} = p_{k-1} + p_k$ si ha $n\,\tilde{p}_{k-1} \geq 5$ si fa il test per la nuova v.a. a $k-1$ valori. Per esempio si considera un dado "a 5 valori": 1, 2, 3, 4, $5 \vee 6$, con frequenze assolute n_1, n_2, n_3, n_4, $n_5 + n_6$, e nell'ipotesi p_1, p_2, p_3, p_4, $p_5 + p_6$. Similmente se la prima, o più raramente un'altra probabilità, è troppo piccola, $n\,p_m < 5$, si può provare ad associare 2 classi consecutive.

Purtroppo c'è confusione nelle notazioni delle tavole numeriche. Con il serio rischio di confondere nella pratica α con $1-\alpha$ usando le tavole. Soprattutto di confondere le colonne relative a 0.95 e 0.05. (E in similmente 0.9 con 0.1, e 0.99 con 0.01).
Il quantile q_α di parametro n di solito viene denotato $\chi^2_{1-\alpha}(n)$. In una tavola numerica, si cerchi il valore ≈ 3.84, quantile di ordine $\alpha = 0.95$ relativo al parametro $n = 1$ (in certe tavole denotato r, ν...), **prima riga della tavola**, cioè fissiamo l'attenzione su $X \sim \chi^2(1)$:

– se *Link*1 *Link*2 3.84 è il primo valore della colonna 0.95, intendete

$P(X \leq 3.84) \approx 0.95$ che è l'α di questa trattazione: $q_\alpha = \chi^2_{1-\alpha}(n)$

$$P(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

$$\text{per esempio } q_{0.95} = \chi^2_{0.05}(n)$$

(ma si noti che nella notazione con la q non è specificata la dipendenza da n)

$$\text{e in particolare per } n = 1 \quad q_{0.95} = \chi^2_{0.05}(1) \approx 3.84$$

– se *Link*3 3.84 è il primo valore della colonna 0.05, intendete

$P(X \geq 3.84) \approx 0.05$ (del tutto equivalente a quella sopra) e bisogna calcolare 1− per avere l'α **"grande"** di questa trattazione. E conseguentemente si intendano tutti i valori della tavola.

Simili problematiche e soluzioni coi vari software.

Ecco alcuni valori:

su alcune tavole →	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01
su altre tavole →	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
n				$\chi^2_{0.05}(1)$ ↓	
1	0.004	0.02	2.71	**3.84**	6.63
2	0.10	0.21	4.61	5.99	9.21
3	0.35	0.58	6.25	7.81	11.34
4	0.71	1.06	7.78	9.49	13.28
5	1.14	1.61	9.24	11.07	15.09
6	1.63	2.20	10.64	12.59	16.81
7	2.17	2.83	12.02	14.07	18.48
8	2.73	3.49	13.36	15.51	20.09
9	3.32	4.17	14.68	16.92	21.67
10	3.94	4.87	15.99	18.31	23.21
				↑ $\chi^2_{0.05}(10)$	

Ripetiamo che per noi 3.84 è ≈ $\chi^2_{0.05}(1)$.

ESERCIZIO$_\mu$ Si fa un sondaggio su questo quesito: “Quanto costa il regalo che vorreste a Natale, in euro, approssimato all’intero?”
Si ottiene questo dataset X:

250 700 200 30 69 400
30 50 29 120 110 100
800 9000 90 60 600
500 200 52 500 100
1129 150 0 200 679 20 50
500 3000 198 28 795
124 200 80 580 30 800
50 49 1500 100 1100 3500
180 0 5 0 50 50 900

(a) Eliminati gli outlier nulli, produrre il corrispondente dataset Y ottenuto con la sola cifra iniziale di ogni dato di X, e fare il corrispondente istogramma a barre con le frequenze relative percentuali a destra di ogni barra (orizzontale).
(b) Testare l’ipotesi che la cifra iniziale sua distribuita uniformemente (come molti pensano dovrebbe essere e invece in generale non succede).

SVOLGIMENTO

(a) Dataset Y delle cifre iniziali:

2 7 2 3 6 4
3 5 2 1 1 1
8 9 9 6 6
5 2 5 5 1
1 1 2 6 2 5
5 3 1 2 7
1 2 8 5 3 8
5 4 1 1 1 3
1 5 5 5 9

Rango del dataset: $n = 50$.
Frequenze assolute, e frequenze relative:
numero di 1, $n_1 = 12$, $f_1 = 12/50 = 0.24$
numero di 2, $n_2 = 8$, $f_2 = 8/50 = 0.16$
numero di 3, $n_3 = 5$, $f_3 = 5/50 = 0.1$
numero di 4, $n_4 = 2$, $f_4 = 2/50 = 0.04$
numero di 5, $n_5 = 11$, $f_5 = 11/50 = 0.22$
numero di 6, $n_6 = 4$, $f_6 = 4/50 = 0.08$
numero di 7, $n_7 = 2$, $f_7 = 2/50 = 0.04$
numero di 8, $n_8 = 3$, $f_8 = 3/50 = 0.06$
numero di 9, $n_9 = 3$, $f_9 = 3/50 = 0.06$

Istogramma a barre con le frequenze relative in percentuale:

```
1 |000000000000 24%
2 |00000000 16%
3 |00000 10%
4 |00 4%
5 |00000000000 22%
6 |0000 8%
7 |00 4%
8 |000 6%
9 |000 6%
```

(Che non pare molto uniforme).

(b) Test per l'uniformità di

valori	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequenze assolute	12	8	5	2	11	4	2	3	3

$$H : (p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6\, p_7\, p_8\, p_9\,) = \left(\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\right)$$

$$A : (p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6\, p_7\, p_8\, p_9\,) \neq \left(\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\right)$$

Dobbiamo verificare se

$$n\,p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, \ldots, k \text{ } et \text{ } T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

Con $n = 50$ è $n\,p_i = 50 \cdot \frac{1}{9} > 5$ per $i = 1, \ldots, 9$. (La condizione è verificata).
Quantile, essendo $k = 9$ e fissando ragionevolmente $\alpha = 0.95$:

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.05}(8) \approx 15.51$$

Statistica T_n:

$$T_{50} := \sum_{i=1}^{9} \frac{(n_i - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{(12 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(8 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(5 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(2 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} +$$

$$+ \frac{(11 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(4 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(2 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(3 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(3 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{532}{25} = 21.28 > 15.51$$

e superandosi il quantile

si rifiuta al livello 95% l'ipotesi dell'uniforme distribuzione

(Si noti che si riesce a respingerla anche al livello 99% ovvero 1% perchè si supera anche il quantile $\chi^2_{0.01}(8) \approx 20.09$. Il p-value, il valore discriminante fra rifiuto e non rifiuto, verosimilmente non è lontano, ma è comunque $p < 0.01$, un buon risultato).
(È addirittura possibile che in questo genere di dataset segua la *distribuzione di Benford*

$$\begin{pmatrix} \lg 2 & \lg \frac{3}{2} & \lg \frac{4}{3} & \lg \frac{5}{4} & \lg \frac{6}{5} & \lg \frac{7}{6} & \lg \frac{8}{7} & \lg \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

ma come sappiamo $\lg 9 \approx 0.95$ e $\lg 8 \approx 0.9$ e allora $\lg \frac{9}{8} = \lg 9 - \lg 8 \approx 0.05$ e con questa p_9 non è verificata la condizione $n\,p_i > 5$ con $n = 50$: troppo pochi dati, non si può eseguire il test, e nemmeno riunendo le ultime 2 classi. Una caratteristica della distribuzione di Benford è che la probabilità complessiva delle 3 cifre 1, 2 e 3 è maggiore della probabilità complessiva di tutte le altre 6 messe insieme, e nel nostro dataset avviene che 25 numeri su 50 iniziano per

1, 2 o 3. Un numero “qualunque”, ma non iniziante per 0, proveniente dalla realtà sensibile – per quanto ciò possa significare – è più probabile che inizi per 1, 2 o 3 piuttosto che con 4, 5, 6, 7, 8 o 9, contrariamente a quello che si potrebbe pensare.)

60.2 Esempio di applicazione del Test del χ^2

Si lancia una moneta 3 volte, e questo lo si fa per 100 volte, ottenendo

0 teste 31 volte
1 testa 36 volte
2 teste 32 volte
3 teste 1 volta.

Eventualmente associando opportunamente due classi verificare l'ipotesi che la moneta dia testa con probabilità $\frac{1}{3}$. [...]
Esercizio. Nelle stesse ipotesi dell'esempio visto si verifichi l'ipotesi della regolarità della moneta.

