Le 64 Pillole

Matematica per Farmacia

[*in fieri* - *work in progress* - continua]

Alessandro Soranzo

Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Università degli Studi di Trieste

ver. 30 settembre 2019

Nota 0. SI PREGA DI AVVERTIRE L'AUTORE DI OGNI ERRORE ANCHE SE MINUSCOLO, GRAZIE!

Nota 1. Il testo è ipertestuale, con link interni e link alla rete. I link interni $\leftarrow_{\downarrow}{}^{\uparrow\,\nearrow}$ rinviano all'Indice Analitico con Approfondimenti, rispettivamente per questioni di livello uguale, inferiore e superiore a quello che è obiettivo di questo testo, e per digressioni interessanti.

Nota 2. Attualmente la separazione della parole in fine riga, fatta automaticamente dall'editor di testo, non corrisponde sempre alla grammatica italiana (ma in questa frase sì).

Premessa

Si è voluto fare un testo ipertestuale su Statistica e altra Matematica. Soprattutto la Matematica utile per la Statistica.
Grande attenzione è stata posta agli errori più comuni: prevenire è meglio che curare. Esistono errori tipici, contro i quali è utile agire attivamente. Per esempio ritenere che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, e invece è l'inversa. Questo errore consueto e altri simili sono dovuti ad ambiguità notazionali della matematica *de facto*, nello stato in cui si trova oggi scritta. Grande rilevanza è stata data a questo aspetto delle ambiguità notazionali. D'altra parte, la situazione oggi è tale, incredibilmente, che nemmeno è chiaro, quando in un testo si trova scritto

$$1{,}265$$

se si intenda quel numero, fra 1 e 2, "uno virgola duecentosessantacinque", oppure "milleduecentosessantacinque"!
Troviamo per esempio la relazione fra la nuova e la vecchia unità di misura del campo magnetico

1 T = 10.000 G su Wikipedia italiana `Link ->`

1 tesla = 10,000 gauss su Wikipedia in inglese `Link ->`

In questo testo col punto fra le cifre intendiamo il separatore decimale, come si usa nei testi scientifici avanzati e/o internazionali, per esempio $\mathrm{e} \approx 2.718 < 3$. Non è un separatore delle migliaia, per favorire la lettura, come altri farebbe. Si noti che molti in Europa scrivono quel numero 2,718 ma la virgola internazionalmente di solito viene usata come separatore delle migliaia, per favorire la lettura.

D'altra parte a cosa servirebbe sapere i più sottili teoremi del calcolo infinitesimale, se poi si permetterà ad Excel, software usatissimo nelle scienze applicate, di calcolare

$$-3\hat{}2$$

in modo *erroneo* – o, volendo essere benevoli, attenendosi alla convenzione tutta sua, di quel software, opposta a quella di pratica-

mente tutta la comunità scientifica? E' meglio avvertire di questo lo studente.
Nella simbologia ci si è attenuti in generale allo standard ISO 80000-2:2009[1], per esempio tan e non tang nè tg per la funzione tangente. E uno spazietto, eventualmente, come separatore delle migliaia: 1 265.

Una certa attenzione è stata rivolta a Wikipedia. Lo studente dovrebbe abituarsi a consultarla. L'idea che non sia una fonte attendibile, per gli argomenti di questo testo elementare è – in generale, ovvio – senz'altro falsa. (Per questioni "sensibili", invece, alquanto male si potrebbe dire di Wikipedia).

Ripetutamente si accenna a WolframAlpha: lo studente dovrebbe abituarsi a consultare questa potentissima intelligenza artificiale disponibile gratuitamente on-line.

Premesso che non tratteremo degli aspetti *materiali* della raccolta dati (questionari, interviste, eccetera), diciamo subito che la Statistica, così limitata, è una branca della Matematica, astratta come tutta la vera Matematica.
La Statistica verrà suddivisa in Statistica Descrittiva e Statistica Inferenziale.
In qualche modo possiamo dire che tutta la matematica che tratteremo, dai numeri alla Statistica Descrittiva, al Calcolo Infinitesimale e al Calcolo delle Probabilità, è propedeutica per la trattazione della Statistica Inferenziale.
La seconda Parte del corso riguarda le *Matematiche dell'Incertezza*.
Naturalmente, le Matematiche dell'Incertezza non fanno affermazioni incerte, bensì fanno affermazioni certe su fatti incerti, per esempio che conviene scommettere (alla pari) che un dado darà un numero primo piuttosto che un numero quadrato. Nelle *Matematiche della certezza*, prima Parte del corso, è compresa

[1] Si veda per esempio https://ja.wikipedia.org/wiki/ISO_80000-2

la Statistica Descrittiva, che costituisce il Capitolo IV, e nelle *Matematiche dell'Incertezza* è compresa la Statistica Inferenziale, Capitolo XII, che in qualche modo rappresenta l'apice della trattazione.

Il testo è *in fieri* / work in progress.

Prerequisiti

- I numeri primi: 2 (sì anche 2, ma non 1), 3, 5, 7, 11, 13, 19...
- L'algebra dei numeri e con le variabili, per esempio $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$
- L'equazione di secondo grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ ha *discriminante* $\Delta := b^2 - 4\,a\,c$ e, se $\Delta \geq 0$, soluzioni $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$.
- 1 d = 24 h cioè 1 giorno ha 24 ore, da 0 a 24 o 2 volte da 0 a 12
- 1 h = 60' cioè 1 ora ha 60 minuti
- 1 s = 60" cioè 1 minuto ha 60 secondi
- Le operazioni con le ore: per esempio 3.5 h (cioè 3 ore e mezza) dopo le 23 sono le 2:30 (di notte).
- 1 anno (standard) ha 365 giorni, 1 anno bisestile ha 366 giorni
- Il comune dado ha 6 facce numerate da 1 a 6
- Una *ruota* del lotto ha i numeri 1...90
- Elementi basici di geometria euclidea piana: punto, retta, semiretta, segmento, piano, semipiano, triangolo, triangolo rettangolo, triangolo equilatero, rettangolo, quadrato, cerchio, semicerchio, perimetro, area...

E in particolare:

⋆ Il triangolo di base b e altezza h ha area $\frac{1}{2}\,a\,b$.
⋆ Il quadrato di lato a ha perimetro $4\,a$ e area a^2
⋆ Il cerchio di raggio r ha ciconferenza $2\,\pi\,r$ e area $\pi\,r^2$, e $\pi \approx 3.14$
⋆ Il parallelepipedo di lati a, b, c ha volume $a\,b\,c$
⋆ La sfera ha volume $\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

Valori numerici fondamentali

Alla fine di questo corso ci si aspetta che lo studente conosca a memoria alcuni valori numerici approssimati, in particolare

$\pi \approx 3.14$ (pi greco)

$\mathrm{e} \approx 2.718$ (Numero di Eulero)

$\lg 2 \approx 0.3$ (logaritmo decimale di 2, cioè $\log_{10} 2$)

$\lg \mathrm{e} \approx 0.4343$ (logaritmo decimale di e, cioè $\log_{10}\mathrm{e}$)

$\phi_{0.975} \approx 1.96$ (un quantile normale)

e quest'altro, esatto:

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.33333333333...$ (*periodico*)

NOTA 1

In questo testo viene usato principalmente il punto decimale, ma anche la virgola decimale, e si accenna pure allo standard del punto a mezza altezza · in funzione di punto/virgola decimale. Ci si deve abituare a tutti gli standard usati di fatto. La questione è trattata nella Lezione 1.

NOTA 2

Per gli Esercizi, quelli scritti in carattere minore, vale la seguente

Legenda

$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato

Indice delle 4 Sezioni e dei 12 Capitoli

Segue l'Indice delle 64 lezioni.

Alla fine del testo si trova un capitolo di esercizi e poi l'Indice Analitico con Approfondimenti.

0 Indice delle 64 lezioni

PARTE A — MATEMATICHE DELLA CERTEZZA
Sezione A1 – Matematiche elementari

"Non c'è niente di più pratico di una buona teoria", cit.

L'universo è scritto in "lingua matematica". Scrive Galileo Galilei: *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."*

"Ogni cosa si adatta al numero". Pitagora.

Nota sugli esercizi

Legenda

$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

PARTE A — MATEMATICHE DELLA CERTEZZA

Sezione A1 – Matematiche Elementari

I – Insiemistica e logica

1 I numeri

Supponiamo noti:

- $\mathbb{N}$: i numeri naturali: 0, 1, 2...
- $\mathbb{Z}$: i numeri interi: sono di 3 tipi:
  - ∘ i numeri naturali diversi da 0, detti *interi positivi*: 1, 2, 3...
  - ∘ i loro *opposti*, detti *interi negativi*: -1, -2, -3...
  - ∘ lo 0.
- $\mathbb{Q}$: i numeri razionali: sono di 2 tipi, riconoscibili dalla loro scrittura decimale (ma la distinzione è poco significativa perchè dipende dalla base 10 scelta per la scrittura dei numeri):
  - ∘ i numeri decimale limitati, come $2\,018$ e -2.018
  - ∘ un numeri decimali illimitati periodici, come $0.\overline{142\,857} = \frac{1}{7}$, ed eventualmente con *antiperiodo*: $0.08\overline{3} = \frac{1}{12}$

    → entrambi i tipi ammettono una scrittura sotto forma di frazione: $\frac{2018}{1}$, $-\frac{2018}{1000}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{12}$, rispettivamente
- $\mathbb{R}$: i numeri reali: sono di 2 tipi:
  - ∘ i razionali, qua sopra esposti
  - ∘ gli irrazionali: la loro scrittura decimale è un numero decimale illimitato non periodico, come

$$\sqrt{2} = 1.4142... \approx 1.41 \qquad \pi \approx 3.14$$

(Esistono poi i numero complessi C che non tratteremo).

1.1 Punto e virgola decimali, e punto a mezza altezza

Nella scrittura dei numeri con le cifre decimali (numeri “arabi”, di origine indiana)

$$0,\ 1,\ 2...9$$

ci sono 2 questioni:
– separare la parte intera dalle cifre decimali
– separare eventualmente le terne di cifre per facilitare la lettura.
Per risolvere le <u>2</u> questioni vengono *variamente usati* <u>4</u> simboli:
- la virgola

- il punto
- lo spazietto
- il punto a mezza altezza ·

Sulle calcolatrici, e nei testi tecnici, scientifici e divulgativi il punto e la virgola sono entrambi usati da alcuni come separatore delle migliaia, e da altri come separatore della parte intera dalle cifre decimali.
Di per sè la scrittura

$$9{,}800$$

ci lascia nel dubbio di che numero si tratti, se circa 10 o circa 10 000, e in testi e su calcolatrici diverse ha proprio quei 2 diversi significati!

Sì, è incredibile, ma di fatto questa è la situazione attualmente.

E potrebbe trattarsi di una quantità – espressa in qualche unità di misura – di una sostanza *necessaria* al corpo umano in piccolissime quantità, ma *tossica* in dosi molto maggiori; senza voler qua fare medicina, si consideri per esempio il selenio.

Incredibilmente *a tutt'oggi non esiste uno standard internazionale per il separatore della parte decimale.*

Il lettore troverà facilmente sulla rete che il numero e
vale circa 2.718 secondo quasi tutti i testi in inglese
vale circa 2,718 secondo la maggioranza dei testi in italiano.
Negli stati di lingua inglese e negli articoli scientifici internazionali in inglese di solito si usa il punto, e in Italia spesso la virgola.

Molti Autori che usano il punto come separatore decimale, usano la virgola come separatore delle migliaia... e viceversa:
Wikipedia in italiano dice che 1 tesla equivale a 10.000 gauss
Wikipedia in inglese dice che 1 tesla equivale a 10,000 gauss.

Ebbene, si tratta di *diecimila*.

E su calcolatrici diverse, materiali o virtuali, disponibili qua in Italia, il punto e la virgola hanno proprio quei 2 diversi significati! **Attenzione!**

In questo testo in generale useremo lo spazietto per separare le terne di cifre, sia prima che eventualmente dopo il punto decimale:

$$\pi^7 \approx 3\,020.293\,227\,78$$

e scriveremo in generale il punto per separare la parte intera dalla parte decimale

$$\pi \approx 3.141 < 4$$

ma ci consentiremo qualche virgola e pure qualche punto a mezza altezza (vedi dopo), in casi controllati, per abituare lo studente a questa varietà di scritture.
Usa il punto decimale e lo spazietto "facilitatore" l'importante National Institute of Standards and Technology, NIST, ente governativo statunitense, che per esempio per la costante di Faraday dà

$$96\,485.332\,12\ldots \text{ C mol}^{-1}$$

esattamente come Wikipedia in inglese.

Spesso si riesce a capire il significato del punto, o della virgola, dal contesto, e, sulla calcolatrice, provando a scrivervi numeri.

Usando il punto decimale si segue il miglior standard che sperabilmente si ritroverà negli articoli

scientifici internazionali di Farmacia, in lingua inglese. (Ma non può qua essere garantito).
Invece in farmacia in Italia in generale si troverà quasi l'opposto:
virgola per separare la parte intera dai decimali: $\pi \approx 3{,}141$
punto per separare le migliaia: 1.250 per milleduecentocinquanta.

Giustamente la *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano ci ricorda che

> **L'uso non standardizzato di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli, può indurre in errore e causare danni ai pazienti**

Senza qua voler fare *legislazione farmaceutica*, argomento articolatissimo e complessissimo, citiamo comunque da quel testo:

> usare il punto per separare i tre zeri delle migliaia o usare parole come 1 milione per favorire la corretta interpretazione (ad esempio, 1000 unità va scritto 1.000 unità, 10000 unità va scritto 10.000 unità)

Cioè praticamente l'opposto di come faceva questo testo nelle prime versioni, più conforme agli articoli scientifici che alla pratica di vendita in farmacia. Col tempo, questo testo si sta arricchendo di anche esempi che usano la virgola decimale.

Si veda ancora questo esempio, su come scriveremo noi:

il punto a mezzo indica la moltiplicazione→ $3{\cdot}673 = 2\,019$ ← *si noti lo spazietto*

(Altri separano con lo spazietto le cinquine di cifre).

Il punto a mezza altezza come punto/virgola decimale. Su certi testi tecnico-scientifici, talvolta antiquati ma talvolta modernissimi $3 \cdot 673$ indicherebbe quel numero minore di 4 che in italiano scriverebbero 3,673: cioè, alcuni usano il punto a mezza altezza come se fosse un punto/virgola decimale: ecco un esempio in articolo (sul cancro infantile, 2017) su rivista scientifica internazionale di alto livello, The Lancet Oncology: `Link->`

1.2 Numeri romani.

Per i numeri interi positivi esiste anche la scrittura in numeri romani. In questa trattazione elementare ci limitiamo ai primi 12, che si trovano nella numerazione dei capitoli.
Per esempio un cancro al IV stadio è più grave di uno al III stadio. E si consideri l'ossido di titanio (IV) o titanio diossido (il comunissimo colorante E171, ben sospettato di tossicità([2])), e addirittura

manganese(II) oxide
manganese(II,III) oxide
manganese(III) oxide
manganese(IV) oxide
manganese(VI) oxide
manganese(VII) oxide.

1.3 La notazione dei numeri con la E

Su molte calcolatrici e testi tecnico-scientifici, `E` (ma purtroppo anche `e`) indica $10^\wedge$, con esponente positivo o negativo, per esem-

[2] Si veda per esempio in `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/28106049` Food-grade TiO2 impairs intestinal and systemic immune homeostasis, initiates preneoplastic lesions and promotes aberrant crypt development in the rat colon. Scientific reports (2017), 7, 40373. Bettini S, Boutet-Robinet E, Cartier C, Coméra C, Gaultier E, Dupuy J, Naud N, Tachè S, Grysan P, Reguer S, Thieriet N, Rèfrègiers M, Thiaudiére D, Cravedi JP, Carriére M, Audinot JN, Pierre FH, Guzylack-Piriou L, Houdeau E.

pio
`6.022E23` $= 6.022 \cdot 10^{23} = 602\,200\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
`1.38E-23` $= 1.38 \cdot 10^{-23} = 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,013\,8$
(Approssimazioni del Numero di Avogadro e della Costante di Boltzmann, private delle unità di misura).
Ci si aspetti di trovare scritto anche `E+23` invece di `E23`, e purtroppo anche `e+23` ed `e-23`, con facile equivoco[3] col numero e.

(Ma non si confonda questo simbolo `E` con l'uguale simbolo che alcune calcolatrici danno... in caso di errore di calcolo! Per esempio immettendo 1/0).

Si noti che in certi contesti si usa il simbolo `K` o `k` per indicare le migliaia e cioè esso significa $\cdot 1\,000$, per esempio le 2.5 `K` *views* ossia visualizzazioni della pagina web della farmacia Cuore Integerrimo, ma bisogna essere pronti a trovare con lo stesso significato anche THD, cioè *thousand*.

1.4 Scrittura a mano

Sull'ulteriore problema della pessima calligrafia dei medici che scrivono le ricette mediche si veda "Poor handwriting remains a significant problem in medicine" del Journal of the Royal Society of Medicine, riportato su sito governativo statunitense: `Link->`

Citiamo anche dal Time, `http://content.time.com/time/health/article/0,8599,1578074,00.html`

> Doctors' sloppy handwriting kills more than 7,000 people annually. It's a shocking statistic, and, according to a July 2006 report from the National Academies of Science's Institute of Medicine (IOM), preventable medication mistakes also injure more than 1.5 million Amer-

[3] Su testi diversi, $3\,\mathrm{e} - 2$ può indicare $3 \cdot 10^{-2} = 0.03$ oppure $3\,\mathrm{e} - 2 \approx 6.154\,85$. Su WolframAlpha si eviti del tutto la notazione con `E` ed `e` perchè entrambi i simboli vengono usati *anche* per il numero e, con facile possibilità di errori; si scriva invece `6.022 10^23`.

> icans annually. Many such errors result from unclear abbreviations and dosage indications and illegible writing

Con l'informatizzazione del sistema sanitario e farmaceutico è verosimile che quel dato (7000 morti/anno negli USA) diminuisca, e similmente in Italia.
E certo, se dei medici si ostinano a scrivere ,5 per 0,5 "risparmiando" uno zero, anche l'informatizzazione potrebbe non bastare. Tale scrittura è esplicitamente vietata dalla predetta Raccomandazione (settembre 2018) del Mistero della Salute italiano.

Se i problemi della scrittura a mano sono in diminuzione, invece con l'incombente anglicizzazione del linguaggio, può presentarsi un nuovo problema, con la lettura al telefono dei nomi dei farmaci.

1.5 Problematicità

Praticamente in tutto il mondo per scrivere i numeri si usano le cifre arabe (in effetti di origine indiana):

$$0,\ 1,\ 2...9$$

e questa è una buona notizia. Anche gli arabi, che scrivono da destra a sinistra, scrivono i numeri nel verso "nostro", cioè 243 significa 243 anche in un testo in arabo.

Superato questo livello minimo di unitarietà, la difformità nella scrittura dei numeri, in questo inizio di XXI secolo, è *sconcertante*.

Non si intende qua riferirsi a qualche medico che, fino a che non verrà seppellito lui e il suo mondo, si ostinerá a scrivere le ricette usando i numeri romani, pure con "ss" per 1/2, e magari con calligrafia quasi illeggibile come da stereotipo.

Un testo italiano sarà sufficientemente scientifico perchè il numero 654.321 sia circa 654, o é di livello cosiì divulgativo che quel numero é... un migliaio di volte più grande?

Veramente, nella pratica, c'è da aspettarsi un po' di tutto: attenzione!

Si veda su sito ministeriale italiano questo documento farmaceutico (anno 2018)

Link-

il misterioso numero nell'ultima riga della penultima pagina (le pagine non hanno numero...) e si studi un po' la questione e si capisca che numero vorrebbe rappresentare quella scrittura.

L'intelligenza artificiale online WolframAlpha usa il simbolo E sia per il numero e, sia per la notazione scientifica dei numeri, con serie possibilita' di errori per l'utente:

WolframAplha interpreta l'input 3 E6 come 3x6xe cioe' $18e \approx 48.93$

WolframAlpha interpreta l'input 3E6 come $3{\cdot}10^6$ cuioe' 3 000 000

(WolframAlpha interpreta l'input 2E6 come Groton Municipal Airport; e' un eccesso di intelligenza e di interpretazione, si direbbe).

Non vogliamo qua estendere piu' di tanto il discorso, ma si noti che se dai dati grezzi risulta che un farmaco e' stato somministrato dal 11/3 al 12/8, calcoliamo che e' stato somministrato

??? giorni se e' avvenuto in Europa: dal 12 marzo al 12 agosto

??? giorni se e' avvenuto negli Stati Uniti: dal 3 novembre all'8 dicembre.

Altre problematicitá sorgono dalle unitá di misura, e qua accenniamo soltanto al microgrammo, da alcuni indicato con $\mu\, g$, da altri con mcg, e da altri con ug...

La predetta Raccomandazione ministeriale esige la parola *microgrammi* completa.