• • •

Esempio di Wikipedia tratto dal già citato libro di P. Baldi. Con 2000 lanci di un dado con frequenze assolute osservate 388, 322, 314, 316, 344, 316, si rifiuta, al livello del 5%, ovvero del 95%, la regolarità perchè

$$T \approx 12.6 > 11.07 \approx \chi^2_{0.05}(5).$$

(Naturalmente T è T_{2000}).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (86) e (87), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

61 Test del χ^2 di indipendenza

In questa trattazione elementare, verrà considerato solo il caso più semplice, con 4 valori/dati. Fissiamo subito le idee su un esempio. Supponiamo di avere 280 monete uguali di sconosciuta probabilità di dare testa, e che a 50 di esse venga fatta meccanicamente una piccola incisione al centro sulla faccia della testa. Le monete trattate hanno tutte un'uguale sconosciuta nuova probabilità di dare testa. (Di maggiore interesse potrebbe essere il trattamento con un farmaco, e l'eventuale morte a 5 anni, ma le monete e i dadi restano modelli generali ottimali, anche perchè da essi *a priori ci aspettiamo* di default un comportamento casuale, mentre per un farmaco saremmo portati a supporre causalità – contenendo la tal molecola *dovrebbe* fare un certo effetto – eventualmente inesistenti: nella *statistica medica* dobbiamo appunto <u>verificare</u> <u>se</u> <u>funziona</u>, *contando i morti*, per così dire). Lanciamo una volta ciascuno delle 280 monete e contiamo le teste nelle 2 classi. Supponiamo di avere questa situazione (risultato=viene 1)

	non risultato	risultato
non trattati	188	42
trattati	43	7

Naturalmente $43+7$ sono le 50 monete trattate, e $188+42$ sono le rimanenti 230, non trattate. Il trattamento ha diminuito la probabilità di dare testa? Verrebbe da dire di sì perchè fra i trattati la frequenza relativa di 1 è $7/50 = 0.14$ mentre fra i non trattati è $42/230 = 0.183$ ma dobbiamo ragionevolmente escludere un effetto casuale: tale miglioramento potrebbe apparire per caso anche se a nostra insaputa il tecnico preposto non avesse affatto compiuto l'incisione dichiarata.

Abbiamo una variabile aleatoria X con 2 valori, "trattate" e "non trattate", e una variabile aleatoria Y con 2 valori, "testa" e "croce". Il test statistico è definito da

$$H : \text{indipendenza} \qquad A : \text{non indipendenza}$$

(vorremmo escludere l'indipendenza, cioè che l'incisione non abbia prodotto risultato).

Come in tutti gli altri test statistici che consideriamo, si fisserà un livello di confidenza α, tipicamente $0.95 = 95\%$, ovvero un livello di significatività $1 - \alpha$, tipicamente $0.05 = 5\%$.
(Si ritiene che per correttezza scientifica ovvero deontologica, questo valore vada fissato *prima* di fare i calcoli).

Si calcolerà uno *stimatore* (ovvero *statistica*) T, dalla formula alquanto complessa, e lo si confronterà col quantile $\chi^2_{1-\alpha}(k)$ del chi quadrato con

$$\boxed{k := (m-1)\cdot(n-1) = (\#righe - 1)\times(\#colonne - 1)} \qquad (88)$$

gradi di libertà, (qua 1) e se T supera il quantile

$$\boxed{T > \chi^2_{1-\alpha}(k)} \qquad (89)$$

si respinge l'ipotesi, altrimenti non la si respinge (che alcuni dicono "si accetta"), al livello di significatività $1 - \alpha$ ovvero di confidenza α.

In pratica per la tabella 2×2

	guariti	non guariti
farmaco 1	a	b
farmaco 2	c	d

il calcolo completo è questo, al livello 0.05:
rifiuto l'ipotesi nulla

$$H: \text{ il farmaco 1 equivale al farmaco 2}$$

(dal solo punto di vista delle guarigioni, ovvio, non del costo o della tossicità a lunga scadenza)
se

$$T := \frac{(a\,d - b\,c)^2\, n}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)} > 3.84$$

(Altri Autori usano una formula leggermente diversa con la *correzione di Yates*).
Coi valori

	guariti	non guariti
xmicina	52	10
streptomicina	40	21

in http://www.quadernodiepidemiologia.it/epi/assoc/chi_qua.htm trovano $T = 5.46 > 3.84$ e rifiutano l'ipotesi nulla al 5% anzi più precisamente dicono

consente di ritenere che la differenza fra i due gruppi sia significativa al livello di probabilità 5% ma non al livello di probabilità 1%.

L'intero calcolo può essere fatto online gratuitamente, anche per tabelle più grandi, oltrechè con vari software statistici usati nelle Scienze Applicate.

Varie condizioni sulla non eccessiva piccolezza dei 4 valori vengono fatte dai vari Autori, per garantire la bontà della comunque inevitabile approssimazione del test, e certamente se uno dei valori è 0 nessun software accetterà di fare il calcolo.

E certo, una terza colonna, con i *morti per tutte le cause*, sarebbe utilissima per confronto. Per esempio così:

	malattia	non malattia	morti per tutte le cause
vaccino	a	b	c
placebo	d	e	f

(Su trial clinici grandi e sufficientemente prolungati nel tempo, i morti ci saranno inevitabilmente, in entrambe le classi: come vago ordine di grandezza, si consideri che in un anno muore circa l'1% di un insieme di persone prese a caso in Stati sufficientemente sviluppati).
(Il placebo dovrà essere un vero placebo, non una soluzione di

idrossido di alluminio (vedi HPV), e il doppio cieco non potrà essere beffato con pillole... di diversi colori (vedi https://www.theguardian.com/business/2014/apr/10/tamiflu-saga-drug-trials-big-pha

Si può evitare l'approssimazione che è intrinseca nel test del chi quadrato d'indipendenza col *Test di Fischer esatto*, che ha una formula molto più complicata che viene comunque calcolata in un'istante dai computer, a meno che i numeri non siano esorbitanti.

Il test di Fischer esatto è migliore del test del chi quadrato, che tuttavia è in generale ancora preferito *per tradizione*.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

62 Note finali sulla Statistica

Leggiamo in un articolo scientifico riportato su PubMed:

> "there is a good chance that statistical significance will be reached only by increasing the number of hypotheses tested in the work. The question is then: is this significant difference real or did it occur by pure chance?
>
> Actually, it is well known that if 20 tests are performed on the same data set, at least one Type 1 error (α) is to be expected. Therefore, the number of hypotheses to be tested in a certain study needs to determined in advance. If multiple hypotheses are tested, correction for multiple testing should be applied or study should be declared as exploratory."

(Il numero 20 corrisponde alla probabilità 5% = 0.05 = $\frac{1}{20}$).

Link->

62.1 Falsificazioni deliberate

Richiamiamo quanto detto nella Parte III della Lezione 20, dove anche sono stati esposti i dettagli giuridici della questione.

Diciamolo a chiare lettere: inviare ad una rivista scientifica un articolo scientifico in cui si parla di esperimenti su 1,500 persone, o topi, mai esistiti, non è reato.

Nell'epidemia del 2020 ad un certo punto in Italia e altri Stati è stato (sostanzialmente) vietato l'uso dell'idrossiclorichina, che sembrava funzionare bene, e risalendo indietro nella catena di testi che hanno originato quel fatto c'è 1 singolo articolo scientifico, pubblicato su The Lancet, la più importante rivista scientifica medica del mondo. Esso stabiliva che quel farmaco non solo non serviva per l'epidemia in corso ma addirittura faceva male. Poi l'articolo è stato ritirato.

Citiamo l'agenzia di stampa Adnkronos, con un'enfasi aggiunta. https://www.adnkronos.com/fatti/cronaca/2020/06/05/coronavirus-lancet-ritira-studio-idrossiclorochina GUFscvcw3DK1PNS4RHoAfL.html (letto l'11 giugno 2020)

> Pubblicato il: 05/06/2020 09:03
>
> Le riviste scientifiche 'The Lancet' e 'New England Journal of Medicine' hanno ritirato due studi basati su dati forniti dall'azienda Usa Surgisphere, finita sotto i riflettori del 'Guardian' che ne ha messo in dubbio l'attendibilità. Uno dei due articoli, quello pubblicato da Lancet, lanciava l'allarme su gravi rischi associati all'uso del farmaco antimalarico idrossiclorochina contro il Covid-19.
>
> L'altro, quello apparso sul Nejm, riguardava l'impiego di comuni medicinali antipertensivi nei pazienti con infezione da coronavirus Sars-CoV-2. Entrambi i lavori sono stati ritrattati su richiesta degli autori. "Non siamo più in grado di garantire l'attendibilità delle fonti dei dati", hanno spiegato scusandosi con i lettori e ritirando le firme.
>
> La notizia è rimbalzata nella tarda serata di ieri sui media internazionali. I primi a ritirare le loro firme sono stati 3 autori sui 4 dello studio pubblicato su Lancet: tutti i coautori del paper (Mandeep Mehra del Brigham and Women's Hospital di Boston, Frank Ruschitzka dello University Hospital di Zurigo e Amit Patel della University of Utah), eccetto il fondatore e Ceo di Surgisphere, Sapan Desai, si sono 'sfilati' con una nota congiunta diffusa dalla rivista scientifica. "Siamo entrati in questa collaborazione – hanno precisato – per contribuire in buona fede alla lotta contro la pandemia, in un momento di grande necessità".
>
> Poco dopo è arrivata la ritrattazione del Nejm.

Da The Guardian in https://www.theguardian.com/world/2020/jun/03/covid-19-surgisphere-who-w (letto l'11 giugno 2020) apprendiamo che (enfasi aggiunta)

- A search of publicly available material suggests several of Surgisphere's employees have little or no data or scientific background. An employee listed as a science editor appears to be a science fiction author and fantasy artist whose professional profile suggests writing is her fulltime job. Another employee listed as a marketing executive is an adult model and events hostess, who also acts in videos for organisations.
- The company's LinkedIn page has fewer than 100 followers and last week listed just six employees. This was changed to three employees as of Wednesday.

Si veda anche https://www.ilfattoquotidiano.it/2020/06/04/coronavirus-the-lancet-avvia-uninc 5824478/

62.2 Il (doppio) cieco che ci vede benissimo

In https://www.ilfattoquotidiano.it/2014/04/12/farmaci-e-studi-clinici-lo-scandalo-t
949196/?fbclid=IwAR2lsD6W_GaRYkihu_rpL2DY6JyNyrWkW6IfNaaWxifAbJ01d6B6OGSHYMw
(letto il 28 febbraio 2020) troviamo:

> A proposito del ((nome di farmaco)), Goldacre ha rivelato i retroscena della vicenda in un articolo uscito sul Guardian il 10 aprile. Sintetizzo alcuni passaggi che vale la pena sapere.
>
> Un pediatra giapponese, Keiji Hayashi, lascia un commento sul sito online del gruppo Cochrane (14 mila medici e ricercatori indipendenti che difendono la trasparenza dei dati scientifici nel campo medico e farmaceutico) in cui spiega che la presunta utilità del ((nome di farmaco)) si basa su un riassunto di dieci studi clinici elaborato dalla stessa industria che lo produce, la ((casa farmaceutica)). Ma di questi dieci test, soltanto due sono disponibili nella letteratura scientifica. Degli altri otto le uniche informazioni che si hanno sul metodo usato sono riconducibili al riassunto fatto in casa. E questo non è abbastanza credibile.
>
> Cochrane chiede alla ((casa farmaceutica)) di inviargli i dati mancanti. ((casa farmaceutica)) accetta a patto che la Cochrane reviews, la rivista online del gruppo, firmi un accordo informale che la obblighi a non riferire niente ai lettori. I termini dell'accordo non sono discutibili. Tom Jefferson, il responsabile di pneumologia dell'organizzazione, chiede alla ((casa farmaceutica)) perchè c'è bisogno di sottoscrivere un contratto ma non riceve risposta.
>
> Nel 2009 ((casa farmaceutica)) invia sette documenti, di una dozzina di pagine ciascuno, con gli estratti dei dieci studi clinici precedentemente riassunti. Ma è ancora troppo poco: le richieste di Cochrane continuano a rimanere disattese.
>
> Cosa si evince intanto? Che il campione di cavie umane che hanno partecipato agli studi clinici non è abbastanza rappresentativo. E negli esperimenti in "doppio cieco" – quando nè il dottore nè il paziente dovrebbero sapere se si è assunto il placebo o il farmaco – **la pillola placebo e quella vera hanno colori diversi**.

(Enfasi aggiunta).

Non c'è da stupirsi che certa parte dell'opinione pubblica abbia sospetti su certi prodotti farmaceutici, con pillole per test in doppio **<u>cieco</u>** di colori diversi, e un'infinità di altre, diciamo così, problematiche, ben note in ampi settori di consumatori particolarmente attenti ed esigenti, che vogliono prodotti sicuri e garantiti da ricerche scientifiche e non da pubblicità.

Per riconquistare la fiducia del grande pubblico – necessaria per la salute generale della popolazione – sarebbe necessario un drastico repulisti.

Ma osta sicuramente la questione seguente.

62.3 Il conflitto di interessi

"Oste, è buono il vino?" "Buonissimo!"

In matematica 2+2 fa sempre 4, e il Teorema di Pitagora è *eternamente* vero.
Ma la Farmacia e la Medicina non sono Matematica, le certezze assolute quasi non esistono, in generale sono temporanee.
Comunque anche per cose di Medicina o Farmacia vere come 2+2 = 4, persone opportunamente pagate – anche oneste – magari senza negare quelle verità, possono insistentemente parlarvi (è il loro lavoro, ripetiamo, onesto) del fatto che 3+3 fa 6, o qualunque altra cosa. E altre persone – talvolta meno oneste – possono usare tutto l'armamentario di tecniche manipolative dei dati illustrate nel Capitolo 20 – quando non le pure e semplici *falsificazioni scientifiche* – e così orientare l'opinione pubblica e di conseguenza le politiche sanitarie e farmaceutiche degli Stati.

È il problema del **conflitto di interessi**, enorme in Farmacia.

Il mercato del farmaco mondiale è dell'ordine dei 12 zeri.

L'OMS propaganda prodotti farmaceutici di uno che la finanzia.(117)

117 Si veda per esempio questo servizio (2020) di Rai 3: LINK ->

> “much of the scientific literature, perhaps half, may simply be untrue. Afflicted by studies with small sample sizes, tiny effects, invalid exploratory analyses, and flagrant conflicts of interest, together with an obsession for pursuing fashionable trends of dubious importance, science has taken a turn towards darkness.”

(Richard Horton, Editore di The Lancet. https://www.thelancet.com/pdfs/journals/lancet/PIIS0140-6736%2815%2960696-1.pdf The Lancet è la più importante rivista di Medicina del mondo).

63 Matematica delle epidemie

work in progrss – in fieri – lavori in corso

Leggiamo sul prestigioso Nature.com in https://www.nature.com/articles/s42254-020-0188-2.pdf (letto il 13 giugno 2020)

> At first, epidemiologists can only estimate the parameters that concern the disease itself, such as how readily it is transmitted, and subsequently update the estimations. (...)
>
> But even if every model parameter were well-quantified, most predictions won't come true. (...)
>
> In other words, epidemiological modelling is messy. It attempts to squeeze as much useful information as possible from limited noisy data that describe the complex nonlinear system of an infectious disease interacting with human society. There are no controlled experiments. Thus, although the equations that describe a susceptible-infectious-recovered epidemiological model are simple to write down, forecasting how a disease will spread, even in the short term, is a difficult business.

Esempio. Vediamo un testo dei prestigiosi CDC relativo all'epidemia Covid-19 del 2020, https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/hcp/planning-scenarios-h.pdf (letto il 20 giugno 2020), tutto pieno di numeri che senz'altro danno al profano l'impressione di grande scientificità.

> CDC and the Office of the Assistant Secretary for Preparedness and Response (ASPR) have developed five COVID-19 Pandemic Planning Scenarios that are designed to help inform decisions by modelers and public health officials who utilize mathematical modeling. The planning scenarios are being used by mathemati-

> cal modelers throughout the Federal government. Models developed using the data provided in the planning scenarios can help evaluate the potential effects of different community mitigation strategies (e.g., social distancing). (...)

Quindi scenari utizzabili per decisioni politiche ("mitigation strategies") di impatto enorme sulle persone (lockdown).
Continuiamo a leggere:

	scenario 1	**scenario 2**	**scenario 3**

....

Infectiousness of asymptomatic individuals relative to symptomatic individuals Source: Assumption, ASPR and CDC	50%	100%	

L'enorme differenza fra le stime nei 2 diversi scenari mostra l'arbitrarietà dei parametri di base usati poi nelle famose precise equazioni – che saranno pure precise, ma con parametri di ingresso così diversi daranno risultati molto diversi. E d'altra parte, è ben detto che, nonostante testi di appoggio, sono semplicemente ipotesi (scrive "assumption").
Continuiamo a leggere:

Time to seek care (outpatient) Source: Survey of persons with Influenza like illness (ILI), CDC†	≤ 2 days: 35% 3 – 7 days: 50% ≥ 8 days: 25%

La somma delle percentuali è 110%. ☹
Come direbbe qualcuno scherzosamente, bene ma non benissimo.

E questi sono i CDC, considerati un riferimento mondiale.

63.1 Il tasso di letalità

Veniamo ora a un concetto fondamentale nella matematica delle malattie e quindi in particolare delle epidemie: il **tasso di letalità** di una malattia – talvolta riportato semplicemente come *letalità* della malattia.
Nella sostanza – ma si vedano le precisazioni successive – **è la probabilità di morire in caso di una certa malattia**

$$P(muore|ha\,malattia)$$

come leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Tasso di letalità* (letto il 20 giugno 2020):

> [indica] la probabilità di morire se si è afflitti da una specifica malattia

e ovviamente è necessario prefissare un intervallo di tempo.
Naturalmente questa probabilità è da intendere in senso frequentista, cioè in pratica, come leggiamo a quella stessa voce

> indica la proporzione, tipicamente percentuale, di decessi per una determinata malattia sul totale dei soggetti ammalati in un determinato arco temporale.