Leggiamo su Wikipedia:

”The microgram is typically abbreviated ”mcg” in pharmaceutical and nutritional supplement labelling, to avoid confusion, since the μ prefix is not always well recognized outside of technical disciplines (...) In the United Kingdom, because serious medication errors have been made from the confusion between milligrams and micrograms when micrograms has been abbreviated, the recommendation given in the Scottish Palliative Care Guidelines is that doses of less than one milligram must be expressed in micrograms and that the word microgram must be written in full”
Ma attenzione ai testi antichi, perché, ci avverte la stessa pagina di Wikipedia,

”The expression ”mcg” is also the symbol for an obsolete CGS unit of measure known as the ”millicentigram”, which is equal to 10 μg“
Ancora, la stessa agina ci avverte in nota che

”The practice of using the abbreviation ”mcg” rather than the SI symbol ”μg” was formally mandated in the US for medical practitioners in 2004 by the Joint Commission on Accreditation of Healthcare Organizations (JCAHO) in their ”Do Not Use” List: Abbreviations, Acronyms, and Symbols because ”μg” and ”mg” when handwritten can be confused with one another, resulting in a thousand-fold overdosing (or underdosing).”

1.6 Note sugli errori medici e farmaceutici

Leggiamo sul sito dell’Organizzazione Mondiale della Sanità in http://www.emro.who.int/emhj-volume-17/issue-2/article9.html

> The issue of medication prescribing errors was little discussed until (...) Barker and McConnell in the United

> States of America (USA) first demonstrated that medication errors occur more frequently than suspected. They estimated a rate of 16 errors per 100 doses (...) errors by pharmacists in dispensing drugs are an important cause of medication error, and many factors have been identified. The reported rate of dispensing errors ranges from 3.8% to 12.4%

SONO PERCENTUALI MOSTRUOSE [NdS], speriamo siano ben state ridotte dagli anni a cui si riferiscono quelle ricerche (1962 e 1991).

Leggiamo riportato su sito governativo statunitense in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9559708

> Forty-two percent of errors were considered to put the patient at risk for a serious or severe preventable adverse outcome. Errors in decimal point placement, mathematical calculation, or expression of dosage regimen accounted for 59.5% of dosage errors. The dosage equation was wrong in 29.5% of dosage errors.

1.7 Scrittura percentuale dei numeri

Altra forma di scrittura dei numeri è la forma percentuale:

$$x = y\,\% \qquad con\; y := 100\,x$$

utilizzabile per qualunque numero reale, per esempio

$$0 = 0\% \quad 1 = 100\% \quad \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$-0.3 = -30\% \quad \frac{4}{3} = 1.\overline{3} = 133.\overline{3}\% \approx 133.3\% \quad \frac{3}{2} = 1.5 = 150\%$$

Ma si faccia attenzione che nelle Scienze Applicate la scrittura

$$a \pm 10\%$$

a meno che a non sia una percentuale, caso che consideriamo dopo, non indica affatto nè i 2 numeri $a \pm 0.1$ (che sarebbe il significato pedissequo in Matematica) bensì l'intervallo $[a - 0.1\,a, a + 0.1\,a]$.
E nel caso generale, con una percentuale qualunque fra 0% e 100%,

$$x = a \pm t\,\% \text{ significa } x \in [(1 - t\,\%)\,a, (1 + t\,\%)\,a]$$

Naturalmente invece se si tratta di 2 percentuali il significato è quello ovvio:

$$42\% \pm 5\% \text{ indica l'appartenenza all'intervallo } [37\%, 47\%]$$

ESERCIZI SULLA LEZIONE 1

ESERCIZIO $\approx$
Si consideri una pillola ipotetica ma comunque di apparenza alquanto normale – non viene qua seguito alcuno standard legale o industriale – il cui volume interno abbia la forma di un cilindro di diametro 0,4 cm e lunghezza 1,2 cm completato con due semisfere.
Calcolatone il volume, lo si riduca di $^1/_4$.
Si ricordi che cilindri e prismi hanno volume *area di base* $\times$ *altezza* qualunque forma abbia la base.

SVOLGIMENTO
Chiaramente qua è stato seguito lo standard della virgola decimale.
Prima di tutto osserviamo che nel testo viene dapprima chiamata *lunghezza* del cilindro quella che di solito in geometria elementare, e in particolare nella formula, viene chiamata *altezza* del cilindro: abituiamoci a tale ambiguità.
Ricordiamo la formule dell'area del cerchio e del volume della sfera in funzione dei raggi:

$$\pi\, r^2 \qquad \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

La base del cilindro è un cerchio di raggio pari alla metà del diametro

$$r = 0{,}2\,\mathrm{cm}$$

e quello è anche il raggio delle semisfere.
Avendosi 2 semisfere, calcoleremo il volume di 1 sfera e lo sommeremo al volume del cilindro, la cui area di base è $\pi\, r^2$, facendo i calcoli dapprima senza unità di misura:

$$V_{sfera\,unione\,delle\,2\,semisfere} + V_{cilindro} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 + \pi\, r^2\, h =$$

$$\approx \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^3 + 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1{,}2 \approx 0{,}184213$$

che ora riduciamo di $^1/_4$, come richiesto, con la formula $x \mapsto x - \frac{1}{4}\,x$ (da tenere ben distinta dalla $x \mapsto \frac{1}{4}\,x$ corrispondente a “ridurre *a* $^1/_4$”)

$$\approx 0{,}184213 - \frac{0{,}184213}{4} \approx 0{,}13816$$

e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{0{,}138\ \mathrm{cm}^3}$$

(Si tratta di 138 mm^3, molto approssimativamente $\frac{1}{7}$ di centimetro cubo ovvero millilitro).

NOTA. Le scritture frazionarie come $^1\!/_4$ e $\frac{1}{7}$ vengono escluse dalla *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano:

> evitare l'uso delle frazioni (ad esempio, $^1\!/_2$ compressa ovvero "metà compressa" pu essere frainteso con 1 o 2 compresse) e sostituire, ove possibile, il farmaco con altra forma farmaceutica avente il dosaggio necessario

ma esse continueranno a trovarsi in un'infinità di testi, anche di Farmacia.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\approx$ Il punto e la virgola sono entrambi usati da alcuni come separatore delle migliaia, e da altri come separatore della parte intera dalle cifre decimali, ma spesso si riesce a capire quale dei significati ha il punto, o la virgola, dal contesto. Si considerino questi dati relativi a particelle ovvero corpuscoli, da considerare semplificatamente dischetti piani:

	PARTICELLE A	PARTICELLE B	PARTICELLE C
Diametro (nm)	987	12,140	92,500
Vita media (h)	14.5	56	122

Si ipotizzi una particella della stessa forma, che abbia un diametro ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C. Qual è l'area di questa particella, in nm^2 (che sono i nanometri quadrati)? Si esprima la soluzione usando lo spazietto per separare le migliaia e il punto decimale se ci sono decimali.

SVOLGIMENTO

La presenza del dato 14.5 ci indica che il punto non è usato come separatore delle migliaia ma come punto decimale; e invece la virgola è usata come separatore delle migliaia, in particolare nel diametro delle particelle C:

$$d = 92\,500\,nm$$

(qua meglio trascritto con lo spazietto invece della confondente virgola come spaziatore delle migliaia; ma purtroppo i testi tecnici e scientifici continuano a presentare queste problematiche e bisogna abituarsi ad affrontarle; per esempio si veda la tabella in https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/).
Ora però dobbiamo occuparci dell'ipotetica particella col diametro d' ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C

$$d' = d - \frac{1}{5}\,d = \frac{4}{5}\,d = \frac{4}{5}\,92\,500\,nm =$$
$$= \frac{4 \cdot 92\,500}{5}\,nm = 74\,000\,nm$$

e allora raggio (la metà)

$$r = 37\,000\,nm$$

e ricordando che l'area del cerchio è πr^2 e che $\pi \approx 3.14$

$$\boxed{\approx 4\,298\,660\,000\,nm^2}$$

ma in effetti la precisione è illusoria, infatti con $\pi \approx 3.14$ intendiamo precisamente

$$3.135 \leq \pi < 3.145$$

e allora per l'area $A = \pi\,r^2$ vale

$$4\,291\,815\,000 \leq A < 4\,305\,505\,000$$

e allora come risultato preferiremo dare piuttosto

$$\boxed{\approx 4\,300\,000\,000\,nm^2}$$

(Eviteremo per adesso scritture come 4.3E9 o l'equivalente $4.3 \cdot 10^9$, e 4.30E9 o l'equivalente $4.30 \cdot 10^9$, e 4.300E9 o l'equivalente $4.300 \cdot 10^9$, eccetera, che dal punto di vista matematico rappresentano lo stesso numero ma nelle scienze applicate corrispondono a diversi livelli di precisione ovvero di *cifre significative*).
Usando un'approssimazione di π molto più precisa otterremmo

$$\approx 4\,300\,840\,342.764\, nm^2$$

con precisione sostanzialmente inutile (e pure fuorviante, perchè *verosimilmente* il dato 92 500 è esso stesso un'approssimazione). (Ma in generale per π usiamo la semplice approssimazione 3.14).

Come indicazione generalissima, cercheremo i fare i calcoli con 5 o 6 cifre significative, e di dare i risultati con 3 o 4 cifre significative.
(92 500 ha 3 cifre significative se non si specifica che ne ha 4 o 5).

2 Logica delle proposizioni

(Contro)esempi stupefacenti ci indicano che le affermazioni matematiche vanno dimostrate, non basta fare un "mostra e dimostra" come i Peanuts[(4)]. (Ma in generale qua non faremo dimostrazioni).

Le illusioni ottiche ci indicano che è inappropriato usare solo figure per fare dimostrazioni.

Le ambiguità linguistiche ci indicano che è inappropriato usare solo testo libero del linguaggio comune per fare dimostrazioni.

La varietà delle lingue ci induce a cercare un **preciso linguaggio matematico simbolico** che prescinda dalle lingue.

Prima di tutto consideriamo il simbolo $=$ da intendersi nel senso "è lo stesso elemento". (Due rette perpendicolari r e s sono senz'altro *uguali* nel senso del linguaggio comune ma dal punto di vista matematico sono *diverse*: $r \neq s$, non è la stessa retta). Per esempio $area_\Delta = \frac{1}{2}\, b\, h$. In generale scriveremo $:=$ e non $=$ nelle definizioni, come $f(x) := x^2$, e $\equiv$ nelle identità, come $(x+1)^2 \equiv x^2 + 2\,x + 1$. Talvolta distingueremo anche l'uguale delle equazioni, che comunque è proprio un $=$, scrivendo $\overset{EQ}{=}$.

Supporemo concetto primitivo (noto) le proposizioni.

Introdurremo alcuni simboli logici rigorosi.

Indicheremo con $\Rightarrow$ l'*allora*, ovvero meglio *implica*:
per esempio
$1009 \cdot 2 = 2018 \Rightarrow 2018$ è pari.
Inversamente, il *non implica*:

[4] Per esempio $n^2 + n + 41$ dà un numero primo per $n = 0, 1, 2, ..., 38, 39$ ma non per $n = 40$.

per X quadrilatero
equilatero $\not\Rightarrow$ equiangolo. Controesempio: rombo non quadrato.
Il *controesempio* è un esempio che dimostra falsità.

Indicheremo con $\Leftarrow$ il *perchè*:
per esempio
2018 è pari $\Leftarrow 1009 \cdot 2 = 2018$
Si noti che p$\Rightarrow$q si può scrivere q$\Leftarrow$p.

Indicheremo con $\Leftrightarrow$ il *se e solo se*
Per esempio:
X triangolo:
equiangolo $\Leftrightarrow$ equilatero

Supponiamo noti il *vero* e il *falso*.
Li denoteremo V e F ma internazionalmente possono trovarsi indicati T e F e in vari altri modi.

Vediamo 4 *connettivi logici*: *non*, *et*, *vel*, *aut*. (Il primo a rigore è un operatore logico *unario*).

Tavola di verità del *non*

P $\neg p$ scritto anche $\tilde{p}$ o semplicemente *non p*
V F
F V

Per esempio $p :=$"3 è pari" ha il *valore di verità* F, $\tilde{p}$ invece V.
$\tilde{p}$ potremo scriverla "non 3 è pari" o meglio "3 non è pari" e in ogni caso è equivalente alla "3 è dispari".

Continuiamo con l'*et* ovvero $\wedge$ che significa *e*:
A gennaio sosterrò Matematica e Fisica.
(Se farò solo 1 o 0 di essi mi accuseranno di falsità).
Tavola di verità dell'*et*:

P q p *et* q ... proposizione *composta*

V V V
V F F
F V F
F F F

Continuiamo col *vel* ovvero $\vee$ che significa *o* ovvero *oppure*:
A gennaio sosterrò Matematica o Fisica.
(Se sosterrò entrambi nessuno mi accuserà di falsità).
Questa è la tavola di verità del *vel*:

P q $p \vee q$
V V V
V F V
F V V
F F F

Purtroppo sia il *vel* che l'*et* talvolta vengono resi con una virgola, e sperabilmente si capisce il senso dal contesto:

$\{(x, y)|x = 3, 4\}$ qua vale $x = 3 \vee x = 4$: sono 2 rette verticali
$\{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0\}$ qua vale $\wedge$: è il I quadrante

Il *vel* è molto diverso dall'*aut*, l'*o esclusivo*, in italiano (linguaggio comune) ugualmente espresso con *o* oppure *oppure* come il *vel*:
Mi fidanzerò con con Asdrubala o Berenice.
Questa è la tavola di verità dell'*aut*:

P q p *aut* q
V V F
V F V
F V V
F F F

Si dice *tautologia* una proposizione sempre vera.
Esempio: $p \vee \neg p$

Si dice *contraddizione* una proposizione sempre falsa.

Esempio: $p \wedge \neg p$

Proposizioni *equivalenti*: hanno la stessa tavola di verità.
Esempio: (p aut q) $\equiv$ (p non q) vel (q et non p)

ESERCIZIO$_{\mu 2018\, modificato}$
Una certa condizione patologica X, è diagnosticata se:
c'è il sintomo A
e
c'è il sintomo B oppure il sintomo C
oppure (vel)
c'è il sintomo D ma non il sintomo A.
Cioè, indicando la negazione con la tilde, con ovvio significato dei simboli,

$$(a \wedge (b \vee c)) \vee (d \wedge \tilde{a}).$$

Indicando con V e F il *vero* e il $falso$, si conduca di passaggio in passaggio il calcolo relativo ad un paziente che ha i soli sintomi A, C, D, concludendo la diagnosi.

SVOLGIMENTO
Si ha
sintomo A presente: a è vera, V
sintomo B non presente: b è falsa, F
sintomo C presente: c è vera, V
sintomo D presente: d è vera, V
e si calcola

$$(V \wedge (F \vee V)) \vee (V \wedge \tilde{V})$$

$$(V \wedge V) \vee (V \wedge F)$$

$$V \vee F$$

$$V$$

e in conclusione abbiamo la diagnosi

$$\boxed{\text{La condizione patologica } X \text{ è presente}}$$

•••

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Una certa terapia verrà supportata da un governo se (e solo se)

è molto efficace e costa molto

OPPURE se

è solo abbastanza efficace e non costa molto.

(Supponendo in qualche modo determinati i significati precisi dei termini).

Con ovvio significato dei simboli

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q).$$

Nel caso specifico di una terapia che sia solo abbastanza efficace e costi molto si attribuiscano i valori di verità V o F a p, q, r, e si valuti di passaggio in passaggio fino al risultato finale il valore di verità dell'espressione soprascritta, concludendo se la terapia verrà supportata o no.

(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).

SVOLGIMENTO

Si hanno queste 3 proposizioni, coi loro valori di verità nel caso specifico:

F $\quad p =$"la terapia è molto efficace"

V $\quad q =$"la terapia costa molto"

V $\quad r =$"la terapia è solo abbastanza efficace"

Si ha quindi successivamente

$$(F \wedge V) \vee (V \wedge \neg V)$$

$$F \vee (V \wedge F)$$

$$F \vee F$$

F (falso)

La terapia non verrà supportata

3 Prime nozioni sugli insiemi

3.1 Nozioni di insieme, elementi e appartenenza

In questa trattazione elementare, la nozione di *insieme* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*. Possiamo dire che un insieme è, in qualche modo, una *raccolta* di elementi, o *classe* (di elementi). Ma anche la nozione di *elemento* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*, e anche la nozione di *appartenenza* di un elemento ad un insieme.
Agli insiemi *di solito* si dà nome una lettera latina maiuscola, come A e X, ma per alcuni insiemi si usano grafie particolari, per esempio l'insieme dei numeri naturali viene denotato con $\mathbb{N}$.
L'*appartenenza* (concetto primitivo) di un elemento ad un insieme si indica col simbolo $\in$, per esempio con $3 \in \mathbb{N}$, e la sua negazione con $\notin$: $-3 \notin \mathbb{N}$. Scriveremo equivalentemente prima $\mathbb{N}$ e poi 3, col simbolo $\in$ scritto specularmente, e similmente per $\notin$.
Come *variabili* atte a rappresentare un elemento indeterminato di un insieme, *di solito* si usano lettere latine minuscole: a, x...
È ovvio che un insieme si può considerare assegnato se è univocamente *chiaro*[5] se un elemento vi appartiene o no, per esempio le persone *simpatiche* non costituiscono un insieme. Quelle *sane*, o *povere*, sì, se si suppone che da qualche parte siano stati ben definiti quegli attributi.
Un insieme può essere determinato *per elencazione* (*principio di estensione*) elencandone gli elementi fra parentesi graffe, per esempio $\{3, 5, 8\}$, eventualmente con puntini di sospensione per indicare elementi non trascritti ma che si suppone il lettore possa capire quali sono, per esempio $\{0, 1, 2, 3...\}$, l'insieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali*.
Tipici insiemi sono i *singoletti*, come $\{x\}$, $\{Milano\}$, $\{0\}$, eccetera, con un solo elemento.

[5] La questione della menzionata *chiarezza* non è banale, ma qui non la approfondiremo; si noti comunque che, per esempio, i divisori di $1 + 2018^{2019}$ costituiscono un insieme, nonostante possa essere improbo stabilire se qualche determinato numero vi appartenga.

Gli insiemi si possono anche rappresentare (*principio di astrazione*) con la *proprietà caratteristica*, cioè *caratterizzante*, degli elementi, per esempio $\{x \in I\!N | x\, pari\}$, che magari talvolta scriveremo solo $\{pari\}$, che però potrebbe lasciarci nel dubbio, se non è chiaro dal contesto, che si intendesse $\{x \in \mathbb{Z} | x\, pari\}$, comprendendo per esempio -8. Il simbolo $|$ si legge "tale che" e altre volte si scrive $:$ o t.c..
Naturalmente gli insiemi poi possono rappresentarsi graficamente con ovali racchiudenti i loro elementi (*diagrammi di Eulero-Venn*).

3.2 Uguaglianza; insieme vuoto; inclusione

Due insiemi si dicono uguali se hanno gli stessi elementi. Anche se hanno diverse definizioni, per esempio

$$X := \{divisori\ di\ 6\} = \{1, 2, 3, 6\} =$$
$$= Y := \{numeri\ di\ 3\ lettere\ in\ italiano\}$$

Esiste un unico insieme privo di elementi, l'*insieme vuoto*, denotato $\emptyset$.

Se ogni elemento di X appartiene a Y si dice che X è contenuto in Y:

$$X \subseteq Y \qquad \text{(equivalente a } Y \supseteq X\text{, contiene)}$$

3.3 Cardinalità, insiemi finiti e infiniti

In questa trattazione elementare la *cardinalità* di un insieme finito è il numero dei suoi elementi.
La cardinalità è indicata con $\#E$ (e da altri con card$E$ o $|E|$).
Per esempio $\#\{a, b, c\} = 3$.
Supponiamo noti i concetti di insieme finito e insieme infinito↑.

3.4 Insieme delle parti

L'insieme delle parti $\mathscr{P}(A)$ di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. (Compresi ovviamente l'insieme vuoto e A

stesso). In simboli

$$\mathscr{P}(A) := \{X : X \subseteq A\} .$$

L'insieme delle parti di A si chiama anche *insieme potenza* di A.
Trattazione elementare valida per i soli insiemi finiti.
Per esempio se $A := \{a, b, c\}$ allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} .$$

Se un insieme ha n elementi allora (teorema) il suo insieme delle parti ha 2^n elementi. Cioè, usando il simbolo # della cardinalità, qua nel significato semplice di *numero di elementi*,

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^{\#A} .$$

Nell'esempio $\mathscr{P}P(A)$ ha 8 elementi, cioè 2^3, perchè A ha 3 elementi.
È possibile una trattazione ad un livello superiore↑, valida per tutti gli insiemi, finiti e infiniti.

ESERCIZIO$_{\mu}$
Supponiamo che ad un farmacista, cui normalmente arrivano un centinaio di persone al giorno, una volta ne arrivino un migliaio, lamentando svariati sintomi fra una mezza dozzina di sintomi. Volendo individuare l'insieme di sintomi più caratteristico della nuova situazione, per affrontarla validamente, si propone di elencare tutti i sottoinsiemi di sintomi, da 2 sintomi fino a 6 sintomi. Quanti elementi avrà questa lista di liste di sintomi?