Per esempio, se muoiono 25 ogni 1000 malati, la letalità è 2.5%.
Ancora ci avverte quel testo

> Tale valore è estremamente variabile in relazione alla durata dell'osservazione, per questo va contestualizzato in rapporto a un intervallo di tempo. (...) Si usa in particolar modo per le malattie infettive acute, mentre il suo utilizzo nelle condizioni croniche è meno indicativo considerando l'ampiezza della finestra temporale

Nota. Senza voler qua fare Medicina, diamo però qualche indicazione sul fatto che

è un valore difficile da quantificare oggettivamente

perchè dipende da chi si definisce affetto dalla malattia e chi no.
Consideriamo ad esempio una malattia virale.
Prima di tutto sgombriamo il campo dall'ipotesi ingenua che si conteggino i *malati* in senso *clinico*, le persone che effettivamente *stanno male* per la malattia considerata.
Internazionalmente si considera *caso* ("case") chi "ha il virus", rivelato da uno specifico test, non chi "sta male". Spesso sta benissimo ("asintomatico").
E qua si capisce bene che non c'è un confine netto fra chi ha il virus e chi non ce l'ha, a meno che non vogliamo considerare contagiato un soggetto che ha in corpo

2 virus soli, o 4 virus soli, o 8 virus, o 16 virus...

che magari non finiranno neppure sul *tampone* con cui si farà il test. È evidente che se – per pura ipotesi – si facessero 2 test a 1 soggetto che ha pochi virus, potrà benissimo succedere che in uno risulti positivo e nell'altro negativo. Non c'è un confine netto fra il *caso* e il *non caso*. E questo è solo un aspetto – di gusto diciamo così *matematico* – della più ampia problematica dei *falsi positivi* e *falsi negativi*.
Concretamente, nel pieno dell'epidemia Covid-19 del 2020 circolavano valori della letalità in Italia in un range vastissimo, forse un po' centrato su 1-2%, ma esteso almeno da 0.8% a 13.7%, a seconda delle fonti – un rapporto 1:17 circa fra minimo e massimo.([118])

[118] https://www.primocanale.it/notizie/polemica-sui-numeri-del-coronavirus-bonsignore-non-ci-sono-
html letto il 20 giugno 2020

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

(Sul test del chi quadrato $n \times m$)

L'intero calcolo può essere fatto online gratuitamente, anche per tabelle più grandi, oltrechè con vari software statistici usati nelle Scienze Applicate.

Varie condizioni sulla non eccessiva piccolezza dei 4 valori vengono fatte dai vari Autori, per garantire la bontà della comunque inevitabile approssimazione del test, e certamente se uno dei valori è 0 nessun software accetterà di fare il calcolo.

E certo, una terza colonna, con i *morti per tutte le cause*, sarebbe utilissima per confronto. (Ma i calcoli per la nuova tabella 2×3 sarebbero più complicati). Per esempio così:

	malattia	non malattia	morti per tutte le cause
vaccino	a	b	c
placebo	d	e	f

(Su trial clinici grandi e sufficientemente prolungati nel tempo, i morti ci saranno inevitabilmente, in entrambe le classi: come vago ordine di grandezza, si consideri che in un anno muore circa l'1% di un insieme di persone prese a caso in Stati sufficientemente sviluppati.).
(Il placebo dovrà essere un vero placebo, non una soluzione di idrossido di alluminio (vedi HPV), e il doppio cieco non potrà essere beffato con pillole... di diversi colori (vedi https://www.theguardian.com/business/2014/apr/10/tamiflu-saga-drug-trials-big-pha

Si può evitare l'approssimazione che è intrinseca nel test del chi quadrato d'indipendenza col *Test di Fischer esatto*, che ha una formula molto più complicata che viene comunque calcolata in un'istante dai computer, a meno che i numeri non siano esorbitanti.

Il test di Fischer esatto è migliore del test del chi quadrato, che tuttavia è in generale ancora preferito *per tradizione*.

****

La parabola ci offre un semplice modello del concetto, più generale, di *curva a forma di J*. Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *J curve*:

> In medicine, the 'J curve' refers to a graph in which the x-axis measures either of two treatable symptoms (blood pressure or blood cholesterol level) while the y-axis measures the chance that a patient will develop cardiovascular disease (CVD). It is well known that high blood pressure or high cholesterol levels increase a patient's risk. What is less well known is that plots of large populations against CVD mortality often take the shape of a J curve which indicates that patients with very low blood pressure and/or low cholesterol levels are also at increased risk.

64 Indice Analitico con Approfondimenti

64.1 Alcuni valori di $P(|X| < x)$ per X normale standard

x	$P(\lvert X\rvert < x)$
1	≈ 0.68
1.28	≈ 0.8
1.64	≈ 0.9
1.96	≈ 0.95
2	≈ 0.9544
2.58	≈ 0.99
3	≈ 0.9973

(Si noti che questi non sono i valori di $P(X \le x)$) per X normale standard, cioè $\Phi(x)$).

64.2 Algebra astratta

Nell'algebra astratta si considerano operazioni generiche definite in insiemi generici, non identificando le operazioni come somma o prodotto per esempio, nè gli insiemi come $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ per esempio. Facendo quelle scelte di specifici insiemi e specifici insiemi, si ottiene l'*algebra dei numeri*; si veda qua<-- e qua<--. Nell'algebra astratta per esempio si possono considerare, fra le moltissime altre cose, l'operazione binaria (interna), l'elemento neutro, l'elemento assorbente, l'elemento simmetrico, la proprietà associativa, la proprietà commutativa, la proprietà commutativa. Concetti di livello superiore sono il monoide, il gruppo, l'anello, il corpo e il campo, lo spazio vettoriale.

64.3 Ambiguità notazionale del segno =

• Il segno = viene usato per indicare un'uguaglianza che sussiste fra 2 funzioni eventualmente per 1 o più valori di x, y... i quali vengono ricercati. Si ha cioè un'equazione, per esempio:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0.1 \qquad x^2 + 5x + 6 = 0 \qquad x\,y = 0\,.$$

• Il segno = viene usato per indicare un'uguaglianza fra valori di 2 funzioni che vale $\forall\, x, y...$ del loro dominio, per esempio

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x+y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2$$

cioè per un'identità (funzionale). In questo caso talvolta si usa il simbolo $\equiv$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1 \qquad (x+y)^2 \equiv x^2 + 2\,x\,y + y^2$$

• Il segno = viene usato per indicare una definizione: il termine a destra del segno di uguaglianza ha già senso nella trattazione finora svolta, e il termine a sinistra lo acquisisce in base all'espressione stessa, per esempio:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad x_{n+1} = 2\,x_n\,.$$

Talvolta in questo senso si scrive := invece di =

$$f(x) := x^2 + 1 \qquad \cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad x_{n+1} := 2\,x_n\,.$$

64.4 Ambiguità notazionale dell'esponente −1

Una delle pù gravi ambiguità notazionali è quella dell'esponente −1:

$$a^{-1}$$

indica inequivocabilmente il reciproco $\frac{1}{a}$ di a se a è un numero, ma se è una funzione – e può ben esserlo – cominciano problemi:

$$f^{-1}(x)$$

in questa trattazione significherà sempre l'inversa di $f(x)$ mentre la reciproca la denoteremo $\frac{1}{f(x)}$ e casomai, volendoci del male, $(f(x))^{-1}$. Il problema maggiore si ha quando – e concretamente ciò viene fatto spesso – in lunghi calcoli per brevità di scrittura si omette di indicare la variabile indipendente, e si scrive f intendendo $f(x)$, lasciando nell'incertezza riguardo la scrittura f^{-1}. Così all'atto pratico ci si ritrova sempre con qualcuno che pensa che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, o il logaritmo il reciproco dell'esponenziale (invece è l'inversa).
Resta il fatto che in un testo diverso da questo, la scrittura

$$\ln^{-1}(x)$$

è ambigua, e può indicare sia $\exp(x)$ che $\frac{1}{\ln(x)}$. In questo testo solo $\exp(x)$.
Inoltre, l'esponente −1 è usato per indicare anche tutta un'altra cosa, la controimmagine, che non è un elemento ma un insieme.

64.5 Ambiguità notazionali della parentesi graffa grande

La parentesi graffa grande – di quella sola ci si occuperà qui – viene usata con almeno 3 diversi significati che vediamo con 3 esempi.
Parentesi graffa (grande) *"selettiva dei casi"*:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"onnicomprensiva dei casi"*:

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *dei sistemi*, con significato di *et*:

$$\begin{cases} x^2 > 9 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

è chiaro che in tutti questi significati, c'è un *et* "retrostante", ma non in modo immediato.

64.6 Ambiguità notazionale della virgola nei numeri

In Italia un numero come

$$148, 128$$

spesso sarà da intendere come 148 virgola 128, poco meno di 150. In generale nella letteratura scientifica internazionale invece sarà da intendere come centoquarantottomilacentoventotto, e la virgola è scritta solo per facilitare la lettura, raggruppando le cifre a 3 a 3. Certo il dubbio ci potrebbe rimanere. Questo numero esprime il volume di Giove a meno di un fattore $10^{10} km^3$, come leggiamo su un sito internet della NASA, e la massa della Terra risulta invece 108.321: ecco che *in questo caso* non ci sono dubbi: quella che spesso in Italia denotiamo con la virgola qua la scrivono col punto.

64.7 Ambiguità notazionali per i logaritmi

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Logaritmo naturale":

> • I matematici sono soliti utilizzare la scrittura "`log(x)`" per intendere $\texttt{log}_e\texttt{(x)}$; altrimenti si è soliti specificare la base nella scrittura (es. $\texttt{log}_{10}\texttt{(x)}$ è il logaritmo in base 10 di x).
> • Ingegneri, biologi e altre professioni generalmente scrivono "`ln(x)`" o (raramente) "$\texttt{log}_e\texttt{(x)}$" per intendere il logaritmo naturale di x, mentre per "`log(x)`" sottintendono $\texttt{log}_{10}\texttt{(x)}$.
> • Nei più comuni linguaggi di programmazione, tra cui C, C++, Fortran, e BASIC, "`log`" o "`LOG`" sottintendono il logaritmo naturale.
> • Nelle calcolatrici il logaritmo naturale è "`ln`", mentre "`log`" è il logaritmo in base `10`.

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Logaritmo":

> base **10** [...] li si indica con log_{10}, o con *Log* [...] simbolo ISO *lg* [...]
> base 2 [...] li si indica con log_2, oppure con *log* quando la base a cui ci si riferisce è chiara dal contesto (simbolo ISO *lb*).

Pregiate calcolatrici denotano LOG o log il logaritmo in base 10, e LN o ln quello naturale. Si aggiunga che nei linguaggi di programmazione si usano altre scritture ancora.
Lo standard ISO 80000-2:2009 per il logaritmo decimale è lg, e per il logaritmo naturale ln.

64.8 Calcolo Combinatorio: qualche nota

Esistono un'infinità di metodi e formule nel calcolo combinatorio che non sono considerati in questa trattazione elementare. Esistono addirittura riviste scientifiche interamente dedicate alla questione, come il Journal of Combinatorics.
Nel 2017 Wikipedia elenca in https://en.wikipedia.org/wiki/List_ of_unsolved_problems_in_mathemati
ben 10 problemi irrisolti di calcolo combinatorio e ne esistono moltissimi altri.

64.9 Confronto fra media, mediana e moda

Su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Mode (statistics)" troviamo questo significativo esempio: 1, 2, 2, 3, 4, 7, 9; media=4, mediana=3, moda=2.

64.10 Cardinalità dell'insieme delle parti

(La definizione dell'insieme delle parti è quella solita, e l'insieme A può essere finito o infinito). La cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme A è (teorema) 2 elevato alla cardinalità di A:

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^{\#A}\,.$$

(Questo teorema è vero anche per insiemi infiniti ma allora la cardinalità risultante è infinita e non ha più il significato elementare di *numero di elementi*, e l'elevamento a potenza non è quello solito dei numeri naturali).
(Nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, l'esistenza dell'insieme delle parti di qualsiasi insieme è un assioma).]

64.11 Elemento assorbente

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si definisce **elemento assorbente** (rispetto all'operazione $\star$) un elemento, indichiamolo qua con α, tale che $x \star \alpha = \alpha \star x = \alpha$ per ogni x [di E]. Per esempio lo 0 per il $\cdot$, in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

64.12 Elemento neutro

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si definisce **elemento neutro** (rispetto all'operazione $\star$) un elemento, indichiamolo qua con e, tale che $x \star e = e \star x = e$ per ogni x [di E]. Per esempio lo 0 per il +, e 1 per il $\cdot$, in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

64.13 Esercizi sulle funzioni trigonometriche

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x > 0.8$$

Svolgimento
(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{\arcsin(0.8) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$0.9272... + 2k\pi < x < 2.2142... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x \le 0.8$$

(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{-\pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi \le x \le \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$-4.0688... + 2k\pi < x < 0.9272... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si veda su Wolframalpha il grafico di $\sin x - 0.8$ fra $-\frac{3}{2}\pi$ e $\frac{\pi}{2}$: `Link->`. (Curva sotto lo 0 da circa −4 a circa 1; è stato rappresentato un periodo di 2π, poi si ripete; usare altri intervlli, come $[-\pi, \pi]$ invece di $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$, potrebbe portare a più complesse espressioni della soluzione, comunque valide).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Calcolare approssimatamente $\arcsin \frac{21}{25}$ (a mano, ovvio, ma anche prendere confidenza con una calcolatrice scientifica sarà un bene).
Si cerchi poi il valore online su WolframAlpha con

`ArcSin[21/25]`

Svolgimento
Calcoliamo 21 : 25 = 0.84 (con la divisione a mano, o meglio osservando che $\frac{21}{25} = \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{4} = 0.84$) e insomma cerchiamo un angolo, fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il cui seno sia 0.84. Ricordando (vedi (1)) che $\sin 1 \approx 0.84$ concludiamo $\arcsin \frac{21}{25} \approx 1$.
WolframAlpha con `ArcSin[21/25]` ci dà ≈ 0.997.

64.14 Esercizi sulle serie numeriche

Determinare il carattere delle serie, e ove possibile il "tipo" (a termini positivi, non negativi...), la denominazione (serie geometrica, eccetera), e se possibile la somma.
• $\arctan 0 + \arctan 1 + \arctan 2 + ... + \arctan k + ...$ ovvero $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan k$ è serie a termini non negativi. Il termine generale $a_k \to \frac{\pi}{2}$ e allora $\not\to 0$. Allora la serie diverge a $+\infty$.
• $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + ... + \frac{5}{k} + ...$ ovvero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k}$ è serie a termini positivi. È 5 volte la serie armonica e allora diverge a $+\infty$.
• $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... + \frac{3}{2^k} + ...$ ovvero $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$ è serie a termini positivi. è 3 volte la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ di ragione $\frac{1}{2}$ e allora converge a $\frac{3}{1-1/2} = 6$.
• $-7 - \frac{7}{2} - \frac{7}{3} + ... - \frac{7}{k} + ...$ è serie a termini negativi. È -7 volte la serie armonica e allora diverge a $-\infty$.
• $3\arctan 0 - 3\arctan 1 + 3\arctan 2 + ... + (-1)^k 3\arctan k + ...$
è serie a termini di segno alternato. Il termine generale $\not\to 0$ perchè in valore assoluto $|a_k| \to \frac{3}{2}\pi$ e allora la serie non converge.
• $5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} - ... + \frac{(-1)^{k+1}5}{k} + ...$ è serie a termini di segno alternato, ed è 5 volte la serie di Leibniz, e allora converge a $5\ln 2$.
•• $-4 + 2 - \frac{4}{3} - ... + \frac{(-1)^k 4}{k} + ...$ è serie a termini di segno alternato, ed è -4 volte la serie di Leibniz, e allora converge a $-4\ln 2$.
•• $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} ... + \frac{(-1)^k}{k^2} + ...$ è serie a termini di segno alternato, in valore assoluto $|a_k| = \frac{1}{k^2}$ decrescenti e infinitesimi, e allora converge. (Con somma ≈ -0.8225 secondo WolframAlpha:
`Sum[(-1)^k/k^2,{k,1,Infinity}]`).
•• $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} ... + \frac{1}{k^2} + ...$ è serie a termini positivi, e allora converge o diverge a $+\infty$. WolframAlpha con `Sum[1/k^2,{k,1,Infinity}]` trova $\frac{\pi^2}{6}$, ma in questa trattazione elementare non lo sappiamo.
•• $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}}$ è serie a termini positivi, che non tendono a 0, e allora diverge a $+\infty$. Si considerino •••• $\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(3 - \frac{1}{n}\right)$. •••• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k^3}$ •••• $\sum_{k=0}^{\infty} \pi(\sin 1)^k$ •••• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{4k+2}$.