SVOLGIMENTO
I sottoinsiemi dell'insieme di 6 sintomi sono (insieme delle parti) 2^6 ma dobbiamo escludere i 6 insiemi costituiti da 1 solo sintomo e 1 insieme costituito da 0 sintomi (l'insieme vuoto) e allora in tutto

$$2^6 - 6 - 1 =$$

(che naturalmente significa $(2^6-6)-1$: cioè in assenza di parentesi facciamo le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, non faremo certo prima $6-1$, che produrrebbe un errore, bensì prima (2^6-6))

$\boxed{57}$

Ecco per completezza alcuni elementi della lista con 57 liste di sintomi, denotati con S1,...,S6:

S1 S2 (1^ lista)
S1 S3
...
S1 S6
S2 S3
S2 S4
...
S9 S10
S1 S2 S3
S1 S2 S4
...
S1 S2 S3 S4 S5 S6 (57^ lista).

4 Altra logica e altra insiemistica

4.1 Predicati e insieme di verità

Un predicato è una sorta di proposizione ma con una o più variabili, le quali potranno essere denotate con qualunque lettera e in particolare x, y, z..., come per esempio

$$q(z) := \text{“}x \text{ è sano”} \text{ (si supponga definito il concetto)}$$

$$p(z) := \text{“}z \text{ è una retta obliqua del piano cartesiano”}$$

che di per sè non sono nè vere nè false, dipende da z. Per esempio

$$p(\text{asse } x) \text{ è falsa}$$

$$p(\text{bisettrice del I e III quadrante}) \text{ è vera}$$

Ecco altri predicati, col loro dominio:
$x \in \mathbb{N}$, $p_1(x) :=$“x è un numero pari” ($p(-8)$ non ha senso)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_2(x) :=$“x è un numero pari” ($p(-8)$ è vera)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_3(x) :=$“$x^2 = 2$”
$x \in \mathbb{R}^+$, $p_4(x) :=$“$x^2 = 2$” ($\mathbb{R}^+$ è l'insieme dei reali positivi)
$x \in \mathbb{R}$, $p_5(x) :=$“$x^2 = 2$”
$x \in$ {residenti in Italia}, $q_1(x) :=$“x è sano” (si supponga definito)
$x \in$ {residenti in Italia}, $q_2(x) :=$“x è diabetico” (come sopra)
$x, y \in \mathbb{Z}$ $t_1(x, y) :=$“x divide y”
$x, y \in$ {residenti in Italia} $t_2(x, y) :=$“x e y sono coniugi”

L'*insieme di verità* di un predicato è il sottoinsieme del dominio in cui il predicato è vero:
insieme di verità di p_3: $\emptyset$
insieme di verità di p_4: $\{\sqrt{2}\}$
insieme di verità di p_5: $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

4.2 Quantificatori

Esistono questi 2 *quantificatori*, dal significato ovvio:
Quantificatore *esiste*, $\exists$

Quantificatore *per ogni*, $\forall$

Esempio 1:
"$(\exists x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$" (cioè "$(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione vera
Esempio 2:
"$(\forall x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$" (cioè "$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione falsa
Esempio 3:
"$(\exists x \in \mathbb{Z})\, t_1(x, y)$" (cioè "$(\exists x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y (fra l'altro sempre vero, cioè vero $\forall y \in \mathbb{Z}$)
Esempio 4:
"$(\forall x \in \mathbb{Z})\, t_1(x, y)$" (cioè "$(\forall x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y (fra l'altro sempre falso, cioè falso $\forall y \in \mathbb{Z}$)

Indicheremo con $\exists!$ l'espressione "esiste un unico".

4.3 Regole di negazione

La negazione di

"(tutti) i paperopolesi sono onesti"

non è

"(tutti) i paperopolesi sono disonesti", no, affatto!

bensì

"esiste (almeno) un paperopolese disonesto".

Cioè, in simboli e più in generale,

$$\neg((\forall x \in E)p(x)) = (\exists x \in E)\neg p(x)$$

e vale anche l'altra negazione

$$\neg((\exists x \in E)p(x)) = (\forall x \in E)\neg p(x)$$

Esercizio. Si trascriva quest'ultima come sopra, con "italiani" e "sani".

Esercizio. Si neghi "per ogni malattia esiste una cura".

4.4 Prodotto cartesiano

Si chiama *prodotto cartesiano* di 2 insiemi X e Y l'insieme denotato con $X \times Y$ delle *coppie ordinate*[6] (x, y) con $x \in X$ e $y \in Y$. In simboli

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \; et \; y \in Y\} \, .$$

L'insieme X può essere finito o infinito, e così pure Y.
Se X e Y sono finiti allora (teorema[7], ovvio)

$$\#(X \times Y) = (\#X) \cdot (\#Y)$$

cioè la cardinalità del prodotto cartesiano di 2 insiemi è il prodotto delle cardinalità dei 2 insiemi. Per esempio

$$\{a, b, c\} \times \{\alpha, \beta\} = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\}$$

ha $2 \cdot 3 = 6$ elementi, che sono coppie ordinate.
Similmente si definisce il prodotto cartesiano di 3 insiemi, composto dalle terne ordinate, e di n elementi, composto dalle n-uple; e si estende banalmente il soprascritto teorema sulle cardinalità.

ESERCIZIO$_\mu$ Supponiamo in via del tutto ipotetica che una certa molecola possa completarsi in un punto con uno qualunque fra gli elementi con numero atomico da 58 a 71 (lantanoidi diversi dal lantanio) e in altro punto con uno qualunque fra in primi 5 di essi. (Senza voler qua fare farmacologia, si pensi comunque ai *farmaci chelanti*). In quanti modi può completarsi la molecola? E se aggiungiamo l'ipotesi che in ogni caso non si completa con due atomi uguali?

SVOLGIMENTO

I lantanoidi diversi dal lantanio, con numeri atomici

$$58, 59, ..., 70, 71$$

[6] Una definizione rigorosa di coppia ordinata (x, y) è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ma in questa trattazione supponiamo di per sè chiaro il concetto.

[7] Questo teorema è vero anche per insiemi infiniti ma allora la cardinalità risultante è infinita e non ha più il significato elementare qua considerato di *numero di elementi*.

sono $71 - 57$ cioè 14.
La coppia ordinata di atomi atta a completare la molecola può costituirsi (prodotto cartesiano) in $14 \cdot 5 =$

$$\boxed{\text{a) 70 modi}}$$

Se aggiungiamo l'ipotesi che la molecola non può completarsi con due atomi uguali, dobbiamo escludere 5 casi, restandone $70 - 5$ cioè

$$\boxed{\text{b) 65 modi}}$$

4.5 Diagrammi e grafici

Ogni rappresentazione grafica di dati la diremo *diagramma*. Fra essi ci sono i ben noti diagrammi a torte per le percentuali, i grafi usati per le mappe cognitive, gli istogrammi che vederemo. E i *grafici* in senso matematico (sebbene a livello divulgativo tutti i diagrammi vengano chiamati grafici):
un sottoinsieme G di $X \times Y$ tale che $\forall x \, \exists! \, y \, t.c. \, (x, y) \in G$.

●●●

ESERCIZIO.$_\mu$ Consideriamo un linguaggio di programmazione in cui le variabili possono avere un nome composto da una lettera (inglese) maiuscola o da una lettere seguita da una cifra (decimale). Quanti sono i possibili nomi di variabile?

SVOLGIMENTO

L'insieme dei nomi di variabile di 2 caratteri è in corrispondenza biunivoca col prodotto cartesiano

$$\{A, B, ..., Z\} \times \{0, ..., 9\}$$

che ha $26 \cdot 10 = 260$ elementi. Considerando anche i 26 nomi di variabile di un carattere (lettera maiuscola)

si hanno in tutto 286 possibili nomi di variabile

5 Logica e insiemistica di insiemi e funzioni

5.1 Operazioni insiemistiche e logiche a confronto

Consideriamo gli insiemi come sottoinsiemi di un *insieme universo*, in generale chiamato U ma non necessariamente, che potrebbe essere per esempio $\mathbb{R}$, oppure {residenti in Italia}.

Insieme complementare di 1 insieme:
$A^C := \{x \in U | x \notin A\}$ cioè $\neg(x \in A)$

Insieme intersezione di 2 insiemi:
$A \cap B := \{x \in U | x \in A \wedge x \in B\}$

Insieme unione di 2 insiemi:
$A \cup B := \{x \in U | x \in A \vee x \in B\}$

Insieme differenza simmetrica di 2 insiemi:
$A \Delta B := \{x \in U | x \in A \; aut \; x \in B\}$

Si hanno allora queste 4 corrispondenze fra logica e insiemistica
^{C} $\neg$
$\wedge$ $\cap$
$\vee$ $\cup$
aut Δ

Si definisce poi l'insieme differenza di 2 insiemi:
$A \setminus B := \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$

Seppure non ci proponiamo di impararle a memoria, valgono (teorema) queste ulteriori corrispondenze fra simboli logici e insiemistici:
2 *involuzioni*:
$(A^C)^C = A$
$\neg(\neg p) = p$

4 *proprietà distributive* (corrispondentisi a coppie)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2 proprietà associative, 2 Leggi di De Morgan, che il lettore interessato troverà facilmente, eccetera.

Due insiemi si dicono disgiunti se hanno intersezione vuota.
Per esempio $\{italiani\ sani\}$ e $\{italiani\ diabetici\}$.

Si definisce *partizione* di un insieme una sua suddivisione in sottoinsiemi disgiunti. Quella soprascritta non dà certo una partizione dell'insieme $\{italiani\}$, com'è invece $\{\{sani\}, \{malati\}\}$ e $\{\{poveri\}, \{benestanti\}, \{ricchi\}\}$ (al solito, supposti ben definiti i termini).

5.2 Funzione, immagine, controimmagine, composta

Una legge che ad ogni elemento di un insieme D detto *dominio* associa 1 elemento di un insieme C detto *codominio* si chiama *funzione* definita in D a valori in C:

$$f : D \to C$$

Ad ogni funzione daremo un nome, di solito di 1 lettera[8], per esempio f oppure y oppure a, e la *variabile indipendente*, che varia nel dominio, la indicheremo con un nome qualsiasi, di solito di 1 lettera, per esempio scriveremo

$$f(x) := x^2$$

e poi sarà per esempio $f(2y) = 4y^2$, e $f(\alpha + 1) = \alpha^2 + 2\alpha + 1$ con variabili y e poi α, mentre la f è la funzione di prima.

[8] Una funzione con nome di più lettere, anche con la variabile di più lettere, potrebbe per esempio essere $area(lato) = lato^2$, che dà l'area del quadrato in funzione del lato.

Esempi di funzioni definite in $\mathbb{R}$, o, volendo, suoi sottoinsiemi, e a valori in $\mathbb{R}$:

$f(x) := 3\,x$ triplicare
$g(x) := \frac{x}{3}$ ridurre a un terzo ovvero al $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$
$h(x) := \frac{2}{3}\,x$ ridurre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$
$k(x) := \frac{4}{3}\,x$ aumentre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$
$m(x) := 2.4\,x$ portare al 240% del valore iniziale ovvero aumentare del 140%
$r(x) := x^3$ elevare alla terza ovvero al cubo
$s(x) :=\sqrt[3]{x}$ estrarre la radice terza ovvero cubica
$t(x) := \sqrt{x}$ estrarre la radice quadrata, dom$f$: $x \geq 0$

Si definiscono 2 insiemi e 1 funzione:
• im$f$: $\{f(x) \in \text{codom} f | x \in \text{dom} f\}$ immagine di f
• $f^{-1}(E) := \{x \in \text{dom} f | f(x) \in E\}$ controimmagine di un sottoinsieme E di codom$f$ (ma attenzione→ alla simbologia del $^{-1}$)
• $f(g(x))$ la funzione composta: si "f-izza" la "g-izzazione" degli elementi, per esempio con $a(t) := t^2$ e $b(t) := t + 1$ si ha

$$a(b(t)) = (t + 1)^2 \qquad b(a(t)) = t^2 + 1$$

5.3 Funzioni definite per numeri naturali: le successioni

Per la variabile indipendente spesso useremo i nomi n, m, h, k se il dominio è un insieme di numeri interi, per esempio $\mathbb{N}$. In questo caso potremmo dare a tali funzioni nomi $y(n)$ o $a(n)$ ma più spesso useremo le notazioni y_n, a_n e in ogni caso le funzioni definite su $\mathbb{N}$ (o anche su una sua semiretta e cioè per $n \geq n_0$) le chiameremo *successioni*, per esempio la *successione di Fibonacci*, di solito[9]

[9] Esiste anche una definizione *in forma chiusa*:

$$a_n := \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \qquad n = 1, 2, ... \quad \phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

(e ϕ è la nota *sezione aurea*)

definita *per ricorrenza*: $a_1 := 1$, $a_2 := 1$, $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 3, 4, ...$ Valori:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 55...$$

(Essa è in qualche modo correlata al tipo di ampliamento di una popolazione di organismi – fu studiata da Fibonacci nel medioevo per modellizzare l'accrescimento di una popolazione di conigli – ovvero anche all'espansione di un'epidemia nella fase iniziale).

Una successione che ricorre molto nella Matematica è quella dei *fattoriali*↑

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040...$$

e si noterà che
 si passa da 1 a 2 moltiplicando per 2
 si passa da 2 a 6 moltiplicando per 3
 si passa da 6 a 24 moltiplicando per 4
e così via:

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n & se \quad n > 0 \\ 1 & se \quad n = 0 \end{cases}$$

ovvero, per ricorrenza, $a_0 := 1$, $a_n := n\, a_{n-1}$ per $n > 0$.

Un'infinità di dati epidemiologici si possono inquadrare come successioni, con l'indice che è l'anno, per esempio da 1861 in poi e teoricamente estendibile all'infinito almeno nell'immaginazione, e i valori a rappresentare il numero di nati, di morti, la mortalità infantile, e quant'altro:
 $x_{1861} = ...$
 $x_{1862} = ...$
 ...

Esercizio.$_\mu$ Calcolare con 5 cifre significative con la calcolatrice i primi 12 valori di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ relativi alla successione di Fibonacci.

5.4 Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva, inversa

Funzione iniettiva: “mai 2 vanno in 1”. Per esempio x^3 e 2^x ma non x^2 intesa come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarla).

Funzione suriettiva: “riempie il codominio”. Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Funzione biiettiva: iniettiva *et* suriettiva. Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

La funzione biiettiva dà luogo in modo ovvio alla *funzione inversa*. Per esempio $\sqrt[3]{x}$ è la funzione inversa di x^3. E viceversa.

II – Algebra e piano

6 Algebra – I parte

Nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto generale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:
qualitativa ("bollendo *un po'* otterrai *un po' di* precipitato")
numeri
operazioni (numeriche)
funzioni (numeriche)
analisi statistica dei dati (numerici)

Vogliamo qua occuparci delle operazioni sui numeri, per esempio a/b, che potrebbe dare la *densità* se a è una massa e b un volume, e che diventa una funzione $f_1(a)$ o $f_2(b)$ se a o rispettivamente b è considerato variabile.

6.1 Operazioni unarie (interne) dell'algebra dei numeri

Le *operazioni unarie* da 1 *operando* producono 1 *risultato*.
Si tratta allora precisamente di funzioni. Tuttavia per la loro "basicità" può essere utile considerarle separatamente dalle altre funzioni.
Ne considereremo 4.

• *Segno di un numero.* Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione segno

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & se\ \ x < 0 \\ 0 & se\ \ x = 0 \\ 1 & se\ \ x > 0 \end{cases}$$

che normalmente però viene definita[(10)] in $\mathbb{R}$; per esempio è $\operatorname{sgn}(3-\pi) = -1$.

• *Passaggio all'opposto*, $x \mapsto -x$. Operazione unaria definita da $\mathbb{Z}$ in poi. Questo meno non indica affatto negatività ma pas-

[10] Con qualche ambiguità: per alcuni non è definita in 0. In questa trattazione è definita in 0 e vi vale 0, che è lo standard ISO.

saggio all'opposto, per esempio l'opposto di -3 è il positivo 3. (Si noti allora che $-x$ può essere positivo).
Da un punto di vista fisico, il tempo $-2\,h$ significa 2 ore *prima* del tempo 0 dell'inizio di un esperimento.

• *Passaggio al reciproco*, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Notazione deprecabile: x^{-1}.
Operazione unaria definita per i numeri diversi da 0 da $\mathbb{Q}$ in poi.

• *Valore assoluto*. Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione

$$|x| := \begin{cases} x & se\ \ x \geq 0 \\ -x & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

che normalmente viene definita in $\mathbb{R}$, in vari modi equivalenti↑.
Valore assoluto e segno sono correlate dall'identità

$$x \equiv |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

Tutte le (altre) funzioni (reali di variabile reale) possono considerarsi operazioni unarie (in $\mathbb{R}$), e talvolta per alcune ciò effettivamente si fa, ma noi non lo faremo, per semplicità. (Le considereremo semplicemente funzioni, che effettivamente sono).

6.2 Operazioni binarie (interne) dell'algebra dei numeri

Le *operazioni binarie* da 2 *operandi* producono 1 *risultato*.
Ne considereremo 5: somma, sottrazione←, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza.
Tutte hanno un'infinità di ricorrenze nelle Scienze Applicate. (Un solo esempio: la *densità*, definita con una divisione: massa/volume).

(1) $a + b$, scritto col $+$ e anche col simbolo di sommatoria $\sum$: dati dei numeri a_3, a_4, a_5, la somma

$$a_3 + a_4 + a_5 \quad \text{la scriveremo anche} \quad \sum_{k=3}^{5} a_k$$

e i numeri 3 e 5 possono essere sostituiti da qualsiasi altri, e così pure l'*indice di sommatoria* k: una forma comoda per rappresentare somme di moltissime *variabili indiciate*.

(2) $a - b$

(3) $a\,b$ ovvero $a \cdot b$; sulle calcolatrici e nei linguaggi informatici anche $*$; lo standard ISO ammette anche la scrittura $a \times b$, che però espone alla confusione con la variabile x.
La notazione $a\,b$ purtroppo dà luogo ad un'ambiguità di scrittura: $y\,(x+1)$ denota sia una funzione y calcolata in $x+1$ che $y \cdot (x+1)$: perciò noi scriveremo sempre quest'ultimo $(x+1)\,y$.

(4) $\frac{a}{b}$ ovvero a/b, nelle proporzioni $a : b$, sulle calcolatrici $\div$

(5) a^b, sulla calcolatrici a^b (nell'informatica anche $a{*}{*}b$).

Ma si faccia attenzione all'ambiguità della "frazione mista" o "numero misto" che si usa per esempio per i voti scolastici, come $7\frac{1}{2}$: il valore è $7 + \frac{1}{2}$ e cioè 7.5, non $7 \cdot \frac{1}{2}$ cioè 3.5. Cerchiamo di evitare come la peste tali frazioni miste. Ma potremo trovarla su questionari dove i pazienti valutano $7\frac{1}{2}$ il loro stato di salute, e allora nella raccolta dati trascriveremo sul computer 7.5.

E si faccia attenzione alla scrittura *del marketing* 3×2 che non ha nulla a che vedere con la moltiplicazione e rappresenta uno *sconto*, precisamente $m \times n$ significa che di m articoli/confezioni non ne pagheremo $m - n$ e allora lo sconto percentuale è

$$\mathit{sconto} = 100 \cdot \frac{m-n}{m}\,\%$$

> **Esempio**$_\mu$ Una farmacia vende confezioni di filo interdentale in offerta 4×3: calcoliamo lo sconto.
> 1 su 4 confezioni non viene pagata e allora lo sconto è $\frac{1}{4}$ cioè 25%.

La divisione presenta qualche problematica:
44 diviso 6

fa $\frac{44}{6}$ ovvero meglio $\frac{22}{3}$ in $\mathbb{Q}$,

fa $7.\overline{3} \approx 7.333$ in $\mathbb{R}$,
fa *7 col resto di 2* in $\mathbb{Z}$, come ora approfondiremo.

6.3 Divisione euclidea in Z

Come ci ricorda la canzoncina *Quarantaquattro gatti*, che si disponevano *in fila per 6*, ma *col resto di 2*, è $44 = 6 \cdot 7 + 2$. Più in generale, come leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Divisione euclidea*

> Dati due numero interi a e b con $b \neq 0$ esiste un'unica coppia di interi q ed r detti *quoziente* e *resto* tali che
> $a = b \times q + r$
> $0 \leq r < |b|$

Diremo a il *dividendo* e b il *divisore*. Scriviamo per massima chiarezza:

$$dividendo = divisore \times quoziente + resto \quad 0 \leq resto < |divisore|.$$

Si noti che il resto è minore del divisore in valore assoluto, ma non necessariamente del quoziente in valore assoluto, per esempio $11 = 4 * 2 + 3$ (ed effettivamente il resto 3 è minore del divisore 4, ma non del quoziente 2), e stiamo dividendo 11 per 4, mentre se dividiamo 11 per 2 abbiamo $11 = 2 * 5 + 1$ (ed effettivamente il resto 1 è minore del divisore 2).
(Si noti ancora che tutto ciò vale anche con numeri negativi, per esempio -21 diviso 9 dà quoziente -3 e resto 6, cioè $-21 = 9 \cdot (-3) + 6$, come troviamo subito online con WolframAlpha con `Quotient[-21,9]` e `Remainder[-21,9]`).
Esempio$_\mu$ Una scatola di pillole ha 4 blister di 6×4 pillole. Dopo averne consumate 7 al giorno, ad un certo punto non gliene restano più così tante: quante precisamente?