64.15 Eventi indipendenti

Nella concezione assiomatica della probabilità, nella σ-algebra $\mathbb{A}$
• 2 eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)\,;$$

• n eventi $A_1 \dots A_n$ si dicono a 2 a 2 indipendenti se e solo se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \qquad \forall\, i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j\,;$$

• n eventi $A_1 \dots A_n$ si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

per ogni scelta di indici distinti $i_1, \dots, i_k$.
Queste definizioni sono fatte in modo che l'indipendenza assiomatica (insieme alla probabilità assiomatica) corrisponda bene all'indipendenza degli eventi nel linguaggio comune, riferito alla realtà sensibile.
Per esempio è $\frac{1}{18}$ la probabilità che esca il 5 al lotto sulla ruota di Venezia alla prossima estrazione, ed è $\frac{1}{6}$ la probabilità che venga 5 al prossimo lancio di un dado regolare, e la probabilità che venga 5 al lotto e 5 sul dado (eventi indipendenti) è

$$P(\{5\ sulla\ ruota\ di\ Venezia\} \cap \{5\ sul\ dado\}) =$$

$$= P(5\ sulla\ ruota\ di\ Venezia) \cdot P(5\ sul\ dado) =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108}\,.$$

Si noti che

$$P(B > 0) \wedge A, B\ indipendenti \Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

conformemente alla nozione comune di indipendenza e probabilità condizionale.

64.16 Fattoriale

Per ogni $n \in I\!N$, si dice *fattoriale* di n e si indica con $n!$ il numero $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ se $n > 0$ e 1 se $n = 0$.
Per esempio $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; e $11! = 39'916'800$.
Esistono estensioni della definizione ai numeri reali e perfino ai numeri complessi mediante la funzione Gamma:

$$z! := \Gamma(z - 1)\,, \quad z \neq -1, -2, -3, ...$$

Valgono le approssimazioni di Stirling

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

e con maggiore precisione

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{12x}\right)$$

per i numeri interi o reali, purchè sufficientemente grandi – diciamo maggiori di 8 per avere un'approssimazione all'1% per la prima e maggiori di 1 per avere un'approssimazione all'1 per mille per la seconda.
Sono approssimazioni asintotiche e allora il simbolo $\approx$ può essere opportunamente sostituito da $\sim$.
Si noti la grande rapidità con cui cresce la funzione fattoriale in $I\!N$, e in $I\!R$ per $x \geq 1$. Per esempio 100! ha 158 cifre.

64.17 Funzioni iperboliche; notazioni per le derivate

Le funzioni iperboliche hanno un interesse di per sè, tendendo a ricorrere nella Fisica, ma hanno anche uno speciale interesse nel Calcolo Differenziale a causa delle derivate di alcune di esse.

	$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	*seno iperbolico*
	$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	*coseno ip.*
	$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	*tangente ip.*
sono inverse,	$\operatorname{arsinh} x := (\sinh)^{-1} x$	*arcoseno ip.*
assolutamente	$\operatorname{arcosh} x := \left(\cosh\Big\vert_{x\geq 0}\right)^{-1} x$	*arcocoseno ip.*
non recip((casa farmaceutica))	$\operatorname{artanh} x := (\tanh)^{-1} x$	*arcotangente ip.*

64.18 Funzioni, tipi di

In questa trattazione elementare consideriamo funzioni di 5 tipi:
- $\operatorname{sgn}(x)$ che vale 0 in 0 e altrove $\frac{x}{|x|}$
- $\lfloor x \rfloor$ (scritta anche $[x]$ ma non è conforme allo standard ISO) parte intera di x, che per $x \geq 0$ "taglia i decimali": $\lfloor \pi \rfloor = 3$. (Ma $\lfloor -\pi \rfloor = -4$).
- $\Gamma(x)$, la funzione gamma.
- $\Phi(x)$, funzione utile in statistica.
- ϕ_α, funzione utile in statistica.

(Queste 5 sopra non sono funzioni elementari, le prime 2 sono discontinue e le ultime 3 continue).
- Le funzioni elementari: $x^2, \sin x$... e loro somme, composizioni...

64.19 Geometria euclidea piana: elementi basici

Retta, cerchio e altre figure, e misura in radianti
Consideremo *concetti primitivi* il *punto* e anche:
la *retta*, che viene divisa in 2 *semirette* da 1 punto *origine*;
la *retta orientata*, dove i punti si *precedono* o *seguono* fra loro;
il *piano (euclideo)*; che una retta *origine* divide in 2 *semipiani*;
il *segmento* di *estremi* 2 punti e *lunghezza* la loro distanza;
per semplicitị trattazione, anche la *curva*.

Dati un punto P e numero $r > 0$, l'insieme dei punti che hanno distanza r da C si chiama *circolo* – da altri detto *cerchio* – di centro P e raggio r. Si noti che è in un certo senso "vuoto": il centro non appartiene al circolo. In questa trattazione chiameremo *cerchio* l'insieme dei punti che hanno distanza $\leq r$ da C (cioè il "cerchio pieno" per così dire). Un segmento nel cerchio lungo $2r$ è un *diametro* . Un diametro divide il cerchio in 2 *semicerchi*. Due semirette diverse con stessa origine P dividono il piano in 2 *angoli* di *vertice* P. Se essi sono uguali si dicono *piatti*. Se uno è "minore" dell'altro si dice *convesso* e l'altro *concavo*. Due rette del piano con intersezione vuota le diremo *parallele*. Se l'intersezione ha esattamente 1 punto si dicono *incidenti*. Se l'intersezione coincide con le rette stesse, si tratta di 2 rette *coincidenti* (talvolta dette *parallele coincidenti*): in effetti è 1 sola retta considerata 2 volte. Due rette incidenti possono formare 4 angoli uguali che si dicono *retti*, e le rette si dicono *ortogonali* o *perpendicolari*. Angoli "minori" di un angolo retto si chiamano *acuti* e angoli "maggiori" di un angolo retto e "minori" di un angolo piatto si dicono *ottusi*. L'intersezione di un angolo di vertice P con un circolo di centro P è un *arco di circolo*, di cui si suppone nota come concetto primitivo la nozione di *lunghezza*. Se il raggio del circolo è 1 quella lunghezza si chiama *misura in radianti* dell'angolo. La misura dell'angolo piatto (≈ 3.14) si indica con π. Si dice *figura* ogni insieme di punti: segmenti, rette, semirette, circoli, cerchi, semicerchi, sempiani, angoli...

Limitato, convesso, poligoni vari, perimetro, area
Una figura si dice *limitata* se esiste un cerchio che la contiene (per esempio i segmenti), altrimenti *illimitata* (per esempio le rette).
Una figura si dice *convessa* se contiene ogni segmento con estremi in quella figura (per esempio il cerchio), altrimenti non convessa.
L'unione di 2 segmenti AB e BC (da altri denotati $[AB]$ e $[BC]$) non *allineati*, con un estremo B in comune si chiama *linea spezzata* di 2 *lati* AB e BC e *vertice* B, e in modo analogo è definita quella di più *lati*. Non facciamo i dettagli, come pure per le seguenti intuitive denominazioni:
linea spezzata *chiusa*, o altrimenti *aperta*;
linea spezzata *intrecciata*, o altrimenti non intrecciata;
lati *consecutivi*;
lunghezza della linea spezzata.

Supponiamo noto il fatto (non banale da dimostrare) che una linea spezzata chiusa non intrecciata divide il piano in 2 parti. Quella limitata si chiama *poligono (semplice)* (o *non intrecciato*), coi lati e i vertici della linea spezzata, e *perimetro* la sua lunghezza.
Il poligono si dice *equilatero* se ha i lati uguali ed *equiangolo* se ha gli angoli uguali, e *regolare* se è equilatero ed equiangolo.
I poligoni con 3 lati si chiamano *triangoli* e quelli con 4 *quadrilateri*. Un quadrilatero si chiama *rombo* se è equilatero, *parallelogramma* se ha i lati a 2 paralleli, *rettangolo* se ha i lati a 2 a 2 perpendicolari, *quadrato* se è equilatero equiangolo.
Il prodotto $b \cdot h$ delle lunghezze di 2 lati consecutivi di un rettangolo si chiama *area*. Ciò genera immediatamente il concetto di area di un parallelogramma, e per dimezzamento quello di area di un triangolo, $\frac{b \cdot h}{2}$, che a sua volta genera il concetto di area per ogni poligono, e con *passaggio al limite* (concetto non banale) l'area di ogni figura *sufficientemente regolare*, in particolare il cerchio, che si dimostra avere area πr^2. I punti, i segmenti, le linee spezzate, i circoli e gli archi di circolo, e perfino le rette hanno area 0. Non esiste (oppure è *infinita*) l'area di piano, semipiani e angoli.

Congruenti e simili; Teoremi di Pitagora ed Euclide
Se per 2 figure F ed F' esiste una funzione biiettiva $f : F \to F'$ che conserva le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *congruenti* e si possono immaginare come *sovrapponibili*; ma si faccia attenzione che l'azione della sovrapposizione può necessitare di passare momentaneamente nello *spazio* in cui è contenuto il piano, come per i grafemi d e b. Tutte le rette sono congruenti, e anche le semirette e i semipiani. Se F ed F' sono il piano euclideo stesso, f si chiama *isometria*↑.
Se per 2 figure F ed F' esistono un numero $\alpha > 0$ e una funzione biiettiva $g : F \to F'$ che moltiplica per α le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti ovvero precisamente

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \alpha \cdot \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *simili*. Tutti i segmenti sono simili, e anche i circoli, i cerchi, i quadrati e i triangoli equilateri.
Si dimostra che se un triangolo ha gli angoli uguali a quelli di un altro, essi sono simili. Allora dette a, b, c le misure dei lati del primo, e a', b', c' quelle del secondo, vale la (doppia) proporzione

$$a : a' = b : b' = c : c' \qquad ossia \;\; \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \,.$$

Un triangolo con un angolo retto si chiama *triangolo rettangolo*; *ipotenusa* il suo lato maggiore e *cateti* gli altri. Dette nell'ordine i, c_1 e c_2 le lunghezze di quei lati, h quella della distanza dell'ipotenusa dal vertice *opposto* (cioè h è la lunghezza dell'*altezza relativa all'ipotenusa*), e p_1 e p_2 le lunghezze delle *proiezioni dei cateti sull'ipotenusa* (nell'ordine), valgono questi 3 teoremi classici:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2 \qquad \textit{Teorema di Pitagora}$$

$$c_1^2 = h \cdot p_1, \quad c_2^2 = h \cdot p_2 \qquad \textit{Primo Teorema di Euclide}$$

$$p_1 : h = h : p_2 \qquad \textit{Secondo Teorema di Euclide}.$$

64.20 Insiemi finiti e infiniti

Si definisce che un insieme è infinito se è in corrispondenza biunivca con un suo sottoinsieme proprio; per esempio $\mathbb{N}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri pari:

$\mathbb{N}$		$\{numeri\ pari\}$
0	$\leftrightarrow$	0
1	$\leftrightarrow$	2
2	$\leftrightarrow$	4
3	$\leftrightarrow$	6
...	$\leftrightarrow$	...

e si dice che un insieme è finito se non è infinito. (Ad un livello più elementare si dice che un insieme è infinito se non ha un numero di elementi (cardinalità) finito).
Due insiemi con la stessa cardinalità si dicono *equipotenti*, oppure *in corrispondenza biunivoca*, oppure, parlando molto semplificatamente, si potrebbe dire che hanno la stessa quantità di elementi.
Fra le proprietà della cardinalità si segnalano in particolare la cardinalità dell'unione, la cardinalità del prodotto cartesiano e la cardinalità dell'insieme delle parti.
La cardinalità di un insieme E, finito o infinito (comunque indicata con gli stessi simboli sopra scritti) è la classe di equivalenza di tutti gli insiemi in corrispondenza biunivoca con E.
La cardinalità (infinita) degli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, che sono tutti in corrispondenza biunivoca fra loro, viene denotata $\aleph_0$ (cioè *aleph zero*). (Non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità e in particolare $\mathbb{R}$ ha cardinalità $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, cardinalità dell'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, maggiore di $\aleph_0$: ci sono più reali che naturali).

64.21 Integrale definito di funzione priva di primitiva

In questa trattazione elementare, l'integrale definito è stato definito tramite la funzione primitiva, e allora non esiste per funzioni prive di primitiva. Ad un

livello superiore, l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ viene definito con un procedimento che sostanzialmente equivale a considerare l'area *con segno* fra l'asse x e il grafico di $f(x)$, con un'eventuale inversione di segno se $a > b$. Vediamo un esempio con una funzione, che essendo non continua nell'intervallo di integrazione, là è priva di primitiva.
Calcolare

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, dx\,.$$

Non abbiamo dato una primitiva (ovvero equivalentemente un integrale indefinito) di $\operatorname{sgn} x$, incertezza rig e in effetti si potrebbe dimostrare che non esiste, perchè solo le funzioni continue possono avere primitiva. In questo caso l'area di interesse esiste senz'altro come si vede dal disegno del grafico. Allora possiamo calcolare l'integrale così:

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, dx =_{\textit{per la Regola di Chasles}} \int_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x\, dx + \int_{0}^{1} \operatorname{sgn} x\, dx =$$

ricordando che la funzione segno vale -1 sui negativi e 1 sui positivi (e quanto fa nel singolo valore 0 non importa: l'integrale definito di qualunque funzione non cambia modificando il valore della funzione integranda in un numero finito punti)

$$= \int_{-1}^{0} (-1)\, x\, dx + \int_{0}^{1} 1\, dx = [-x]_{-1}^{0} + [x]_0^1 =$$
$$= -0 - (-1) + 1 - 0 = 2\,.$$

Si faccia un disegno riconoscendo i vari elementi in questione.

64.22 Intervallo di fiducia per la v.a. bernoulliana

Per p di $B(1,p)$, un intervallo di fiducia bilatero centrato al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è "piccolo", come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, "grande"), è (approssimativamente) per n sufficientemente grande

$$\left[\bar{X}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\,,\ \bar{X}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\right]$$

$$\text{ovvero}\quad \bar{X}_n \pm \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\,.$$

64.23 Involucro convesso

Diamo un'idea di cos'è l'*involucro convesso* di n punti, oppure infiniti, del piano o dello spazio (euclidei). Consideriamo dapprima 3 punti del piano: si immagini di piantare 3 pioli nei 3 punti, e di passare una corda intorno ad essi: la zona "entro" la corda è un triangolo, involucro convesso dei 3 punti. L'involucro convesso naturalmente esiste anche per 1 o 2 o più di 3 punti, anche infiniti, per esempio una figura non convessa. Per esempio l'involucro convesso di una stella ad m punte è un poligono ad m lati. Nello spazio euclideo si dovrà immaginare non un una corda ma un tessuto.

64.24 Isometrie e congruenza in piano e spazio euclidei

Detto E il piano euclideo, o lo spazio euclideo, ogni funzione da E in E che *conserva le distanze* si chiama *isometria* o *trasformazione rigida*.
Più formalmente, una funzione

$$f : E \to E$$

essendo E il piano euclideo o lo spazio euclideo, si dice *isometria* se

$$\Big(\forall P, Q \in E\Big) \quad d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

essendo d la *distanza* (euclidea).
Due sottoinsiemi del piano (o spazio) euclideo dei quali uno sia il trasformato isometrico dell'altro si dicono *congruenti*.
Le isometrie conservano gli angoli e le aree, e nello spazio i volumi.
Da adesso consideriamo solo il piano euclideo.
Nel piano euclideo esistono 5 tipi di isometrie:

- d – l'identità o trasformazione identica
- dd – traslazioni
- dp – rotazioni
- db – le simmetrie assiali (o riflessioni)
- dq – antitraslazioni (anche dette glissosimmetrie, glissoriflessioni o simmetrie con scorrimento)

cioè date 2 figure congruenti, ciascuna si trasforma nell'altra con 1 delle 5 isometrie dette.
Tutte le isometrie del piano euclideo (compresa l'identità) o sono 1 riflessione o sono composizioni di 2 o 3 riflessioni.
Escludento le identità, si hanno i seguenti 4 casi:

```
.................Conserva l'orientazione?
.................SI'...........NO
Ha punti...SI'...rotazione.....riflessione
fissi?.....NO....traslazione...antitraslazione
```

64.25 Legge congiunta

Definizioni. Per 2 variabili aleatorie X e Y discrete o continue, si chiama **funzione di ripartizione congiunta** di X e Y ovvero del *vettore aleatorio*

(X, Y) – si immagini una coppia di dadi – la

$$F_{X,Y}(x, y) := P(X \leq x \wedge Y \leq y)$$

e nel caso che X **e** Y **siano continue** (molto regolari come sempre) la derivata rispetto a y della derivata rispetto a x di quella

$$f_{X,Y}(x, y) := D_y D_x F_{X,Y}(x, y)$$

si chiama densità congiunta di X e Y.
Teorema 1. Dalla densità congiunta di X e Y continue si trova la densità di X, detta *densità marginale*, con

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy \quad \text{e analogamente per } Y.$$

Teorema 2.

$$\text{indipendenti } \Rightarrow F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \text{ (discrete o continue)}$$

$$\text{indipendenti } \Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ (continue).}$$

Teorema 3. Densità della somma di 2 variabili aleatorie continue di cui sia nota la densità congiunta:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, t-x)\, dx = \text{ se indip. } \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\, dx.$$

Per esempio, si calolerà la densità della somma di 2 variabili aleatorie indipendenti uniformi su $[0, 1]$, siano esse U e V:

$$f_U(t) := f_V(t) := \begin{cases} 1 & \textit{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} .$$

64.26 Mnemonici per le cifre di e

Associando ordinatamente ad ogni parola di questa frase

> *"La loquela è vincente* $\leftarrow 2, 7, 1, 8$
> *ma talvolta è migliore il silenzio,* $\leftarrow 2, 8, 1, 8, 2, 8$
> *come disse Aristocle."* $\leftarrow 4, 5, 9$

i numeri delle lunghezze delle parole, si ottengono le prime cifre significative di e: $2, 7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, 9$.
Fra le molte molte frasi analoghe, una famosa con le stesse cifre è

> *"Ai modesti o vanitosi*
> *ai violenti o timorosi*
> *do, cantando gaio ritmo,*
> *logaritmo."*

64.27 Mnemonici per le cifre di π: un *piem*

Associando ordinatamente ad ogni parola di queste frasi

> *"Non è dato a tutti ricordare il numero aureo del sommo filosofo Archimede. Certuni sostengon che si può ricordare tale numero, ma questi poi non recitano che un centone insensato."*

i numeri delle lunghezze delle parole, si ottengono le prime cifre significative di π: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, eccetera. Esistono molte frasi analoghe, anche in altre lingue.