Le pillole sono in tutto $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$. Con la calcolatrice (o a mano) troviamo

$$96/7 = 13.7...$$

e allora la persona ha consumato 7 pillole al giorno per 13 giorni, in tutto $13 \cdot 7 = 91$. Allora restano alla fine $96 - 91$ cioè 5 pillole. Con WolframAlpha `Remainder[4*6*4,7]`

6.4 Frazioni generatrici

Per scritture decimali limitate la *frazione generatrice* si trova subito: per esempio

$$0.2 \text{ cioè 2 decimi, è } \frac{2}{10} \text{ cioè, semplificando, } 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$0.25 \text{ cioè 25 centesimi, è } \frac{25}{100} \text{ cioè, semplificando, } 0.25 = \frac{1}{4}$$

e similmente coi millesimi si troverà per esempio che 0.125 è $\frac{1}{8}$, e così via.
Fra le scritture decimali illimitate periodiche, bisognerà conoscere

$$\tfrac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.33333333333\ldots \ (\textit{periodico})$$

Un suo valore approssimato, 0.333 oppure 0.3333, si può trovare con la calcolatrice con $1 \div 3$, ma, inversamente, bisogna anche saper riconoscere

$$0.333 \approx \frac{1}{3} \qquad 0.3333 \approx \frac{1}{3}$$

Per altre scritture decimali illimitate periodiche, non riusciremo – in questa trattazione elementare – a trovare la frazione generatrice:

$$0.\overline{142857} = \frac{?}{?} \qquad \left(\text{in effetti è } \frac{1}{7} \text{ ma non è banale}\right)$$

Il seguente paragrafo presto verrà spostato nella lezione 1

Percentuali. Ogni numero reale può essere espresso in forma percentuale col simbolo % moltiplicandolo per 100, per esempio $0.125 = 12.5\%$. E per trovare 0.125 dal valore percentuale basta togliere il simbolo % e moltiplicare per 100. Per le probabilità, che sono numeri fra 0 e 1, la rappresentazione in forma percentuale è la norma. Ma si può farlo anche per numeri < 0 o > 1, per esempio -30% è -0.3 e 1.4 è 140%.

Altra questione. Espressioni come *ridotto di un quarto* e *ridotto a un quarto*, corrispondono anch'esse alle 4 operazioni elementari considerate. Se a è la quantità considerata, le quantità ridotte sono rispettivamente $a - \frac{a}{4}$ e $\frac{a}{4}$ (ben diverse nonostante le espressioni verbali riportate, popolarmente confondibili).
Ma pensateci bene: preferireste
che una multa venga ridotta *di* un decimo, o
che venga ridotta *a* un decimo?

Similmente, si noti che portare una quantità al 140% del valore iniziale significa moltiplicarla per 1.4, mentre aumentarla del 140% significa moltiplicarla per 2.4: cioè calcolare $x + 1.4\,x$ che è appunto $2.4\,x$.

6.5 Prime proprietà delle operazioni nei numeri

Il $-$ non è commutativo: per esempio 6-2 fa 4 ma 2-6 fa -4.
E non è neanche associativo; ovvio ma meglio dirlo:

$$11 - 6 - 2 \text{ si calcola nell'ordine } 5 - 2 \text{ e infine } 3 \text{ (il 5 è } 11 - 6)$$

$$\text{assolutamente non } 11 - 4 = 7 \text{ (computando prima } 6 - 2)$$

cioè

$$11 - 6 - 2 \quad \text{significa} \quad (11 - 6) - 2.$$

(Le parentesi↓ indicano precedenze nel calcolo).
Il / ha esattamente le stesse problematiche dette per il $-$, non è commutativo, per esempio 6/3 fa 2 ma 3/6 fa 0.5 ovvero $\frac{1}{2}$, e non è neanche associativo:

$$(x/y)/z \neq x/(y/z).$$

La scrittura $x/y/z$ senza parentesi sarebbe meglio evitarla in Matematica ma è usata in Farmacia:

$$\text{mg/kg/die}$$

è da utilizzarsi in questo modo:

$$Y \text{ mg/kg/die}$$

si calcola

$$Y \times \text{ (peso [del paziente, o della cavia...] in chilogrammi)}$$

e il risultato è in
mg/die,
cioè milligrammi da assumere ogni giorno. (Da un punto di vista matematico, intendono cioè
(mg/kg)/die,
implicitamente; fanno cioè esattamente come per il $-$, le operazioni nell'ordine in cui sono scritte).

Il $+$ e il $\cdot$ sono commutativi e associativi, in tutti gli insiemi numerici (precisazione che in generale ometteremo):

$$x + y = y + x \qquad x\,y = y\,x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{che scriveremo di solito } x + y + z$$

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \text{che scriveremo di solito } x\,y\,z$$

(Come detto, le parentesi↓ indicano precedenze nel calcolo).
Proprietà distributive:

$$(x + y)\,z = x\,z + y\,z$$

$$(x - y)\,z = x\,z - y\,z$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x + y)/z = x/z + y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x - y)/z = x/z - y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x - y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$

ma in generale $\frac{x}{y+z}$ è diverso da $\frac{x}{y} + \frac{x}{z}$, e similmente coi $-$.

$$-(-x) = x \qquad e\ \forall\, x \neq 0\ \ \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

e più completamente

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} \qquad \forall\, y, z, w \neq 0\,.$$

Poi

$$x + (-x) = x - x = 0 \qquad e \,\forall\, x \neq 0 \;\; x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$x + 0 = 0 + x = x \quad (0\; \textit{elemento neutro rispetto al} +)$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad (1\; \textit{elemento neutro rispetto al} \cdot)$$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad (0\; \textit{elemento assorbente rispetto al} \cdot)$$

$$\frac{0}{x} = 0 \;\forall\, x \neq 0 \qquad \frac{x}{0} \;\textbf{non esiste mai, neppure}\; \frac{0}{0}\,.$$

6.6 Le radici

In questa trattazione elementare, considereremo le radici solo in $\mathbb{R}$ e non nei numeri naturali, interi e razionali.
Sono funzioni (e allora anche operazioni unarie ma non è il modo migliore di considerarle).

• *Radice quadrata* $\sqrt{a}$. Ovvero, ma in generale non scriveremo così, $\sqrt[2]{a}$. (Su WolframAlpha `Sqrt[a]`, in altri software `sqrt(a)`).

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\sqrt{\cdot} \quad : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Si noti che

$$\sqrt{9} = 3$$

nel modo più assoluto la radice quadrata di 9 non è ± 3. (Come invece affermano testi che seguono un'antiquata definizione di radice quadrata).
Per $x \geq 0$ la $\sqrt{x}$ è definita come il numero $y \geq 0$ tale che $y^2 = x$.

• *Radice quarta, sesta, ottava...* $x \mapsto \sqrt[4]{x}$, $x \mapsto \sqrt[6]{x}$... Con considerazioni analoghe alla radice quadrata. Per esempio la radice quarta di 16 è 2, e quella di 9 è $\sqrt{3}$. Sono definite in $[0, +\infty[$.

• *Radice terza (o cubica), quinta, settima...* $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[5]{x}$... La $\sqrt[3]{x}$ è definita come il numero y tale che $y^3 = x$, e similmente le altre radici con indice dispari: $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per esempio la radice cubica di -8 è -2.

La radice quadrata esprime un'infinità di cose dal punto di vista fisico, per esempio il tempo di caduta[11] di un grave. Fra le quelle espresse dalla radice cubica citiamo il raggio[12] di una sfera di massa m e densità d. (Per esempio si calcola che una sfera d'oro di 1 kg ha diametro $\approx 4.62\, cm$). (Fra le meno numerose ricorrenze nelle Scienze Applicate della quarta potenza ovvero equivalentemente della radice quarta, citiamo la Legge di Stefan-Boltzmann).

6.7 Proprietà dei radicali ovvero radici

Alcune proprietà delle radici sono le seguenti.

$$\sqrt[n\cdot m]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \quad \textit{per esempio} \quad \sqrt[6]{x} = \sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}\,, \quad n, m = 2, 3, 4... \text{ (si semplifica m)}$$

$$x = \sqrt[3]{x^3} \quad \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$

$$(\textit{non } x) \quad |x| = \sqrt{x^2} \quad \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

e queste 4 proprietà molto simili fra loro:

$$\sqrt{x\, y} = \sqrt{|x|}\, \sqrt{|y|} \quad \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

$$\sqrt{x/y} = \sqrt{|x|}/\sqrt{|y|} \quad \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

$$\sqrt[3]{x\, y} = \sqrt[3]{x}\, \sqrt[3]{y} \quad \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$

---

[11] La formula è $t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$.

[12] La formula è $r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}}$.

$\sqrt[3]{x/y} = \sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{y}$ *e similmente con ogni indice dispari*
(E di rarissimo uso $\sqrt[n]{x^{\alpha}} = (\sqrt[n]{x})^{\alpha}, \quad x \geq 0, \alpha \in I\!R, n = 2, 3, 4...$).

Si ha:
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (perchè è $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$) e approssimeremo ≈ 2.828
$\sqrt{9} = 3$ (assolutamente non ± 3)
$\sqrt{10} \approx 3.162$ e lo troveremo con la calcolatrice
$\sqrt[3]{-8} = 2$ (perchè $(-2)(-2)(-2) = -8$)
$\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ (perchè è $\sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$)
$\sqrt[3]{5}$ lo lasceremo come sta. (WolframAlpha con `5^(1/3)` dà 1.7099...).
$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ (perchè è $\sqrt{\sqrt{4}}$) e approssimeremo ≈ 1.414
$\sqrt[4]{5} \approx 1.495$ (calcolato come radice quadrata della radice quadrata).
(Le radici dalla quinta in poi le considereremo poco, e ricorrono moderatamente nelle Scienze Applicate).

7 Algebra – II parte

7.1 Le potenze

Si definisce $a \in I\!R$ *elevato alla* $n \in I\!N$, $n > 0$, il numero

$$a^n = a \cdot ... \cdot a \quad (n\,volte)$$

e ponendo per $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

la potenza è definita per tutti gli esponenti non nulli di $\mathbb{Z}$; e per l'esponente 0 si pone se $a \neq 0$ (rimanendo non definito 0^0)

$$a^0 := 1\,.$$

Si definisce $a \in I\!R$ *elevato alla* $q = \frac{n}{m} \in Q$, $m, n > 0$, il numero

$$a^{\frac{n}{m}} :=\sqrt[m]{a^n}$$

che esiste se $a \geq 0$ *vel* m è dispari.
Per la potenza con esponente $q \in I\!R$ si richiede $a \geq 0$, e se q è razionale vale quanto sopra, e se è irrazionale si dà una definizione complessa che si può quasi immaginare sostituendo q con una sua *"straordinariamente buona"* approssimazione razionale: $a^{\sqrt{2}}$ sarà *"circa"* $a^{1.41}$ a sua volta uguale a $\sqrt[100]{a^{141}}$. Ancor meglio $\sqrt[1000]{a^{1414}}$.

Ecco su WolframAlpha i grafici di alcune funzioni potenza: Link->

L'elevamento a potenza non è nè commutativo, per esempio $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, nè associativo. Valgono invece le seguenti proprietà.

$$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$$

$$(x \cdot y)^\wedge z = (x^\wedge z) \cdot (y^\wedge z) \qquad ossia\ (x\,y)^z = x^z y^z \ \ (distributiva)$$

$$x^{y \cdot z} = (x^y)^z \qquad 1^x = 1 \qquad x^1 = x$$

$$x^0 = 1 \quad \forall\, x \neq 0 \qquad 0^x = 0 \quad \forall\, x \neq 0 \qquad 0^0 \ \ \textbf{non esiste}$$

Si noti la notazione, ovvero convenzione sulla notazione:

$$_{\textit{usualmente scritto}\,\rightarrow}\ x^{y^z} := x^{(y^z)}\ {}_{\leftarrow\,\textit{raramente scritto}}$$

per esempio 2^{2^3} è 2^8 cioè 256, non è 4^3 cioè 64, che è $\left(2^2\right)^3$.

Le radici possono essere intese come potenze con esponente frazionario e precisamente

$$\left[\sqrt[1]{x} = x\right] \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \ldots \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

(in particolare su WolframAlpha $_{numero}$`^(1/n)`) da cui segue subito

$$x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4 \ldots$$

Esempio di applicazione di $x^{y \cdot z} = (x^y)^z$: volume di un cubo di lato $10^{-10}\,m$. Essendo $volume_{cubo} = lato^3$, si ha $(10^{-10})^3$ cioè $10^{-30}\,m^3$.

7.2 Scrittura dei numeri e approssimazioni

Nelle Scienze Applicate si preferisce evitare nei risultati finali le frazioni, i decimali periodici, e, π, le radici e le altre funzioni elementari, e tutto si esprime con scritture decimali esatte se si può e merita, o altrimenti approssimate, ma scrivendo = e non ≈.

In Matematica	**In questa trattazione.** La scrittura percentuale la daremo solo se ha senso. Esempio: per le probabilità	Nelle Scienze Applicate. La scrittura percentuale si dà solo se ha senso. Esempio: per le probabilità
$= \frac{1}{8} = 0.125$	$= \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$	$=0.125$ oppure $= 12.5\%$ ma anche $= 0.1250$ e $= 12.50\%$
$= \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	$= \frac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%$	$=0.3333$ oppure $= 33.33\%$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071...$	$= \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 = 70.71\%$	$=0.7071$ oppure $= 70.71\%$
$\frac{6}{\pi} = 1.9098...$	$= \frac{6}{\pi} \approx 0.9099 = 90.99\%$	$=0.9099$ oppure $= 90.99\%$
$\frac{1}{e} = 0.3678...$	$= \frac{1}{e} \approx 0.3679 = 37.79\%$	$= 0.3679$ oppure $= 37.79\%$

Si noti che $= 0.3678...$ è diventato ≈ 0.3679 perchè la prima cifra seguente è ≥ 5. (Fatto non conoscibile dalla scrittura $= 0.3678...$).
Si noti la scrittura 0.1250 delle Scienze Applicate, nelle quali questa scrittura indica – se usata appropriatamente – che il valore è conosciuto con 4 cifre significative, cioè è compreso fra 0.12495 e 0.12505, mentre 0.125 sarebbe conosciuto con sole 3 cifre significative e allora indicherebbe un numero compreso fra 0.1245 e 0.1255. La questione è sottile, perchè richiede di conoscere la precisione dei dati iniziali, che in generale è scarsamente nota.
Naturalmente possono considerarsi approssimazioni più precise, o meno.

7.3 Ordinamento dei numeri

Da $\mathbb{N}$ in poi esiste nei numeri un *ordinamento* (che sostanzialmente supponiamo noto) per cui dati 2 numeri, o il primo è $<$ del secondo, o $>$ del secondo, o sono uguali (*tricotomia*). In modo ovvio si definiscono il *maggiore o uguale* e il *minore o uguale*.
Da $\mathbb{N}$ in poi si può sommare ad ambo i membri di un'uguaglianza, o di una disuguaglianza, una stessa *quantità* (fissa, cioè un numero, o variabile, come una funzione) conservando l'uguagliaza, o rispettivamente quella stessa disuguaglianza:

$$a < b \;\Leftrightarrow\; a + c < b + c \quad e\, analoghe\, con\; \geq, <, \leq, =$$

Da $\mathbb{Z}$ in poi vale questa molteplice relazione fra moltiplicazione e ordinamento dei numeri:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & se\; c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac < bc & se\; c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

e del tutto similmente con $\geq$ e $\leq$

$$a \geq b \Rightarrow \begin{cases} ac \geq bc & se\; c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac \leq bc & se\; c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

Per esempio da $3 > 2$ segue moltiplicando per il numero positivo 10 che $30 > 20$, invece moltiplicando per il numero negativo -10 l'ordinamento si inverte: $-30 < -20$.

7.4 Altre formule classiche dell'algebra

Ecco alcune altre formule classiche dell'algebra:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \quad \text{Legge di annullamento del prodotto}$$

E ce ne sono moltissime altre([13])

[13] Per il lettore interessato eccone alcune:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$$

8 Piano cartesiano: punti e rette

Premessa definizionale:

funzione: $f(x)$, p.es. $f(x) := x^2 - 2$, spesso scritta $y = x^2 - 2$;
equazione: $f(x) = g(x)$, p.es. $x^2 - 2 = 0$ ha *soluzione* $\pm\sqrt{2}$;
polinomio: $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, p.es. $x^2 - 2$, ha *radici* $\pm\sqrt{2}$;
disequazione in 1 variabile: $f(x) > g(x)$ (o $<$ o $\geq$ o $\leq$), p.es. $x^2 > 2$, ha *soluzione* $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$.

Gli assi cartesiani sono una retta orientata detta asse delle ascisse e una retta orientata perpendicolare alla precedente, detta asse delle ordinate, che si intersecano in un punto detto origine e denotato con O.
L'orientazione del piano e degli angoli con vertice nell'origine è antioraria. L'asse delle ascisse si sovrappone all'asse delle ordinate con una rotazione di $+90°$.

Spesso l'asse delle ascisse ha nome x, ma t se rappresenta un tempo, e quello delle ordinate y, ma p se rappresenta una pressione, eccetera.

Su ciascun asse è fissata un'unità di misura, che determina l'ascissa e l'ordinata (distanze con segno) dei loro punti.

Equazione del punto[(14)]:

$$P = (x_0, y_0) \quad ovvero \quad P(x_0, y_0) \quad ovvero \quad (x_0, y_0)$$

Il numero reale x_0 è l'ascissa di P e y_0 l'ordinata.

Da adesso, le relazioni geometriche fra figure diventano relazioni algebriche fra numeri, con enorme vantaggio pratico e applicativo.

[14] Altri Autori scrivono col punto e virgola: $(x_0; y_0)$

Già il D'Oresme[15] stesso (XIV secolo), iniziatore del metodo, arrivò fino a produrre – sostanzialmente – l'equazione della retta. Oggi noi seguiamo la teoria, più completa, di Descartes (Cartesius, Cartesio, XVII secolo).

Esistono

- ◦ rette verticali, cioè parallele all'asse y: equazione $x = p$
- ◦ rette orizzontali, cioè parallele all'asse x: equazione $y = q$
- ◦ rette oblique, non parallele nè all'asse x nè all'asse y

Equazioni esplicita della retta non verticale:

$$y = m\,x + q$$

q ci dice il punto di intersezione con l'asse y, precisamente $(0, q)$. m: coefficiente angolare, ci indica la pendenza della retta; se è 0 la retta è orizzontale.

La disequazione

$$y > m\,x + q$$

se verificata rappresenta lo *stare sopra* la retta, e col $<$ lo *stare sotto* la retta.

> Per esempio con l'altezza h (in centimetri) e il peso p (in chilogrammi) la Formula di Broca definiva (oggi esistono vari altri standard)
>
> $peso\,normale = (h - 100) \pm 10\%$
>
> ovvero, con la corretta interpretazione del $\pm 10\%$,
>
> $peso\,normale \in$

[15] Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Nicola d'Oresme: "matematico, fisico, astronomo ed economista, vescovo, filosofo, psicologo e musicologo francese (...) teologo appassionato, traduttore competente, influente consigliere di re Carlo V di Francia (...) ebbe l'idea di utilizzare ciò che dovremmo chiamare coordinate rettangolari nella terminologia moderna, una lunghezza proporzionale alla longitudo, l'ascissa di un dato punto e una perpendicolare a quel punto, proporzionale alla latitudo, l'ordinata (...) longitudo e latitudo possono variare o rimanere costanti."

$$[(h-100)-(h-100)10\%,(h-100)+(h-100)10\%]$$

e qua – a conti fatti – riconsciamo 2 rette e 3 regioni del piano Ohp:

sottopeso sotto la retta $p = 0.9\,h - 90$

sovrappeso sopra la retta $p = 1.1\,h - 110$

e la terza regione, dei normopeso, è quella fra le 2 rette. (Secondo certi Autori, la formula varrebbe solo per altezze $\geq 130\,cm$. Secondo certi Autori, $\pm 20\%$ invece che $\pm 10\%$.).

Equazione implicita della retta: $a\,x + b\,y + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

Ogni punto $P(x_0, y_0)$ le cui coordinate verificano l'equazione della retta appartengono alla retta, e questo sarà un fatto generale, estendibile a tutte le *curve*, in rappresentazione esplicita o implicita.

Equazione della retta per 2 punti:

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

Formula della distanza di 2 punti:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Formula della distanza punto-retta:

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono perpendicolari} \;\Leftrightarrow\; m' = -\frac{1}{m}$$

$$\text{sono parallele} \;\Leftrightarrow\; m' = m$$

(e ovviamente 2 rette verticali $x = p$ e $x = p'$ sono parallele).

Grafico cartesiano G_f di una funzione $f(x)$ è (il disegno dell)l'insieme

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$$

e spesso le funzioni hanno nome $y(x)$ denotato anche semplicemente y, e già abbiamo visto le rette orizzontali e oblique $y = m\,x + q$, che di fatto sono proprio grafici, mentre le rette verticali non lo sono.