64.28 Moda di una variabile aleatoria continua

è il valore che ha la massima densità. Sempreché ce ne sia solo uno; se ce ne sono 2 entrambi si chiamano mode e la variabile aleatoria si chiama bimodale. Non considereremo il caso in cui ce ne siano più di 2.
La moda di una variabile aleatoria X si indica con $\mathrm{Mod}(X)$.

64.29 Operazione binaria (interna)

In sostanza, è una legge che a 2 elementi di un insieme associa un elemento di quello stesso insieme, come sono per esempio la somma e la moltiplicazione nei consueti insiemi numerici. Più formalmente, se E è un insieme, si chiama operazione binaria (interna) una funzione $* : E \times E \to E$. (è una funzione definita sul prodotto cartesiano $E \times E$). Il suo valore quando viene calcolata in 2 elementi x e y si indica con $x * y$.

64.30 Permutazioni complete

Vedi dismutazioni.

64.31 Proprietà associativa

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si dice che l'operazione $\star$ verifica la **proprietà associativa** se per ogni $x, y, z \in E$ è:

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \, .$$

Per esempio il + e il $\cdot$ sono associativi in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q, $\mathbb{R}$.

64.32 Proprietà commutativa

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si dice che l'operazione $\star$ verifica la **proprietà commutativa** se per ogni $x, y \in E$ è

$$x \star y = y \star x \,.$$

Per esempio il + e il $\cdot$ sono commutativi in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q ed $\mathbb{R}$.

64.33 Proprietà distributiva

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Se $\diamond$ è un'altra operazione binaria in E, si dice che l'operazione $\star$ verifica la **proprietà distributiva** rispetto all'operazione $\diamond$ se per ogni $x, y \in E$ è

$$x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z) \quad et \quad (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x)\,.$$

Per esempio il $\cdot$ è distributivo rispetto al +, in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q, $\mathbb{R}$.

64.34 Rette parallele e rette sghembe

Due rette del piano con intersezione vuota le diremo *parallele*. Due rette dello spazio con intersezione vuota e *complanari* (cioè appartenenti ad uno stesso piano) le diremo *parallele*. Due rette dello spazio con intersezione vuota e (ma) non *complanari* le diremo *sghembe*.

64.35 Scarti dalla media per una v.a. normale

Una variabile aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ è in questa relazione con la sua standardizzazione $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$:

$$X = \sigma Y + \mu$$

e allora si ha

$$P(|X-\mu| \le \delta) = P(|\sigma Y| \le \delta) = P(\sigma|Y| \le \delta) = P(|Y| \le \frac{\delta}{\sigma}) =$$

e considerando l'evento complementare

$$= 1 - P(|Y| > \delta) =$$

per le proprietà del valore assoluto

$$= 1 - P\Big(Y < -\frac{\delta}{\sigma} \vee Y > \frac{\delta}{\sigma}\Big) =$$

e trattandosi di eventi disgiunti

$$= 1 - \left(P\left(Y < -\frac{\delta}{\sigma}\right) + P\left(Y > \frac{\delta}{\sigma}\right)\right) =$$

e per la simmetria della v.a. normale standard Y

$$= 1 - \left(P\left(Y > \frac{\delta}{\sigma}\right) + P\left(Y > \frac{\delta}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= 1 - 2P\left(Y > \frac{\delta}{\sigma}\right) =$$

e passando all'evento complementare

$$= 1 - 2\left(1 - P\left(Y \leq \frac{\delta}{\sigma}\right)\right) = 2P\left(Y \leq \frac{\delta}{\sigma}\right) - 1 = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$$

cioè in conclusione

$$P(|X - \mu| \leq \delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$$

e in particolare con con $\delta := m\,\sigma$

$$P(|X - \mu| \leq m\,\sigma) = 2\,\Phi(m) - 1$$

e coi classici valori (che si trovano per esempio sulle tavole)

$$\begin{gathered}\Phi(1) \approx 0.8413\\ \Phi(2) \approx 0.9773\\ \Phi(3) \approx 0.9987\end{gathered}$$

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) = 2\,\Phi(1) - 1 \approx 0.68.26 \approx 68.3\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\,\sigma) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx 0.9544 \approx 95.4\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\,\sigma) = 2\,\Phi(3) - 1 \approx 0.9974 \approx 99.7\%$$

e per avere con più precisione 95% si sostituisca $2\,\sigma$ con $1.96\,\sigma$:

$$P(|X - \mu| \leq 1.96\,\sigma) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx 0.95 = 95\%$$

tutte e 4 valide per X normale di media μ e varianza σ^2.

64.36 Sconvolgimento

Vedi dismutazioni.

64.37 Simmetrico di un elemento

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Se $x \star y = y \star x = e$, allora x si dice **simmetrico** di y (rispetto all'operazione $\star$). (E ovviamente y è simmetrico di x). Per esempio -3 (che esiste da $\mathbb{Z}$ in poi) è simmetrico di 3 rispetto al + e $\frac{1}{3}$ (che esiste da $\mathbb{Q}$ in poi) è simmetrico di 3 rispetto al $\cdot$.
Il simmetrico rispetto al + si chiama *opposto* e il simmetrico rispetto al $\cdot$ si chiama *reciproco*.

64.38 Sottrazione

Volendo trattare la questione in termini elementari, diremo che $a + b = c$ lo scriveremo anche $c - a = b$ e pure $c - b = a$, ottenendosi così l'operazione della *sottrazione*, operazione binaria come la somma, ma al contrario di quella nè associativa nè commutativa. Per esempio $10 - 3 = 7$ e $10 - 7 = 3$, perchè $3 + 7 = 10$. L'operazione non è sempre definita in $\mathbb{N}$, non esistendo per esempio $3 - 10$ perchè con nessun numero naturale x è $10 + x = 3$.
Risolveremo la questione ampliando $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Z}$.
Anche nei successivi ampliamenti a $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{N}$, la sottrazione continuerà come in $\mathbb{Z}$ ad essere operazione binaria ovunque definita, nè associativa nè commutativa, priva di *elemento neutro*↑ (certo $x - 0 = x$ ma non coincide con $0 - x$).
Si noti comunque che da $\mathbb{N}$ in poi vale questa proprietà distributiva

$$(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z \,.$$

64.39 Triangolo di Tartaglia e potenza del binomio

(Evitando complesse definizioni formali, in questa trattazione elementare) il *Triangolo di Tartaglia* (o *di Pascal*, in ogni caso sostanzialmente noto ben prima di quegli Autori) è la *scrittura*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

....

variamente estesa con la Formula di Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(e cioè ogni numero è la somma dei 2 soprastanti, a parte gli 1 ai margini) dove n è il numero di riga a partire dalla 0-esima e k è la posizione nella riga a partire dalla 0-esima.
Il Triangolo di Tartaglia consente il calcolo dei *coefficienti binomiali* $\binom{n}{k}$ mediante sole somme. Ciò è utile sia nel problema delle combinazioni semplici che nella *potenza del binomio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{ovvero}$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

(si noti che nella seconda formula gli a e b nel secondo membro sono scambiati fra loro rispetto alla prima formula, come se là fosse scritto $a^{n-k}\, b^k$, ma è equivalente). I vari coefficienti dei monomi si trovano semplicemente sulla n-esima riga del Triangolo di Tartaglia (intendendo come 1-esima quella con due 1), per esempio (e si provi poi con la quinta potenza)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

64.40 Valore assoluto: 4 definizioni equivalenti

Da $\mathbb{Z}$ in poi si può considerare il *valore assoluto* di un numero

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

$$|x| := x \operatorname{sgn}(x)$$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Definizione consigliabile:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases} .$$

La soprastante parentesi graffa (grande) è *"selettiva dei casi"*, ma quel simbolo ha anche altri usi affini.
In $I\!R$ il valore assoluto è una *funzione elementare*, mentre nell'algebra dei numeri può considerarsi *operazione unaria*.

64.41 Varianza di un solo numero

Si noti che nella statistica descrittiva una lista composta da un solo numero ha (ovviamente) varianza 0 in base alle formule viste

$$\bar{x} := x_1 \qquad Var(x_1) := 0$$

mentre nella statistica inferenziale un campione con un solo dato non consente (ovviamente) alcuna stima sulla varianza della variabile aleatoria "retrostante", infatti nel calcolo si avrebbe $\frac{0}{0}$:

$$\bar{X} := X_1 \qquad S^2 := \frac{(X_1 - \bar{X})^2}{0} .$$