Fra le rette che sono grafici di funzioni di x si distinguono queste:
$y = x$ bisettrice del I e III quadrante – funzione *identità*
$y = -x$ bisettrice del II e IV quadrante – passaggio all'opposto.
$y = 0$ asse x
e fra quelle che non sono grafici di funzioni di x
$x = 0$ asse y.

8.1 Funzioni e dis/equazioni di primo grado

Per ogni m la funzione $f(x) := m\,x$ si chiama *funzione lineare*, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x$. è una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costantemente nulla* se $m = 0$. Il grafico è una retta passante per l'origine.
Fissato $m \neq 0$, l'equazione $m\,x = 0$ ha soluzione $x = 0$ (basta dividere per $m \neq 0$), mentre la disequazione in 1 variabile

$$m\,x > 0$$

si risolve dividendo per m ciò che, se e solo se $m < 0$, inverte l'ordinamento. Allo stesso modo si risolve se si aveva $\geq$, $<$ o $\leq$.

Per ogni $m, q \in I\!R$ la funzione $f(x) := m\,x + q$ si chiama funzione *affine*, deprecabilmente detta lineare, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x + q$. È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costante* se $m = 0$. Il grafico è una retta, che *intercetta* (interseca) l'asse y in $(0, q)$.
Fissati $m \neq 0$ e q, l'equazione

$$m\,x + q = 0$$

ha soluzione $x = -\frac{q}{m}$. (Si sommi $-q$ e si divida per $m \neq 0$).
Le 4 disequazioni con $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ si risolvono sommando $-q$ e poi dividendo per m invertendo l'ordinamento se $m < 0$.
Fissati m e q, la disequazione in 2 variabili

$$y \geq m\,x + q$$

rappresenta il *semipiano chiuso* "sopra" la retta $y = m\,x + q$, compresi i punti della retta. Col $>$, il *semipiano aperto*, esclusi i punti della retta.
Con $\leq$, e con $<$, si va "sotto" la retta, compresa (semipiano chiuso) o rispettivamente esclusa (semipiano aperto).
Ciò vale anche per la $y > m\,x$ e le 3 analoghe, che hanno $q = 0$.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 8

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
∗ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 8:00 di mattina concentrazione 50 mg/dl e alle 6:00 di sera concentrazione 82 mg/dl. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura).
Trovare la retta per i 2 punti espressa in forma esplicita, senza unità di misura.
(Con essa si potrebbe ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione; ma qua non ne faremo nulla).

Svolgimento
Osservato che le 6:00 di sera sono le 18:00, cioè a 18 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(8\,h, 50\,mg/dl), (18\,h, 82\,mg/dl) \qquad \text{ovvero meglio} \qquad (8, 50), (18, 82)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 18}{8 - 18} = \frac{y - 82}{50 - 82}$$

$$\frac{t - 18}{-10} = \frac{y - 82}{-32} \quad \Big/ \cdot (-1) \cdot 10 \cdot 32$$

$$32\,(t - 18) = 10\,(y - 82)$$

$$32\,t - 576 - 10\,y = -820$$

$$-10\,y = -32\,t - 244$$

$$\boxed{y = 3.2\,t + 24.4}$$

anche esprimibile con

$$\boxed{y = \tfrac{16}{5}\,t + \tfrac{122}{5}}$$

(Da cui p.es. a mezzogiorno, $t := 12$, la concentrazione ipotetica 62.8 mg/dl).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 6:00 di mattina concentrazione 70 nmoli/L e alle 9:00 di sera 150 nmoli/L. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura, h e poi nmoli/L).

Con la retta per i 2 punti si può ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione. Con l'equazione esplicita di quella retta, senza unità di misura, calcolare l'ora in cui la concentrazione è salita a ≥ 110 (nmoli/L, unità di misura che non esprimiamo per semplicità).

Svolgimento

Osservato che le 9:00 di sera sono le 21:00, cioè a 21 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(6\,h, 70\,nmoli/L), (21\,h, 150\,nmoli/L) \qquad \text{ovvero meglio} \qquad (6, 70), (21, 150)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 21}{6 - 21} = \frac{y - 150}{70 - 150}$$

$$\frac{t - 21}{-15} = \frac{y - 150}{-80} \quad \Big/ \cdot (-1) \cdot 15 \cdot 80$$

$$80\,(t - 21) = 15\,(y - 150)$$

$$80\,t - 1680 - 15\,y = -2250$$
$$-15\,y = -80\,t - 570$$

e dividendo per -15

$$y = \frac{16}{3}\,t + 38$$

e ora risolviamo la disequazione della concentrazione $y \geq 110$

$$\frac{16}{3}\,t + 38 \geq 110$$
$$\frac{16}{3}\,t \geq 110 - 38$$
$$\frac{16}{3}\,t \geq 72$$
$$t \geq 72 \cdot \frac{3}{16} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

cioè a 13.5 ore dalla mezzanotte, cioè 13 ore e mezza, cioè alle

$$\boxed{13\!:\!30}$$

Postille alle prime 7 lezioni

da esporsi nella lezione 8 e già messe sulla dispensa nelle prime 5

Ma si faccia attenzione che nelle Scienze Applicate la scrittura

$$a \pm 10\%$$

non indica affatto nè i 2 numeri $a \pm 0.1$ (che sarebbe il significato pedissequo in Matematica) nè l'intervallo $[a - 0.1, a + 0.1]$ bensì l'intervallo $[a - 0.1\,a, a + 0.1\,a]$.
E nel caso generale, con una percentuale qualunque fra 0% e 100%,

$$a \pm t\,\% \text{ indica l'intervallo } [(1 - t\,\%)\,a, (1 + t\,\%)\,a]$$

(Messa nella Lezione 1)
La funzione biiettiva dà luogo in modo ovvio alla *funzione inversa*.
Per esempio $\sqrt[3]{x}$ è la funzione inversa di x^3.
(Messa nella Lezione 5)

Una successione che ricorre molto nella Matematica è quella dei *fattoriali*↑:

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040...$$

e si noterà che
si passa da 1 a 2 moltiplicando per 2
si passa da 2 a 6 moltiplicando per 3
si passa da 6 a 24 moltiplicando per 4
e così via:

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n & se \quad n > 0 \\ 1 & se \quad n = 0 \end{cases}$$

ovvero, per ricorrenza, $a_0 := 1$, $a_n := n\,a_{n-1}$ per $n > 0$.
(Messa nella Lezione 5)

9 Piano cartesiano: coniche e altre figure

Grafici molto importanti sono quelli delle funzioni

$$y = |x| \qquad y = \mathrm{sgn}(x) \qquad y = \frac{1}{x}$$

e l'ultimo è una *curva*[16] detta *iperbole equilatera*.

Tutti i grafici sono *curve*, e hanno un'equazione *esplicita*, ma esistono curve che non sono grafici, e hanno un'equazione *implicita*, in particolare il circolo di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

e questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio*.

Esercizio$_\mu$ Si verifichi se il punto $(2, 2)$ sta nel circolo

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y + 1 = 0$$

Esercizio$_\mu$ Esplicitare i 2 semicircoli costituenti il circolo. (Si troverà $y = 5 \pm \sqrt{-x^2 - 2x + 24}$).

Altre curve in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}\,x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse} \text{ (in } \textit{forma canonica}^{(17)}\text{)}$$

[16] Una definizione rigorosa di *curva* è alquanto complessa, e in questa trattazione elementare supporremo noto il concetto. Le curve più semplici sono le rette.

[17] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard*.

e la disequazione
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$
se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse*. Se $a > b$ l'ellisse appare "ribassata" e se $b > a$ l'ellisse appare "allungata verso l'alto".

Esercizio$_\mu$ Con $a := 3$ e $b := 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

Ora vediamo una curva in equazione esplicita: la generica *parabola* con asse verticale ha equazione
$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$
La disequazione
$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$
rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga $>$, e questo è un fatto generale).
Ovviamente
$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$
rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[18] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.
Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*. La retta perpendicolare alla direttrice contenente il fuoco si chiama *asse* ed è asse di simmetria, e interseca la parabola nel *vertice*.
Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel pia-

[18] Insieme. Termine usato in geometria.

no – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O) e le iperboli equilatere.
Sono intersezione del piano cartesiano con un *cono completo*.

Con le rette (non verticali) e le coniche, e i grafici di $\text{sgn}(x)$ e $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, e ce ne sono infiniti altri, per esempio (quello della funzione)

$$y =^3\sqrt{x}$$

e, oltre alle rette verticali, infinite altre curve in rappresentazione implicita, per esempio il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

`x^3+y^3-3xy=0`

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

Come norma generale, bisogna risolvere le equazioni analiticamente, cioè coi calcoli, per quanto possibile, perchè esistono casi in cui il disegno inganna.
Tuttavia fare i disegni è comunque utilissimo

- per verificare la correttezza dei risultati trovati
- per una comprensione complessiva della situazione
- per presentare divulgativamente i risultati, o per presentarli in modo chiaro in relazioni tecniche
- per un tentativo seppure incerto di soluzione almeno approssimata quando il calcolo analitico è impossibile o proibitivamente difficile.

Come esempio dell'ultimo caso si consideri il *sistema di 2 equazioni* *in 2 incognite di* 6° *grado*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal disegno (sperabilmente, e, in effetti, in questo caso non ingannevole) vediamo che ci sono 4 soluzioni, e abbiamo anche loro approssimazioni, tanto migliori quanto più grande e preciso è il disegno.

In questo documento *link−>* della Food and Drug Administration (FDA), ente statunitense internazionalmente considerato autorevolissimo, ci si impegni a capire le ultime 2 righe a pagina 22, guardando attentamente le figure, riguardanti la produzione dei farmaci.
Si apprezzino poi le figure a pagina 24.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 9

Esercizio$_\mu$
$*$ [*disegno*] Si considerino 2 parametri fisiologici $p > 0$ e $q > 0$ per i quali si definisce *situazione normale* se (p, q) sta entro la curva

$$\frac{p^2}{100} + q^2 = 1$$

e *situazione anormale* altrimenti. (Per semplicità sono state omesse le unità di misura). Com'è la situazione coi valori $p = 5.6$ e $q = 0.73$? Si rappresenti graficamente la situazione.

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[4]{x}$. (Per esempio in $[-16, 16]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/4)`).

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[8]{x}$ in $[-1, 1]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Suggerimento: si calcolino con la calcolatrice le radici ottave di 0.1, 0.2,..., 0.9 con $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$, e a mano quelle di 0 e 1). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/8)`).

10 Sistemi lineari e altri sistemi

10.1 Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Il sistema lineare ovvero di primo grado di 2 equazioni in 2 incognite x e y

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$$

se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$ rappresenta geometricamente l'intersezione di 2 rette nel piano cartesiano. Potrebbero non avere intersezione, se esse sono parallele e distinte, o infinite soluzioni, se esse sono coincidenti. Questi 2 casi sono caratterizzati dal *determinante* nullo

$$a\,b' - b\,a' = 0$$

e si risolveranno con cautela analiticamente e contemporaneamente facendo un disegno.
Ipotizziamo ora det $\neq 0$. Ognuna delle eventuali equazioni mancanti di 1 delle 2 variabili si risolve subito, e il valore di x o y trovato si sostituisce nell'altra equazione, se in essa c'è quella variabile, e così quell'equazione diventa un'equazione di primo grado in una sola variabile, e si risolve subito anch'essa.
Ipotizziamo ora che ci siano sia la x che la y in entrambe le equazioni: esplicitiamo y dalla prima e sostituiamola nella seconda, che diventa così un'equazione di primo grado nella sola x. Trovata la x, si trova la y dalla sua espressione precedentemente esplicitata dalla prima equazione.
Questo metodo si estende subito ai sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite[19] x, y e z (e poi anche di più): si esplicita z dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda e la terza, che insieme costituiscono a questo punto un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite x e y. Tuttavia, i sottocasi particolari, di 0 e infinite soluzioni, iniziano a diventare molteplici, e non sempre

[19] Geometricamente rappresenta l'intersezione di 3 piani nello *spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$.

facilissimi da trattare.

I sistemi lineari ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate.

Esempio.

Abbiamo una provetta di 12 g contenente 2 fluidi non miscibili di pesi 7 g e 8 g con pesi specifici incogniti, e un'altra provetta di 14 g contenente gli stessi fluidi di pesi 5 g e 9 g.

Per trovare i pesi specifici incogniti x e y risolviamo

7x+8y=12

5x+9y=14

10.2 Sistemi di dis/equazioni e sistemi generalizzati

Un **sistema di n equazioni** in 1 incognita x, con la parentesi graffa (grande) che vale *et*, è il predicato (con opportune funzioni)

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases}$$

e sostituendo gli = con segni di disuguaglianza si ha un **sistema di n disequazioni** in 1 incognita. Naturalmente possono considerarsi sistemi con 2 o più incognite, e anche sia con equazioni che disequazioni. (I predicati del tipo $f(x) \neq g(x)$, che potremmo chiamare *"inequazioni"*, non li nomineremo per nome considerandoli implicitamente compresi nelle disequazioni data l'equivalenza con $(f(x) - g(x))^2 > 0$). Per esempio questo **sistema di equazioni e disequazioni** in 2 incognite

$$\begin{cases} x\,y = 0 & \leftarrow rappresenta\; 2\; rette \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0 & \leftarrow rappresenta\; 1\; cerchio \end{cases}$$

$$\text{equivale a} \quad \begin{cases} x = 0 \vee y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ (0-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + (0-1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

ha soluzione, come anche si vedeva subito graficamente,

$$\Big(x = 0 \wedge y = 1\Big) \vee \Big(x = 1 \wedge y = 0\Big)\,.$$

Predicati come $(*)$ e $(**)$, ammettenti anche il *vel*, li chiameremo *sistemi generalizzati di equazioni e, in questo caso, disequazioni.*

Postilla alle precedenti lezioni

Per ogni m la funzione $f(x) := m\,x$ si chiama *funzione lineare*, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x$.
Per ogni $m, q \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := m\,x + q$ si chiama funzione *affine*, deprecabilmente detta lineare, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x + q$.

Antiperiodo di un numero decimale illimitato periodico:
per esempio “08” in $0.08\overline{3} = \frac{1}{12}$
(Scritta nella Lezione 1)

Naturalmente invece se si tratta di 2 percentuali il significato è quello ovvio:

$$42\% \pm 5\% \text{ indica l'appartenenza all'intervallo } [37\%, 47\%]$$

(Scritta nella Lezione 1)

11 Funzioni e dis/equazioni di secondo grado

11.1 Funzioni e dis/equazioni di secondo grado

Le parabole con asse verticale hanno equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con qualche $0 \neq a, b, c \in \mathbb{R}$, e il loro asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$. Definito il *discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$, la parabola interseca l'asse x in $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta \geq 0$ e altrimenti mai.
Se x_1 e x_2 sono
• le *radici* (eventualmente coincidenti) del *polinomio* $a\,x^2+b\,x+c$,
• ovvero le *soluzioni* dell'*equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
• ovvero se $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ sono le *intersezioni* della parabola con l'asse x,
allora è

$$a\,x^2 + b\,x + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)\ .$$

Con uno *schema di prodotto dei segni* risolviamo la disequazione

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0 \qquad \textit{oppure}\ \geq \quad \textit{oppure}\ < \quad \textit{oppure}\ \leq$$

Per esempio per $-x^2 - 2\,x + 8 \leq 0$ usando la *formula ridotta*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad\qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

utile se b è intero pari, si trova

$$\Delta = 1^2 - (-1)\cdot 8 = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-1} \qquad x_1 = +2 \quad x_2 = -4$$

$$-x^2 - 2\,x + 8 = -1\cdot(x-2)\cdot(x+4) \leq 0$$

$-1 > 0 \quad$ *mai*
$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \qquad\qquad$ *Soluzione* : $\ x \leq -4 \vee x \geq 2\ .$

È meglio risolvere le 3 disequazioni con $>$ e poi individuare l'insieme soluzione a seconda se nella disequazione iniziale si aveva $>$, $\geq$, $<$ o $\leq$. (Altri Autori fanno diversamente). Questo è un procedimento generale che in seguito varrà anche per più di 3 termini.

L'equazione della parabola ricorre un'infinità di volte[(20)] nelle Scienze Applicate. Nel seguente esercizio vediamo un'applicazione di tipo medico.

Esercizio$_\mu$
La Formula di Keys – fra i numerosi standard – calcola

$$peso\,ideale\,uomini = (statura\,in\,metri)^2 \times 22.1 \qquad (*)$$

Per quale statura (realistica) essa dà – per gli uomini – lo stesso peso della Formula di Broca

$$peso\,ideale = (statura\,in\,centimetri - 100) \pm 10\%$$

intesa senza la tolleranza del 10%?

Svolgimento
La Formula di Broca intesa senza la tolleranza del 10% è ovviamente

$$peso\,ideale = statura\,in\,centimetri - 100$$

ovvero

$$peso\,ideale = (statura\,in\,metri - 1) \times 100 \qquad (**)$$

da mettere a sistema con la $(*)$:

$$\begin{cases} p = 22.1\,h^2 & \text{che è la } (*) \\ p = 100\,(h-1) & \text{che è la } (**) \end{cases}$$

e uguagliando si ha successivamente

$$22.1\,h^2 = 100\,(h-1)$$

[20] Per esempio, dà lo spazio

$$s(t) = 9.81\,t^2 + v_0\,t$$

percorso al tempo t da un corpo partito verso il basso con velocità v_0, nel campo gravitazionale terrestre, da altezza non troppo elevata, supposta la forma tale da rendere insignificante l'attrito con l'aria.

$$\begin{gathered}22.1\,h^2 - 100\,(h-1) = 0\\ 22.1\,h^2 - 100\,h + 100 = 0\\ h_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 22.1\cdot 100}}{22.1}\\ h \approx 3.03 \quad \vee \quad h \approx 1.49\end{gathered}$$

e ovviamente la prima soluzione non ha senso dal punto di vista della realtà sensibile (è ovvio che tutte queste formule hanno un certo dominio entro il quale funzionano bene, e poi perdono significato nella realtà).

$$\boxed{\approx 149\,cm}$$

(Il peso ideale corrispondente sarebbe $\approx 49\,kg$).

11.2 Valore assoluto, e relative dis/equazioni

Il valore assoluto in $\mathbb{R}$ è una funzione definita da

$$|x| := \begin{cases} x & se\ \ x \geq 0\\ -x & se\ \ x < 0\end{cases}$$

ma che può considerarsi anche nascere dall'elevamento al quadrato e dall'estrazione della radice quadrata perchè $\sqrt{x^2} = |x|$ e allora è una funzione elementare essendo composizione di funzioni elementari. Essa verifica molte proprietà, oltre alle ovvie

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

fra cui

$$\begin{gathered}|x\cdot y| = |x|\cdot|y|\\ \Big(\forall\, y \neq 0\Big) \quad |x/y| = |x|/|y|\end{gathered}$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$$

$$\Big(\forall\, a \geq 0\Big) \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a \quad e analoga con \geq$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

e i 3 = possono sostituirsi con tutti e 4 i segni di disuguaglianza; e molte altre formule[21].

Il valore assoluto ricorre un'infinità di volte nelle Scienze Applicate. Fra le altre cose, $|t|$ rappresenta una distanza temporale dall'istante 0, sia dopo che prima di 0.

Esercizio$_\mu$ Il *ritmo circadiano* dell'a concentrazione sanguigna di un certo ormone (umano o animale) sia modellizzato – prescindendo dalle unità di misura – da

$$u(t) := -2.5\,|t - 14| - |t - 7| + 50 \qquad 0 \leq t \leq 24$$

Trovare in quale periodo del giorno la concentrazione è maggiore di 30.

[21] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule sul valore assoluto:

$$||x|| = |x|$$

$$|x| = x \cdot \mathrm{sgn}(x)$$

$$x = |x| \cdot \mathrm{sgn}(x)$$

$$|x^n| = |x|^n \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$|x^\alpha| = |x|^\alpha \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l'ultima si chiama *disuguaglianza triangolare*.

12 Errore percentuale e proporzioni

12.1 Errore percentuale rispetto a un valore esatto

L'errore percentuale rispetto a un valore esatto è definito da

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

e si noti il valore assoluto.
Si noti che si può dare solo conoscendo il valore esatto.
Naturalmente i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*.

> **Esempio**$_\mu$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore percentuale
>
> $$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|3.14 - \pi|}{\pi} \cdot 100\% =$$
>
> $$= \frac{|3.14 - 3.14159265...|}{3.14159265...} \cdot 100\% \approx$$
>
> $$\approx \frac{|3.14 - 3.14159265|}{3.14159265} \cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

12.2 Proporzioni

Si dice *proporzione* la *relazione quaternaria* (cioè fra 4 numeri)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad \text{classicamente scritta} \quad \mathrm{x : y = z : w}$$

ma talvolta si trova anche :: invece del segno =.
Non sottolineeremo qua la corrispondenza del concetto con la realtà sensibile, dovuta essenzialmente alla natura del prodotto e della divisione, supponendola nota dagli studi elementari.

Osserviamo invece che per l'operazione di divisione, oltre alle 4 notazioni già viste,

$$\frac{x}{y} \qquad x/y \qquad x : y \qquad x \div y$$

in ambito farmaceutico se ne usa anche una quinta, la parola (latina) **per**, che noi sempre trascriveremo come frazione.

$$\text{Per esempio:} \quad 12 \text{ mg per ml} \quad \text{scriveremo} \quad \frac{12 \text{ mg}}{1 \text{ ml}}$$

ESERCIZIO Si abbia una boccetta di 10 ml di un farmaco X etichettata "15 mg per ml". Quanti millilitri (ml) bisognerà iniettare per somministrare una dose di 75 mg?

Svolgimento. Riscriviamo l'indicazione in etichetta nella forma

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}}$$

e produciamo la proporzione

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}} = \frac{75 \text{ mg}}{x \text{ ml}} \qquad \Big/ \cdot \frac{1 \text{ ml} \cdot x \text{ ml}}{15 \text{ mg}}$$

$$x \text{ ml} = \frac{75 \text{ mg} \cdot 1 \text{ ml}}{15 \text{ mg}} =$$

$$= 5 \text{ ml} \qquad \text{(e li abbiamo: la boccetta ne contiene 10).}$$

$$\boxed{5 \text{ ml}}$$

Sul web si ritrovano diffusamente scritte col "per", come "5 mg per 40 ml", e il "per" chiaramente significa / ma a quanto pare in Italia una tale scrittura non si usa, risulta praticamente sconosciuta.

NOTA 1. È ben evidente l'importanza di **calcolare esattamente i dosaggi** in Farmacia. Ci sono stati errori fatali. (Plausibilmente sono numerosissimi e solo in minima parte vengono scoperti).
Ecco cosa consiglia il Royal College of Nursing inglese online:

> When you have completed your calculation, remember to check your work. Here's a reminder of the ways you might do this:
>
> • repeat the calculation
>
> • ask a colleague to check your answer
>
> • try to calculate the answer again using a different method
>
> • check against the recommended dose range (e.g. using the British National Formulary)
>
> • look for unusually big or small answers.

NOTA 2. Sebbene esuli dagli obiettivi di questo testo elementare di matematica, si noti che il millilitro (corrispondente al centimetro cubo) può trovarsi indicato **online di fatto** (nei cataloghi di farmaci) sia con ml che mL ma qualcuno scrive anche *diversamente*, in un modo che potrebbe in via ipotetica confondersi con altro multiplo del litro. E si faccia anche ben attenzione a distinguere la l minuscola dal numero 1...

ESERCIZIO$_\mu$
Una pillola contiene una polvere costituita da $2.5\,mg$ di principio attivo e $300\,mg$ di eccipiente. Quanto principio attivo contiene $1\,kg$ della polvere?

SVOLGIMENTO
Una pillola contiene $(300 + 2.5)\,mg$ di polvere e allora si ha subito la proporzione

$$2.5\,mg : 302.5\,mg = x\,mg : 1\,kg$$

ovvero con scrittura più moderna

$$\frac{2.5\,mg}{302.5\,mg} = \frac{x\,mg}{1\,kg} \qquad \Big/ \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg}$$

trovandosi

$$x = \frac{2.5}{302.5} \cdot \frac{1\,mg}{1\,mg} \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg} =$$

essendo ovviamente $1\,kg = 1\,000\,g = 1\,000\,000\,mg$

$$= \frac{2.5}{302.5} \cdot 10^6 =$$

$$\boxed{8\,264.46\,mg}$$

(Circa 8 grammi e un quarto).

Esercizio$_\mu$ Trovare l'unico numero $x > 0$ che sia *medio proporzionale* fra 1 e $1 + x$. (Cioè soluzione di $1 : x = x : (1 + x)$).
Riscriviamo la proporzione

$$1 : x = x : (1 + x)$$

in questa forma

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \qquad \Big/ \cdot x \cdot (1 + x)$$

$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

ed escludendo la radice negativa

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \qquad \text{(mnemonico: } O_1\ numero_6!\ E'_1\ notevole_8.\text{)}$$

che è la *sezione aurea* ϕ. Si noti che $\frac{1}{\phi} = \phi - 1 \approx 0.618$.
Questo numero ϕ tende a ricorrere nelle Scienze Naturali.

ESERCIZIO$_\mu$
Qual è la misura in radianti di un angolo di 150°?
SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{x_{rad}}{150^\circ} \qquad \Big/ \cdot 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} \cdot 150^\circ = x_{rad}$$

$$x_{rad} = \frac{15}{18}\pi_{rad}$$

$$\boxed{\frac{5}{6}\pi}$$

ESERCIZIO$_\mu$
Qual è la misura in gradi di un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti?
SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = \frac{2}{3}\pi_{rad} : x^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{\frac{2}{3}\pi_{rad}}{x^\circ} \qquad \Big/ \cdot \frac{180^\circ \cdot x^\circ}{\pi_{rad}}$$

$$x^\circ = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ$$

$\boxed{120°}$

III – Funzioni elementari, con equazioni e disequazioni

13 Funzioni trigonometriche

Le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate: Astronomia, Geofisica, Topografia... In ambito farmaceutico e in medico in generale, tendono a ricorrere meno, in generale in 2 forme:

• qualitativa, semplicemente con riferimento alla forma[(22)] della sinusoide (ovvero della cosinusoide, che ha la stessa forma).cerch

• quantitativa, cioè il calcolo esatto, per esempio nelle determinazioni posizionali dell'MRI.

13.1 Definizioni

Nel piano cartesiano di assi X, Y e origine O consideriamo il circolo di centro O e raggio 1 (*circolo goniometrico)*. Ad ogni *angolo goniometrico* (che è orientato e ha un lato sul semiasse delle ascisse positive) di misura in radianti $x \in [-2\pi, 2\pi]$, e poi in effetti *facendo anche più di 1 giro*, $x \in \mathbb{R}$, associamo il punto $P(x)$ corrispondente sul circolo goniometrico. Si definiscono le funzioni *seno* e *coseno*, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e la *tangente*

$$\sin(x) := ordinata(P(x)) \qquad\qquad \cos(x) := ascissa(P(x))$$

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$(\textit{e anche la cotangente}\ \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$

Per esempio si ha (banalmente le prime 2, difficilmente la terza)

$$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1 \qquad \sin 1 \approx 0.84 \tag{1}$$

[22] Leggiamo per esempio in Sinusoidal heart rate pattern: Reappraisal of its definition and clinical significance, di Modanlou HD, Murata Y, su The journal of obstetrics and gynaecology research 2004 Jun;30(3):169-80: Sinusoidal heart rate (...) was called 'sinusoidal' because of its sine waveform (...) A true SHR is an ominous sign of fetal jeopardy needing immediate intervention.

13.2 Periodicità, simmetrie, gradi e radianti

Il punto goniometrico è palesemente $2\pi-$periodico, $P(x+2\pi) = P(x)$ e allora $P(x+2k\pi) = P(x)$ per ogni k intero, dal che si vede subito la periodicità del seno e del coseno, mentre con considerazioni meno elementari si trova che la tangente è π-periodica:

$$\begin{aligned} \sin(x+2k\pi) &= \sin(x), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos(x+2k\pi) &= \cos(x), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \tan(x+k\pi) &= \tan(x), \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Dalla disegno del circolo goniometrico capiamo subito che

il seno è dispari: $\sin(-x) = -\sin x$
il coseno è pari: $\cos(-x) = -\cos x$
la tangente è dispari: $\tan(-x) = -\tan x$

La misura dell'angolo piatto di π radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di $180°$, e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x° \tag{2}$$

che consente di passare da un sistema all'altro. Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$

e un qualche interesse ha anche 1 rad $\approx 57°$, e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (2). Quasi mai[23] si scrive *rad*.

[23] Per il lettore interessato, alcuni valori numerici interessanti:

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{4} \approx 0.785 & \text{(che di solito useremo nel senso di } \frac{\pi}{4}\, rad \approx 0.785\, rad) \\ \frac{\pi}{3} \approx 1.05 & \text{(che di solito useremo nel senso di } \frac{\pi}{3}\, rad \approx 1.05\, rad) \\ \frac{\pi}{2} \approx 1.57 & \text{(che di solito useremo nel senso di } \frac{\pi}{2}\, rad \approx 1.57\, rad). \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 & \text{(per esempio } \cos\frac{\pi}{4}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866 & \text{(per esempio } \cos\frac{\pi}{3}) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577 & \text{(per esempio } \tan\frac{\pi}{3}) \end{array}$$

13.3 Alcuni valori notevoli

Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$ π	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Nello schema soprastante è da intendersi che

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(270°)$$

assolutamente non si intenda che $-\frac{\pi}{2}$ **sia uguale a** $270°$.
La considerazione del quadrato inscritto nel circolo goniometrico e coi lati paralleli agli assi, che per il Teorema di Pitagora ha lato $\sqrt{2}$, dà subito, con analogo *caveat* come sopra (e anche dopo),

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$ $\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$ $\frac{7}{4}\pi$
$x°$	$45°$	$135°$	$225°$	$315°$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1	-1	1	-1

La considerazione dei 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico, con un vertice in $(0,1)$ e rispettivamente in $(1,0)$, dà subito, dividendoli in triangoli equilateri di lato 1 e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$ $\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$ $\frac{11}{6}\pi$
$x°$	$30°$	$150°$	$210°$	$330°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$ $\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$ $\frac{5}{3}\pi$
$x°$	$60°$	$120°$	$240°$	$300°$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

La considerazione di decagoni regolari darebbe ancora altri valori.

13.4 Alcune formule goniometriche notevoli

Nel corso dei secoli sono state dimostrate moltissime formule. Ecco alcune delle principali.
Identità goniometrica fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{3}$$

Formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x \cos x$$

$$\cos(2\,x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\,\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\,\sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan(2\,x) = \tfrac{2\,\tan(x)}{1-\tan^2 x}, \qquad x \neq \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ce ne sono poi moltissime altre([24]).

[24] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule:
Formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\,\sin\tfrac{x+y}{2}\,\cos\tfrac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2\,\cos\tfrac{x+y}{2}\,\sin\tfrac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2\,\cos\tfrac{x+y}{2}\,\cos\tfrac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2\,\sin\tfrac{x+y}{2}\,\sin\tfrac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

Formule di bisezione della tangente:

$$\tan\frac{x}{2} = \begin{cases} \tfrac{\sin x}{1+\cos x}, & x \neq (2\,k+1)\,\pi \\[2ex] \tfrac{1-\cos x}{\sin x}, & x \neq k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Vi sono poi le *formule parametriche razionali*, e molte altre.

13.5 Funzioni goniometriche inverse

Arcoseno:
$\arcsin x$ è l'angolo α il cui seno è x, con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Arcocoseno:
$\arccos x$ è l'angolo α il cui coseno è x, con $\alpha \in [0, \pi]$.

Arcotangente:
$\arctan x$ è l'angolo α la cui tangente è x, con $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.
(25) (26)

ESERCIZIO$_\mu$
$*$ La concentrazione sanguigna di una certa sostanza sia modellizzata nelle 24 ore del giorno da

$$u_a(t) := 2\,a\, + a\, \sin \frac{\pi\, t}{12} \qquad 0 \le t \le 24$$

essendo a un parametro fissabile farmacologicamente. In quale orario la concentrazione è ≥ 2.5 per $a := 1$?

Svolgimento.
Seppure non sia necessario per risolvere il problema, vediamo su

[25] In simboli, per chi volesse:

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}$$

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

$$\arctan := \left(\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1}$$

[26] **Alcuni valori notevoli.** Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\nexists$
arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono. (Per esempio $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.61548$).

WolframAlpha il grafico della concentrazione per $a := 1$ scrivendovi

```
plot 2+Sin[Pi t/12], t from 0 to 24
```

Ora (con $a := 1$) abbiamo la disequazione

$$2 + \sin\frac{\pi\, t}{12} \geq 2.5 \qquad \Big/ + (-2)$$

$$\sin\frac{\pi\, t}{12} \geq 0.5$$

$$\text{poniamo } x := \frac{\pi\, t}{12} \text{ ottenendo } \sin x \geq \frac{1}{2}$$

e ci interessano solo i tempi

$$0 \leq t \leq 24 \qquad \Big/ \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$0 \leq \frac{\pi\, t}{12} \leq 2\,\pi \text{ cioè } 0 \leq x \leq 2\,\pi$$

e allora in $[0, 2\,\pi]$ dobbiamo risolvere $\sin x \geq \frac{1}{2}$, che si fa disegnando il circolo goniometrico, trovando subito (sono valori notevoli)

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi\, t}{12} \leq \frac{5}{6}\pi \Big/ \cdot \frac{12}{\pi}$$
$$2 \leq t \leq 10$$

e in conclusione

$$\boxed{\text{Fra le 2 e le 10 di mattina}}$$

ESERCIZI SULLA LEZIONE 13

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, corrispondenti appunto a $\sin x = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(Si notino le periodicità).

ESERCIZIO$_{\mu}$ Approssimare $\cos(1)$ usando le (1) e (3).
Si verifichi poi su WolframAlpha con `Cos[1]`

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2\, \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Svolgimento
Con la formula di addizione del coseno

$$2\Big(\cos x\, \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x\, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\left((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\cos x - \sqrt{3}\, \sin x$$

e con il secondo membro così riscritto la disequazione equivale a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < -\cos x - \sqrt{3}\, \sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < -\sqrt{3}\, \sin x$$

$$-\sqrt{3}\,\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big/ : (-\sqrt{3}) < 0$$
$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da $-\frac{5}{6}\pi$ fino a $-\frac{\pi}{6}$, estremi esclusi, corrispondente appunto a $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{-\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

equivalentemente scritta

$$\boxed{\tfrac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \tfrac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Naturalmente si potrebbero considerare esercizi ↑ più complessi.

14 Funzioni e dis/equazioni ir/razionali

14.1 Polinomi e funzioni razionali intere

Un polinomio è una *scrittura* come $2\,x^7 - 3\,x^5 + x^2 - x + 2$ e in generale

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + ... + a_n\,x^n$$

ed esso definisce una funzione *razionale intera* (o *polinomiale*), e n è il *grado* se $a_n \neq 0$.
Esistono similmente polinomi in più variabili, come $x^2 + x^8\,y^2 - 1$, che ha grado 10.

14.2 Funzioni e dis/equazioni razionali intere

Limitandosi ad 1 variabile, un'**equazione razionale intera** è il predicato che uguaglia 2 polinomi in 1 variabile $P_1(x) = P_2(x)$ ovvero dopo le opportune riduzioni, che uguaglia un polinomio (in 1 variabile) a 0:

$$P(x) = 0$$

e la **disequazione razionale intera** si ottiene sostituendo il segno di uguaglianza con uno di disuguaglianza, per esempio

$$x^2 + 5x + 6 \leq 0\,.$$

Abbiamo visto come risolvere equazioni e disequazioni razionali intere di primo e secondo grado.
Per quelle di grado superiore, consideriamo per esempio

$$2\,x^4(-x^2-2x+8)(2-x)(1-x+x^2) = 0 \qquad \text{o, disequazione,} \; > 0,$$

oppure altra disequazione con $\geq$ oppure $<$ oppure $\leq$.
Per risolvere *fattorizziamo* il polinomio in fattori di primo grado e/o di secondo grado *irriducibili* ovvero con discriminante negativo. E poi si risolve con uno schema di prodotto dei segni.[27]

[27] Ecco qualche dettaglio per il lettore interessato. Il monomio $2\,x^4$ si fattorizza in $2\,x{\cdot}x{\cdot}x{\cdot}x$ ma in effetti i fattori che sono monomi x^n conviene lasciarli stare come sono. Il polinomio di

L'equazione e le 4 disequazioni

$$2\,x^9-2\,x^8-22\,x^7+56\,x^6-56\,x^5+32\,x^4 \qquad =0,>0,\geq 0,<0,\leq 0$$

si risolvono come prima una volta che si riconoscesse che questo è proprio il polinomio di prima, ma ora è molto lontano dalla fattorizzazione. Il problema di fattorizzare un polinomio può essere facile, come è in questo caso, o difficile, o impossibile.
Prima di tutto *raccogliamo* il fattore x^4, subito visto:

$$x^4\,(2\,x^5-2\,x^4-22\,x^3+56\,x^2-56\,x+32)$$

e ci resta da fattorizzare il polinomio $P_5(x)$ di 5^ grado. In questo caso si può fare[28] abbastanza facilmente ma in questa trattazione

secondo grado $-x^2-2x+8$, con discriminante positivo, abbiamo visto che è $-1\cdot(x-2)(x+4)$. Il fattore di primo grado $2-x$ è già a posto. E $1-x+x^2$ è irriducibile avendo discriminante negativo, e allora non ha zeri. Si ha allora la fattorizzazione

$$2\,x^4(-1)(x-2)(x+4)(2-x)(1-x+x^2)\,.$$

L'equazione con $=0$ equivale, considerato che $x^4=0 \Leftrightarrow x=0$,

$$x=0 \;\vee\; x-2=0 \;\vee\; x+4=0 \;\vee\; 2-x=0$$

che dà $x\in\{-4,0,2\}$. La disequazione si fa con lo schema di prodotto dei segni visto in precedenza trovandosi (per ≤ 0) la soluzione $x\leq -4 \vee x=0 \vee x=2$. Per >0 si troverebbe $-4<x<0 \vee 0<x<2 \vee x>2$.

[28] Per il lettore interessato: prima si raccoglie 2

$$2\,(x^5-2\,x^4-11\,x^3+28\,x^2-28\,x+16)$$

in modo da avere un polinomio *monico*, cioè con *coefficiente principale* 1, poi si procede con la Regola di Ruffini, se si può. Cercheremo qua *solo* fattori $x-m$ con m un divisore intero del termine costante: ±1, ±2, ±4, ±8, ±16. Allora basta cercare un numero m fra quelli, il quale annulli il polinomio. È $P_5(2)=0$ e allora dividiamo per $x-2$ con la Regola di Ruffini:

i coefficienti →	+1	−1	−11	+28	−28	+16
la radice → +2	↓	+2	+2	−18	+20	−16
	+1	+1	−9	+10	−8	0 ← sempre così

che dà i coefficienti del quoziente, e allora la fattorizzazione

$$(x-2)(x^4+x^3-9x^2+10x-8)$$

e riprendendo il monomio x^4 e il fattore 2

$$2\,x^4(x-2)(x^4+x^3-9x^2+10x-8)\,.$$

ci limiteremo solo ai casi in cui, arrivati a questo punto, si abbia un polinomio di grado al più 2 (invece qua è 5) e allora si procede come prima.

Esempio$_\mu$ La Formula di Livi per il peso ideale è
$\textit{peso ideale} = (2.37 \times \textit{altezza in metri})^3$
La Formula di Keys per il peso ideale per le donne è
$\textit{peso ideale donne} = (\textit{altezza in metri})^2 \times 20.6$
Per quali altezze (realistiche) danno lo stesso peso, e quale?

Detta h l'altezza in metri – unità di misura che metteremo nella soluzione ma ometteremo nei calcoli – abbiamo l'equazione di 3^ grado

$$(2.37\,h)^3 = 20.6\,h^2$$

e successivamente

$$2.37^3 \cdot h^3 - 20.6\,h^2 = 0$$

$$h^2 \cdot (2.37^3 \cdot h - 20.6) = 0$$

$$h = 0\ (\textit{non realistica}) \quad 13.312053\,h = 20.6$$

e allora

$$h = \frac{20.6}{13.312053}$$

$$p = \Big(\frac{20.6}{13.312053}\Big)^2 \cdot 20.6$$

Si continua cercando un fattore $x - m'$ con m' fra i divisori interi di -8, e si trova che 2 annulla il polinomio di quarto grado $P_4(x)$, e allora lo si divide per $x - 2$ con la Regola di Ruffini trovando

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x^3+3x^2-3x+4)$$

poi cercando fra i divisori interi di 4 si trova l'annullamento di $P_3(x)$ in -4 da cui con la Regola di Ruffini applicata a $P_3(x)$

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x+4)(x^2-x+1)$$

che è come prima (un fattore è opposto ma congloba il (-1)).

$$\boxed{\begin{array}{c} h \approx 1.55\, m \\ p \approx 49.3\, kg \end{array}}$$

14.3 Funzioni e dis/equazioni razionali fratte

Ovviamente la *disequazione razionale fratta*

$$\begin{array}{r} \scriptstyle polinomio \rightarrow \\ \scriptstyle polinomio \rightarrow \end{array} \quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0$$

ha la stessa soluzione dell'equazione razionale intera $N(x) \cdot D(x) > 0$ e allora si risolve con lo stesso schema di prodotto dei segni.
Se invece di $>$ di ha $\geq$ dopo aver risolto come sopra si aggiungano alla soluzione tutti i valori di x che annullano il numeratore.
Se invece si ha $\leq$ o $\geq$ si moltiplichino ambo i membri della disequazione per -1 e cosí il $<$ diventa $>$ e il $\leq$ diventa $\geq$ e il -1 lo si conglobi nel numeratore, e si risolva come sopra.
Naturalmente se la disequazione razionale fratta si presenta inizialmente in forma non canonica

$$\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{C(x)}{D(x)}$$

prima si portino le x a sinistra, e si metta a denominatore comune riconducendosi alla forma canonica sopra scritta, e così per tutti i segni di disuguaglianza.

14.4 Funzioni e dis/equazioni irrazionali

• Le radici di indice dispari (cubiche, quinte...) sono crescenti su $\mathbb{R}$ e allora l'equazione o disequazione

$$\sqrt[dispari]{f(x)} \quad {\scriptstyle qualunque\ segno\ di\ dis/uguaglianza} \quad g(x)$$

si può affrontare semplicemente elevando ambo i membri all'indice (dispari) della radice (che così scompare). Allora si hanno queste

5 semplici equivalenze, che si ricavano subito appunto elevando a potenza conservando l'uguaglianza o l'ordinamento, e allora in definitiva non c'è niente da veramente "imparare a memoria":

$$
\begin{array}{rcccl}
\sqrt[3]{f(x)} & = & g(x) \Leftrightarrow f(x) & = & g^3(x) \\
 & > & & > & \\
 & \geq & & \geq & \quad \text{in tutte} \\
 & < & & < & \quad \text{l'ordinamento} \\
 & \leq & & \leq & \quad \text{si conserva}
\end{array}
$$

e il 3 della radice può sostituirsi con ogni indice dispari.

• Il caso delle radici di indice pari (radici quadrate, quarte...) è meno semplice perchè sono definite solo sui numeri non negativi. Quelle equazioni e disequazioni sono regolate da queste 2 formule

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \qquad \text{(che diremo \textbf{``radice minore''})}$$

e da varie altre che non tratteremo[29].
Si risolva per esempio$_\mu$ $x > \pi + \sqrt{x^2 - 10}$.

[29] Per il lettore interessato ecco le altre formule limitatamente alla radice quadrata. Prima di tutto il caso **"radice minore o uguale"**, similissimo a quello "radice minore":

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

e poi 2 casi (similissimi) **"radice maggiore"** e **"radice maggiore o uguale"**:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Si risolva per esempio$_\mu$ $\sqrt{x^2 - 9} \geq x - 1$.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 14

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
Si risolva la seguente disequazione:

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8}$$

SVOLGIMENTO
Essendoci una radice quadrata, cercheremo di ricondurci al caso "radice maggiore" oppure al caso "radice minore", e in effetti in questo caso

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8} \quad \Big/ + (-\mathrm{e})$$
$$x - \mathrm{e} > \sqrt{x^2 - 8}$$
$$\sqrt{x^2 - 8} < x - \mathrm{e}$$

proprio al caso "radice minore", e allora la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ x - \mathrm{e} > 0 \\ x^2 - 8 < (x - \mathrm{e})^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{8} \vee x \geq \sqrt{8} \\ x > \mathrm{e} \\ x^2 - 8 < x^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -2\sqrt{2} \vee x \geq 2\sqrt{2} \approx 2.82 \\ x > \mathrm{e} \approx 2.718 \text{ che sappiamo a memoria} \\ 2\,\mathrm{e}\,x < \mathrm{e}^2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \approx 2.831 \text{ con la calcolatrice dal soprastante} \end{cases}$$

e mettendo in ordine crescente i capisaldi (ovvero valori delimitanti) trovati

........$-2\sqrt{2}$.........e..........$2\sqrt{2}$.........$\frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}$..........
.............|............|............|..............|............ schema d'intersezione

∼∼∼∼∼ − − − − − − −− ∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼

− − − − − − −− ∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼ $\cap$

∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼ − − −−

otteniamo il soprastante schema d'intersezione che ci dà la soluzione

$$\boxed{2\sqrt{2} \leq x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}}$$

15 Le funzioni esponenziali e logaritmiche

15.1 Logaritmi naturali e decimali; esponenziale

Per introdurre i logaritmi, possiamo vedere

$$\log_2 8 = 3 \qquad \text{come una } \textit{scrittura alternativa} \text{ di} \qquad 2^3 = 8.$$

Il logaritmo in base b di x è l'esponente da dare a b per avere x. (Ma) dev'essere $x > 0$, e $0 < b \neq 1$. Ecco due esempi:

[30] $$\log_2 8 = 3 \Leftarrow 2^3 = 8 \qquad \log_{10} 100 = 2 \Leftarrow 10^2 = 100.$$

Considereremo quasi solo 2 basi: di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi usato in Chimica,

il *logaritmo decimale*, in base 10,

$$\lg x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_{10} x \qquad (\text{ma purtroppo anche } \log x),$$

e il *logaritmo naturale*, in base e,

$$\ln x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_e x \qquad (\text{ma purtroppo anche } \log x).$$

oggi preferito in Matematica e Fisica, ed e è il numero di Nepero, in inglese Euler's number, la "somma infinita" (serie) dei reciproci dei fattoriali dei numeri naturali

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \approx \mathbf{2.718}\nearrow$$

Ecco due valori che dobbiamo imparare a memoria:

$$\lg 2 \approx \mathbf{0.3} \quad {}^{(31)} \tag{4}$$

$$\lg \mathrm{e} \approx \mathbf{0.4343} \tag{5}$$

---

[30] Più espressivamente, il logaritmo $\log_2 8 = 3$

è l'**e**sponente **giu**sto	3	mnemonico:
per **l**a sua **ba**se	2	È GIÙ aL BAAR!
per avere il suo **ar**gomento	8	

[31] O meglio ≈ 0.301. Il numero 0.3 ha errore (percentuale rispetto l'esatto) $< 0.5\%$.

Tutti i logaritmi in 1 valgono 0. I logaritmi in base $b > 1$ sono funzioni crescenti ("verso $+\infty$"), e in base $0 < b < 1$ decrescenti ("verso $-\infty$"). In ogni caso il crescere in valore assoluto avviene con straordinaria lentezza, per esempio $\log_{10} 1000 = 3$. I limiti in 0 sono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. In ogni caso è $\log_b : I\!R^+ \to I\!R$. (Per ogni possibile base b) il logaritmo è una funzione biiettiva, e l'inversa del logaritmo naturale si chiama *(funzione) esponenziale*, ed è definita su tutto $\mathbb{R}$, cioè $\exp : I\!R \to I\!R$:

$$\exp := \ln^{-1} \qquad\qquad \ln = \exp^{-1},$$

e si vede subito che coincide con la potenza in base e, cioè

$$\exp x = \mathrm{e}^x.$$

Questi $^{-1}$ denotano l'<u>inversa</u>, assolutamente non il reciproco.

(L'inversa di $\ln x$ come detto è $\exp x$, la reciproca di $\ln x$ è $\frac{1}{\ln x}$, una funzione completamente diversa, neanche definita per $x < 0$).

L'esponenziale in 0 vale 1, ed è crescente "verso $+\infty$" con grande rapidità, per esempio, $\exp(20)$ è più o meno mezzo miliardo.

15.2 Proprietà dell'esponenziale e dei logaritmi

In questo baragrafo b rappresenta qualunque numero reale che possa essere base di un logaritmo, cioè

$$b > 0 \wedge b \neq 1\,.$$

Un'attenta considerazione di quanto detto finora dà

$$\lg 10^x = x,\ \forall x \qquad 10^{\lg x} = x,\ \forall x > 0.$$

$$\ln \exp x = \ln \mathrm{e}^x = x,\ \forall x \qquad \exp \ln x = \mathrm{e}^{\ln x} = x,\ \forall x > 0$$

$$\log_b b^x = x,\ \forall x \qquad b^{\log_b x} = x,\ \forall x > 0.$$

I logaritmi in 1 valgono 0 e gli esponenziali in 0 valgono 1:

$$\lg 1 = 0 \qquad 10^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\log_b 1 = 0 \qquad b^0 = 1$$

Il logaritmo trasforma il prodotto in somma:
(formule per il *logaritmo del prodotto* ed *esponenziale della somma*)

$$\lg(x\,y) = \lg x + \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$$

$$\ln(x\,y) = \ln x + \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$$

$$\log_b(x\,y) = \log_b x + \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

Il logaritmo trasforma la divisione in sottrazione:
(formule per il *logaritmo del quoziente* ed *esponenziale della differenza*)

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad 10^{x-y} = 10^x/10^y$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/e^y$$

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad b^{x-y} = b^x/b^y\,.$$

Proprietà del logaritmo della potenza

$$(\forall\,\alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \lg x^\alpha = \alpha\ \lg x$$

$$(\forall\,\alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \ln x^\alpha = \alpha\ \ln x$$

$$(\forall\,\alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \log_b x^\alpha = \alpha\ \log_b x$$

e da quest'ultima discendono tutte le successive proprietà di questo paragrafo, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{n}$.

Il logaritmo trasforma il reciproco nell'opposto:

$$\lg \frac{1}{x} = -\lg x$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$
$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x$$

Il logaritmo trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento:

$$\lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x$$
$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$
$$\log_b \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_b x$$

e questo si estende alle radice di qualunque indice:

$$\lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x$$
$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$
$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x\ .$$

ESERCIZIO SULLA LEZIONE 15

ESERCIZIO
Consideriamo il pH della Chimica:

$$-\log_{10} y$$

dove y viene spesso scritto $[H^+]$ e letto *"concentrazione degli H^+"*, ma tutto ciò richiederebbe precisazioni di Chimica di cui qua non ci occupiamo.
A cosa corrisponde la diminuzione di 0,5 nel pH? Con grossolana approssimazione, si esprima infine la soluzione a parole, come "circa dimezzare y" o "circa decuplicare y" o analoghi.

SVOLGIMENTO

$$-\log_{10} y - 0{,}5 =$$

ricordando che $x \equiv \log_b b^x$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} 10^{0{,}5} =$$

e osservando che $0{,}5 = \frac{1}{2}$ e ricordando che $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} \sqrt{10} =$$

per algebra delle parentesi

$$= -\Big(\log_{10} y + \log_{10} \sqrt{10}\Big) =$$

per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$= -\log_{10} \left(y \cdot \sqrt{10}\right)$$

cioè a dire, y viene moltiplicata per $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, e con grossolana approssimazione, come richiesto,

$$\boxed{\text{corrisponde a circa triplicare } y}$$

16 Calcolo dei logaritmi

16.1 Formule di cambiamento di base

Formule di cambiamento di base:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad {}^{(32)}\,{}^{(33)} \text{ in particolare } = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln\, x}{\ln\, b}$$

da cui $\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}}$ e con la (5) si ottiene questa formula approssimata per la conversione fra logaritmi naturali e decimali

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$$

da cui reciprocamente

$$\lg x \approx 0.4343 \ln x$$

(cioè il logaritmo decimale è *vagamente* la metà del naturale[34] e con maggior precisione il 43% e ancor meglio 43.43%).

$$\left(\text{Le formule esatte sono:} \quad \ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \qquad \lg x = (\lg \mathrm{e}) \ln x\right).$$

Esempio$_\mu$

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

costante spesso approssimata a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci: `link->`.

16.2 Calcolo approssimato dei logaritmi

Dato un numero positivo x, lo si esprima in notazione scientifica

$$x = y \cdot 10^n \qquad 1 \le y < 10$$

[32] Anche $= (\log_c x) \cdot (\log_b c)$.

[33] Per il lettore interessato, si ricavano subito anche $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$, e $\log_{1/b} x = -\log_b x$.

[34] Entrambe le ultime 2 formule hanno circa $\frac{1}{79\,000}$ di errore relativo.

e vale

$$\lg x = \lg y + n \qquad 1 \leq y < 10 \tag{6}$$

e allora ci basta saper calcolare approssimatamente il logaritmo decimale dei numeri fra 1 e 10 e questo si può fare in molti modi, in particolare

$$\lg y \approx \frac{\sqrt{\sqrt{y}} - 1}{\frac{\sqrt{\sqrt{y}}}{4} + 0.33} \qquad 1 \leq y < 10 \qquad \textit{errore}^{(35)} < 1\% \tag{7}$$

Per i logaritmi in altre basi si calcoli il logaritmo decimale con queste stesse formule (6) e (7) e poi si usi la formula di cambiamento di base $\log_b x = \frac{\lg x}{\lg b}$.

Esistono anche altre approssimazioni[36].

16.3 Esempio di uso del logaritmo: il pH

Il pH è una complessa questione chimica, per la quale si rinvia comunque ai testi specialistici. Qua vogliamo illustrarne qualche proprietà matematica. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce pH:

> pH is defined as the decimal logarithm of the reciprocal of the hydrogen ion activity, a_H+, in a solution
>
> $$\text{pH} = -\log_{10}(a_{H+}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right)$$

[35] Errore percentuale rispetto l'esatto.

[36] Un'approssimazione calcolabile con le sole 4 operazioni e la radice quadrata è

$$\log_{10} x \approx (x^{1/256} - 1) \times 111$$

che su una calcolatrice che operi con almeno 7 cifre (decimali) significative dovrebbe avere non più di 0.004 di errore relativo (cioè 0.4%) e assoluto per $1.1 \leq x \leq 11$. Naturalmente $x^{1/256}$, si ottiene estraendo 8 volte consecutive la radice quadrata. Per i numeri $y < 1.1$ o $y > 11$, li si moltiplichi per un adeguato 10^m con $m \in \mathbb{Z}$ affinchè l'ottenuto $y = 10^m x$ ricada in $[1.1, 11]$ e poi

$$\log_{10} y = \log_{10}(10^m x) = m + \log_{10} x$$

per esempio $\log_{10} 1265 = \log_{10} 1.265 + 3$.

Se il pH diminuisce di 1 questo equivale al decuplicare di a_H:

$$\begin{aligned}
pH - 1 = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) - 1 = \\
= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + \log_{10} 10^{-1} = \\
= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + \log_{10}\frac{1}{10} = \\
= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}} \cdot \frac{1}{10}\right) = \\
= \log_{10}\left(\frac{1}{10\, a_{H+}}\right)
\end{aligned}$$

Così il suo diminuire di 2 corrisponde al centuplicare di a_H.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Ecco alcune altre formule classiche dell'algebra:

$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ Legge di annullamento del prodotto

Arcoseno:
$\arcsin x$ è l'angolo α il cui seno è x, con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Arcocoseno:
$\arccos x$ è l'angolo α il cui coseno è x, con $\alpha \in [0, \pi]$.

Arcotangente:
$\arctan x$ è l'angolo α la cui tangente è x, con $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.

L'errore percentuale rispetto a un valore esatto è definito da

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

e si noti il valore assoluto.
Si noti che si può dare solo conoscendo il valore esatto.
Naturalmente i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati.*

Esempio$_\mu$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore percentuale

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|3.14 - \pi|}{\pi} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14 - 3.14159265...|}{3.14159265...} \cdot 100\% \approx$$

$$\approx \frac{|3.14 - 3.14159265|}{3.14159265} \cdot 100\% \approx 0.051 \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

17 Dis/equazioni esponenziali e logaritmiche

17.1 Teoria per le dis/equazioni con exp e log

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; b^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 0,\, b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base b positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo se $b > 1$, che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{f(x)} > \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; b^{f(x)} > b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 1$$

e tutte similmente con $<$, $\geq$, $\leq$.

Il logaritmo è iniettivo e definito per ogni numero positivo e allora

$$0 < f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \lg f(x) = \lg g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \log_b f(x) = \log_b g(x)$$

cioè si può applicare il logaritmo in qualunque base ad ambo i membri di un'equazione $f(x) = g(x)$ ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni, $\underline{\text{se } f(x) > 0 \vee g(x) > 0}$ (in particolare se una delle 2 funzioni è un esponenziale in qualche base eventualmente moltiplicato per una costante positiva, che è il caso più comune nella pratica).

Di più: il logaritmo decimale e quello naturale e ogni logaritmo in base $b > 1$ sono crescenti([37]) e allora si può applicarli conservando l'ordinamento:

$$0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \lg f(x) \leq \lg g(x) \quad \textit{e anche con} \;\; <$$

$$0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \ln f(x) \leq \ln g(x) \quad \textit{e anche con} \;\; <$$

$$\forall\, b > 1 \quad 0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \log_b f(x) \leq \log_b g(x) \;\; \textit{e anche con} \;\; <$$

17.2 Esempi di equazioni correlate alle Scienze Biomediche

Esempio$_\mu$ L'intensità sonora in decibel è definita sostanzialmente come

$$\text{intensità sonora} := 10\left(\lg \frac{\text{energia passante in 1 s per 1 m}^2}{\text{una prefissata energia passante in 1 s per 1 m}^2}\right) dB$$

dove la prefissata energia passante in 1 s per un m^2 è la (piccolissima) $1pW/m^2$.
(L'argomento dei logaritmi e degli esponenziali è sempre adimensionale, cioè un numero puro, senza unità di misura: non esiste il logaritmo di 3 metri o 4 secondi).
Allora come funzione dell'energia è del tipo

$$a\ \lg \frac{x}{c} \quad = a\,(\lg x - \lg c) \quad = a \lg x + d \quad (\text{con } d := -a \lg c)$$

(e si faccia ben attenzione a distinguere la soprastante scrittura dalla $a \lg(x + d)$). Il grafico è proprio come quello di $\lg x$, riscalato da a sull'asse delle ordinate e traslato verticalmente di d.

---

[37] Invece coi logaritmi in base minore di 1 si inverte l'ordinamento:

$$(\forall\, b,\ 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) < g(x) \;\Leftrightarrow\; \log f(x) > \log g(x)$$

$$(\forall\, b,\ 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \log f(x) \geq \log g(x)\,.$$

Calcoliamo di quanti decibel aumenta l'intensità sonora raddoppiando l'energia.

Detta E l'energia considerata e $2\,E$ il suo doppio, si ha

$$\text{intensità\_sonora}(2E) - \text{intensità\_sonora}(E) =$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{1pW/m^2} - 10\ \lg \frac{E}{1pW/m^2} =$$

ricordando che $\lg(x/y) = \lg x - \lg y$

$$= 10\left(\lg(2\,E) - \lg E\right) = \quad (\text{mentre } \lg(1pW/m^2) \text{ si elide})$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{E} = 10\ \lg 2 \approx 10 \cdot 0.3 = 3$$

cioè ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento approssimativo di 3 decibel.

Esempio$_\mu$ La successione di Fibonacci, che modellizza l'espansione di una popolazione animale – almeno nelle fasi iniziali – è sì definita per ricorrenza (e solo su $\mathbb{N}$) ma è approssimata con una funzione esponenziale in base la sezione aurea:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \qquad (8)$$

per esempio $a_{10} = 55 \approx 55.0036$.
Dopo quanti mesi (se t indicia i mesi) la popolazione raggiunge il valore $135\,301\,852\,344\,706\,746\,049$, oppure anzi, uscendo dall'esattezza ideale del problema, un valore $1.35 \cdot 10^{20}$?

Abbiamo l'equaziona approssimata

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\phi^n \approx 1.35 \cdot 10^{20} \qquad /\lg$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{5}} + n\ \lg \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) \qquad \Big/ + \lg\sqrt{5}$$

$$n \lg \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5} \qquad \Big/ : \lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5}}{\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg 2.23607}{\lg 1.61803}$$

e insomma ci servono i valori (approssimati) dei logaritmi decimali di 3 numeri.
Con l'approssimazione prima vista si ha

$$\approx \frac{20 + 0.130 + 0.35054}{0.2089} \approx 98.04$$

e calcolando con pazienza si troverà che il 98-esimo numero di Fibonacci è proprio 135 301 852 344 706 746 049. (Oppure con WolframAlpha: `Fibonacci[98]`).

Esempio$_\mu$ Il piombo nelle ossa ha un'emivita – supponiamo esponenziale il suo scomparire, com'è ragionevole in questi casi – di (circa) 10 anni. In quanto tempo si riduce del 75%? E del 90%? E del 95%? E del 97%?

La riduzione <u>del</u> 75% è la riduzione <u>al</u> 25%, cioè ai $\frac{25}{100}$ ovvero $\frac{1}{4}$ e allora corrisponde a 2 dimezzamenti: allora ci vogliono 20 anni.
Per il 90% dobbiamo illustrare l'equazione esponenziale in questione, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è

$$u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

e r è una costante <u>positiva</u>[38] che dipende da caso a caso, e in questo caso possiamo calcolarla dall'emivita di 10 anni:

$$u(emivita) \overset{DEF}{=} \frac{u(0)}{2} \overset{EQ}{=} u(0)\, \mathrm{e}^{-r\, 10\, anni} \qquad \Big/ : u(0)$$

[38] Oppure l'equazione può essere scritta $u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{k\,t}$ con k una costante negativa.

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ \ln$$

$$\ln\frac{1}{2} = -r\,10\,anni$$

$$-\ln 2 = -r\,10\,anni \quad \Big/ : (-10\,anni)$$

$$r = \frac{\ln 2}{10\,anni}$$

ottenendosi così l'equazione dello scomparire del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

Ora ci si chiede quando sarà ridotto del 90% ovvero al 10%, cioè $u(t) = 0.1\,u(0)$:

$$0.1\,u(0) \overset{EQ}{=} u(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \Big/ : u(0)$$

$$0.1 = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \Big/ \lg$$

$$-1 = \lg \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t}$$

$$-1 = -\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t\,\lg \mathrm{e}$$

$$t = \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e}\cdot\ln 2} \approx \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e}\cdot\frac{\lg 2}{\lg \mathrm{e}}} = \frac{10\,anni}{\lg 2} \approx \frac{10\,anni}{0.3}$$

$\approx$ 33.3 anni (valore che, nella pratica, possiamo stare sicuri che verrà riportato come 33 anni).

Si risolvano gli altri quesiti posti associatamente a questo appena risolto. Con 95% si dovrà calcolare $\lg 0.05 = \lg\left(\frac{1}{2}\cdot 0.1\right) = \lg\frac{1}{2} + \lg\frac{1}{10} = -\lg 2 - \lg 10 \approx -0.3 - 1 = -1.3$.

Un'altra questione interessante è quella della logistica standard

$$f(t) := \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$$

correlata allo sviluppo di una popolazione (animale, microbica...) quando si consideri che, ad un certo punto – e a differenza di quel che si considera nel modello ultra-semplificato della successione di Fibonacci – i vari organismi iniziano ad ostacolarsi a vicenda.
Se ne veda il grafico su Wikipedia.
Si trovi per quali tempi $f(t) = 0.5$ e $f(t) = 3/4$.

ESERCIZI SULLE LEZIONI 15, 16 E 17

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che dev'essere

$$\underline{x > 0}$$

perchè x è argomento di un logaritmo. (Ovviamente $1 + x^2 > 0$ sempre). Ricordando le $\log_b u + \log_b v = \log_b(u\, v)$ e $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$ e $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \qquad \Big/ 10^\wedge \qquad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{200\, x}{1 + x^2} = 100 \qquad \Big/ \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2\, x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2\, x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che è > 0).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$* \approx$ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2 + 10} + \log_{10} \frac{x^2 + 10}{10^2} = 1$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\underline{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente $\log_{10} 0$). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perchè per $x \neq 0$ gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).
Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10} \left(\frac{x^2}{x^2+10} \cdot \frac{x^2+10}{10^2} \right) = 1$$

e semplificando

$$\log_{10} \frac{x^2}{10^2} = 1 \quad \Big/ \; 10^\wedge \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{x^2}{10^2} = 10^1 \quad \Big/ \cdot 10^2$$

$$x^2 = 10^2 \cdot 10^1$$

$$x = \pm\sqrt{10^2 \cdot 10} = \pm\sqrt{10^2}\,\sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione $x \neq 0$ ci faccia escludere qualche valore)

$$\boxed{x = \pm 10\sqrt{10} \approx \pm 31.623}$$

oppure con un decimale in meno

$$x = \pm 10\sqrt{10} \approx \pm 31.62$$

IV – Statistica descrittiva

Citazione

Leggiamo in “Matematica per le scienze della Vita”[39]:

> Capire i dati è un processo che richiede diversi passi:
>
> 1. raccogliere i dati;
> 2. riassumere dati;
> 3. analizzare i dati;
> 4. interpretare i risultati e presentarli.
>
> (...) La fase 2 del processo (riassumere i dati) è quella della “statistica descrittiva”, in cui l’obiettivo è di astrarre dai dati alcune proprietà per poterli meglio interpretare.
> (...) La fase 3 del processo coinvolge tipicamente l’area della“statistica inferenziale”, che consiste nella stima dei parametri e nel testare le ipotesi.

[39] Di Erin N. Bodine, Suzanne Lenhart, Louis J. Gross, a cura di Gabriella Caristi, Maurizio Mozzanica, Giacomo Tommei, 2017, UTET Università, titolo originale Mathematics for the Life Sciences, trad. Patrizia Ferreri

18 Introduzione alla Statistica Descrittiva

La Statistica Descrittiva si occupa essenzialmente della
rilevazione
e sintesi
di dati. È cosa ben diversa, più semplice e storicamente antica, dalla Statistica Inferenziale che verrà trattata fra le Matematiche dell'Incertezza.

In una trattazione elementare della Statistica Descrittiva non si distingue fra *popolazione* e *campione*: abbiamo i dati che abbiamo, e quelli consideriamo popolazione, anche se in effetti sono un campione di una popolazione più ampia. La distinzione diventa invece essenziale nella Statistica Inferenziale.

In questo testo elementare, tralasciata la questione della rilevazione materiale dei dati, **verrà trattata solo la sintesi** dei dati, ovvero la rappresentazione dei dati in una forma umanamente comprensibile e *trattabile*, cosa particolarmente utile se i dati sono più di una dozzina.
Si vuole riassumere i dati con 1 diagramma oppure 1 o pochi valori, per
comprenderli
confrontarli ← cosa fondamentale per i farmaci
divulgarli
e, a livello eticamente discutibile, presentarli manipolativamente (cosa che viene fatta amplissimamente: un fenomeno in *diminuzione* si trova sempre come presentarlo, almeno a livello di titolo riassuntivo, come *aumento*, se si vuole, usando artifici statistici formalmente legittimi).

L'insieme dei dati $x_1, ..., x_n$ (che spesso sono numeri ma non sempre) si chiama *dataset* e non è un insieme in senso matematico perchè le ripetizioni dei valori sono ammesse e non vanno elise.

Si considerano dataset

numerici: 3, 1, 2, 4, 6, 1000, 6

nominali: Trieste, Trieste, Udine, Trieste, Monfalcone...

ordinali: *sono completamente d'accordo*, *sono d'accordo*...

Considereremo 2 capitoli della Statistica Descrittiva:
◇ le *rappresentazioni grafiche*: Lezioni 19 e 20;
◇ le *statistiche di sintesi*, funzioni $f(x_1, ..., x_n)$ con un numero n a priori indeterminato di argomenti. Inizieremo da queste.

Ecco alcune statistiche di sintesi per un dataset:
• il minimo: $\min(x_1, ..., x_n) \leftarrow$ per un dataset almeno ordinale;
• il massimo: $\max(x_1, ..., x_n) \leftarrow$ per un dataset almeno ordinale;
• la somma: $x_1 + ... + x_n \leftarrow$ per un dataset numerico.
Il significato delle soprastanti statistiche di sintesi è ovvio. Si calcolino quei 3 valori per questo dataset: $\frac{1}{\pi}$, $\frac{2}{7}$, 0.3, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, e, e^{-1}, $\frac{1}{3}$.

Per esempio (ipotetico, di farmacologia veterinaria) è immensamente più significativo dire che fra 100 000 ostriche sono state trovate perle con un minimo di 0 e un massimo di 4 in ogni esemplare per un totale di 41 320 perle, piuttosto che elencare il numero di perle 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1... di ciascuno degli esemplari. Abbiamo riassunto 100 000 numeri con 3, minimo massimo e somma, e capiamo perfino meglio la situazione che con pagine di numeri! E soprattutto possiamo meglio *confrontarla* con la situazione di un'altra vasca di ostriche, magari nutrite/trattate diversamente, che analogamente riassumeremo con quei 3 indici.

Più in dettaglio considereremo queste altre statistiche di sintesi:
• gli indici di posizione, che vorrebbero riassumere in 1 solo valore il complesso dei dati, e saranno l'argomento di questa Lezione 18;
• gli indici di dispersione ovvero variabilità, Lezione 21, che vorrebbero quantificare con 1 numero la non omogeneità di dati nu-

merici.
◦ Esiste anche 1 indice numerico, la *skewness*, che con una complicata formula misura quantitativamente l'asimmetria dei dati, che però noi tratteremo solo qualitativamente nella Lezione 22.

18.1 Medie aritmetica e geometrica

Media (aritmetica). Da ora consideriamo un dataset $\{x_1, ..., x_n\}$.

$$M(x_1, ..., x_n) := \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Facile e bello, ottimo per i voti, ma il reddito medio di questi

$$3, 1, 2, 4, 6, 1000, 6$$

è 146, non poi così espressivo della situazione globale, a causa dell'*outlier* 1000, valore anomalo ovvero aberrante.

Tratteremo in seguito la questione dei valori anomali ma anticipiamo che talvolta vengono semplicemente *eliminati*.

Media geometrica. Per n numeri positivi (invece la media aritmetica non lo richiede), è la radice n-esima del loro prodotto:

$$GM(x_1, ..., x_n) := (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} .$$

Nell'esempio numerico soprastante ≈ 7.05. (Alcuni Autori ritengono che la media geometrica sia meno sensibile agli outlier della media aritmetica, ma questo non può essere affermato con certezza matematica, dipende da ogni singolo dataset).
Riguardo alle applicazioni non lontane dalle Scienze Biomediche, leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Geometric mean":

starting from 2010 the United Nations Human Development Index did switch to this mode of calculation, on the grounds that it better reflected the non-substitutable nature of the statistics being compiled and compared:

> The geometric mean decreases the level of substitutability between dimensions [being compared] and at the same time ensures that a 1 percent decline in say life expectancy at birth has the same impact on the HDI as a 1 percent decline in education or income. Thus, as a basis for comparisons of achievements, this method is also more respectful of the intrinsic differences across the dimensions than a simple average.

In pratica, se un Paese porta l'aspettativa di vita da 40 a 60 anni, questo verrà ben rilevato facendo la media geometrica con il reddito pro-capite; se invece si facesse la media aritmetica, l'incremento di reddito da 4 000 a 4 040 dollari peserebbe di più: l'incremento è di 40 invece che 20, ma è solo l'1%, mentre da 40 a 60 è del 50%. La media geometrica appare migliore quando dobbiamo riassumere dati che variano su scale molto diverse. E anche in altri casi.

Media (aritmetica) ponderata (o pesata). Dati dei *pesi* $a_1, ..., a_n$, di somma 1, la media pesata del dataset $\{x_1, ..., x_n\}$ è $a_1x_1 + ... + a_nx_n$.
(Detto semplificatamente) pesi a_k maggiori di $\frac{1}{n}$ sono associati a dati che si vuol far "pesare" di più nella considerazione finale.

Per il lettore interessato: esistono varie altre "medie".

18.2 Mediana, moda, media interquartile↑

Mediana. Il numero centrale dei dati riordinati, adesso 4: $1, 2, 3, \underline{4}, 6, 6, 1000$. E se i dati sono in numero pari, si considera la media dei 2 centrali. La mediana è definita anche per valori *ordinali*.

Moda. Il valore più frequente. Nel nostro esempio è 6 ma in generale non è definita perchè i numeri sono tutti diversi o perchè 2 o più valori sono ripetuti ugualmente. Ecco per esempio un dataset *bimodale*: $6, 6, 6, 6, 7, 7.5, 7.5, 8, 8, 8, 8, 8.5, 8.5, 9, 9.5, 10, 10$.
La moda è definita anche per dati *nominali*, neppure ordinali, per esempio in ogni nazione c'è un cognome più frequente.

Media interquartile Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Central tendency:

> The method is best explained with an example. Consider the following dataset:
> 5, 8, 4, 38, 8, 6, 9, 7, 7, 3, 1, 6
> First sort the list from lowest-to-highest:
> 1, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 38
> There are 12 observations (datapoints) in the dataset, thus we have 4 quartiles of 3 numbers. Discard the lowest and the highest 3 values:
> ~~1 -,3 -,4 -,~~ 5, 6, 6, 7, 7, 8, ~~8 -,9 -,38~~
> We now have 6 of the 12 observations remaining; next, we calculate the arithmetic mean of these numbers:
> xIQM = (5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8) / 6 = 6.5
> This is the interquartile mean.
> For comparison, the arithmetic mean of the original dataset is
> (5 + 8 + 4 + 38 + 8 + 6 + 9 + 7 + 7 + 3 + 1 + 6) / 12 = 8.5
> due to the strong influence of the outlier, 38.

Con artifici si definisce per un numero di dati non quadruplo.

Detto grezzamente, consideriamo il reddito medio delle persone medie, al netto di mendicanti e ricconi, che quelli ci sono comunque dappertutto.

Nota. Se veramente siamo interessati a produrre
(1) un valore in qualche modo "medio" dei dati
(2) che prescinda dai casi/valori *eccezionali*
allora
- mediana e
- media interquartile

– sono decisamente valide
+ ma solo la mediana è *sempre* facilmente calcolabile
∗ invece la media aritmetica richiede di escludere gli outlier:
◇ se i dati sono pochi si può fare a mano ma lasciandoci dubbi
◇ se i dati sono moltissimi non si può proprio fare a mano però
> si può fare informaticamente con varie regole che definiscono gli outlier, ma in diversi modi a seconda degli Autori.

Nota. WolframAlpha calcola online
la media con `mean` seguito dalla lista di numeri: link->
la mediana con `median` seguito dalla lista di numeri: link->
la media geometrica con `geometricmean` seguito dalla lista di numeri: link->

Nota. Non ci si illuda: non esiste alcun tipo di statistica di sintesi che riassuma bene con 1 solo numero **ogni** dataset, neppure in assenza di outlier. Spesso la mediana rappresenta bene il soggetto "tipico", ma non sempre: in un cortile con 6 cani e 6 galline, la media e la media interquartile e la mediana del numero di zampe per animale è 3. Che non rappresenta alcun caso tipico. (E la media geometrica è ≈ 2.83, di male in peggio). Nemmeno l'unimodalità rappresenta una garanzia per la mediana, pur in generale così valida: con 1 grillo, 5 cani e 6 galline

$$6,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2 \quad (moda = 2)$$

la mediana è ancora 3.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 18

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ Considerato il seguente dataset

19.68 19.20 19.63 18.94 18.81 18.10 18.63 18.85 0.01 19.51 19.54

che possiamo supporre misurazioni di parametri corporei, si determini la mediana dopo avere eliminato un outlier.

SVOLGIMENTO
Chiaramente 0.01 è l'outlier preannunciato. (Potrebbe ragionevolmente provenire da un momentaneo malfunzionamento di una macchina che ha prodotto i dati).
I 10 dati rimanenti riordinati in modo crescente sono

18.10 18.63 18.81 18.85 18.94 19.20 19.51 19.54 19.63 19.68.

I 2 centrali ovvero mediani sono il 5° e il 6°, eliminando 4 da ogni parte:

18.94   19.20

la cui media aritmetica è il risultato cercato:

$$\boxed{19.07}$$

(Se non si eliminasse l'outlier – talvolta non è poi così evidente che qualche valore vada scartato – la mediana sarebbe alquanto simile, 18.94, mentre nei 2 casi le medie aritmetiche sono molto più diverse fra loro, rispettivamente 19.089 e 17.3536; la mediana ha il pregio di risentire poco degli outlier, il che in casi complessi con migliaia o milioni di dati, e magari nessuna certezza su quanti e quali sarebbero da considerare outlier, è molto significativo).

19 Bar chart, istogrammi, e altri diagrammi

Il *diagramma a torta* ha un ovvio significato: gli angoli o equivalentemente le aree sono proporzionali contemporaneamente ai valori assoluti o alle frazioni percentuali da rappresentare. (La proporzionalità agli uni è equivalente alla proporzionalità alle altre). Si veda in questo `link->` un diagramma a torta di interesse farmaceutico coi valori assoluti riportati (le percentuali no, sono lasciate all'occhio del lettore che vede le fette della torta; può essere un'utile esercizio calcolarne qualcuna).
(Più complessa è la situazione in cui oltre alle percentuali relative a 2 o più casi, il che necessita di 2 diagrammi a torta, si voglia rappresentare anche un altro dato per ciascuno dei casi, e allora si faranno diagrammi a torta di diverse dimensioni).
Gli angoli si misurano col goniometro; ma anche a occhio si può fare qualcosa. Il diffuso software Excel fa i diagrammi a torta.
Funzionano veramente bene solo se i valori da rappresentare sono molto pochi, e specialmente se sono molto diversi fra loro. Spesso si raggruppano in una classe denominata "altro" i valori più piccoli.
Si evitino come la peste gli ingannevoli diagrammi a torta tridimensionali in rappresentazione prospettica.

I diagrammi a colonne ovvero bar chart ovvero istogrammi a barre, e gli istogrammi – purtroppo con ambiguità nominalistiche nei vari testi – sono diagrammi per la visualizzazione di dati. Nei bar chart l'altezza di ogni colonna – o la lunghezza se disposta orizzontalmente – rappresenta un valore, negli istogrammi l'area rappresenta un valore.
• Considerato il dataset

$$2, 3, 1, 4, 1, 5, 3, 4, 7, 1, 2, 4, 5, 9, 4, 8$$

se ne rappresenti il bar chart. Poi si rappresenti l'istogramma con intervalli $[0, 2.5[$, $[2.5, 5[$, $[5, 7.5[$, $[7.5, 10[$, e poi con intervalli $[0, 2.5[$, $[2.5, 5[$, $[5, 10[$.

19.1 Eventuali asimmetrie nei dataset: skewness

Una distribuzione coi dati più "addensati" verso i valori bassi che quelli alti si dice *right skewed*, e si intuisce com'è una distribuzione *left skewed*. (Queste *non* sono definizioni rigorose[(40)] ma permettono di decidere nella generalità dei casi non particolarmente "capricciosi").
Si provi con un diagramma a colonne coi dati

12.2 20%,
12.4 30%
12.6 25%
12.8 12.5%
13.0 5%
13.2 7%
13.4 3.5%
13.6 2%

[40] Il lettore interessato cercherà sulla rete la *formula*, piuttosto complessa, che quantifica la skewness.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 19

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
[*disegno*] In relazione all'elemento sodio (Na), definite le cellule
ipo-sodiche: con contenuto di sodio fra 0 e $< 1\,000$ unità
normo-sodiche: con contenuto di sodio fra $1\,000$ e $< 10\,000$ unità
iper-sodiche: con contenuto di sodio fra $10\,000$ e $< 20\,000$ unità
(unità che non specifichiamo, essendo ininfluente) un macchinario esamina 52 000 cellule (tutti numeri arrotondati per semplicità) trovandovi
6 000 ipo-sodiche, 36 000 normo-sodiche, 10 000 iper-sodiche.
Rappresentare la situazione con un istogramma. (Non è il bar chart).

SVOLGIMENTO
Nell'istogramma – che purtroppo alcuni Autori scambiano col bar chart ma qua veniamo avvertiti della differenza – le grandezze sono proporzionali alle aree dei rettangoli (invece nei bar chart alle lunghezze delle aste, eventualmente strisce rettangolari).
Avremo quindi 3 rettangoli, con basi che si estendono su un asse orizzontale
da 0 a 1000 lunga 1 000
da 1 000 a 10 000 lunga 9 000
da 10 000 a 20 000 lunga 10 000.
(Non vi è alcuna questione problematica fra valori compresi o esclusi).
Le altezze le otteniamo dividendo le aree
6 000, 36 000, 10 000 (o numeri ad essi rispettivamente proporzionali)
per le lunghezze delle basi corrispondenti, ottenendo:
6 unità
4 unità
1 unità
Come unità si può prendere per esempio 1 centimetro, o su carta a quadretti 1 o 2 o 3 quadretti, o anche altre unità.
Ecco l'istogramma, coi 3 rettangoli ed una legenda:

```
A--------------------
A-------------------- A=ipo-sodiche, 6 000
ABBBBBBBBB----------- B=normo-sodiche, 36 000
ABBBBBBBBB----------- C=iper-sodiche, 10 000
ABBBBBBBBB-----------
ABBBBBBBBBCCCCCCCCCC
!!-------!----------!
0 1000   10000      20000
```


• Considerato il dataset $\sin\left(k\frac{\pi}{6}\right)$, $k = 0, ..., 10$, se ne rappresenti ll bar chart. Poi si rappresenti l'istogramma delle frequenze dei valori con intervalli $[0, 0.3[$, $[0.3, 0.6[$, $[0.6, 0.9[$, $[0.9, 1.2[$, e poi con intervalli $[0, 0.6[$, $[0.6, 0.9[$, $[0.9, 1.2[$.

- Si rappresenti il diagramma a torta per questa situazione:
  tifosi dei Gialli: 66
  tifosi dei Neri: 132
  tifosi dei Blu: 198.

20 Quartili e box-plot

20.1 Quartili e riassunto dei 5 numeri

Si abbia il dataset numerico $x_1, .., x_n$ e lo si riordini in modo crescente: $y_1, ..., y_n$. Il valore intermedio, o la media dei 2 intermedi se n è pari, sappiamo che è la mediana, che da adesso chiameremo anche *secondo quartile*, e lo indicheremo con $q_{0.5}$ oppure $q_{1/2}$ oppure $q_{50\%}$. Diviso così il dataset in 2 parti uguali, la mediana della prima parte si chiama *primo quartile*, e lo indicheremo con $q_{1/4}$ oppure $q_{0.25}$ oppure $q_{25\%}$, e la mediana della seconda parte si chiama *terzo quartile*, e lo indicheremo con $q_{3/4}$ oppure $q_{0.75}$ oppure $q_{75\%}$. Ma purtroppo non è l'unica definizione possibile[41]. Si hanno poi i quartili di indice 0, che è il minimo del dataset, e quello di indice 1 ovvero 100%, che è il massimo del dataset. I 5 numeri detti, $q_{0\%}$,...,$q_{100\%}$, sono una statistica di sintesi (vettoriale[42]) che si chiama *riassunto dei 5 numeri* (o *five number summary*).

Due esempi tratti da Wikipedia, l'enciclopedia libera, riscritti:

> per un dataset $x_1, ..., x_{10}$, riordinato in $y_1, ..., y_{10}$,
> i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, $\frac{y_5+y_6}{2}$, y_8, y_{10};
>
> per un dataset $x_1, ..., x_{11}$, riordinato in $y_1, ..., y_{11}$,
> i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, y_6, y_9, y_{11}.

20.2 Box-plot ovvero diagramma a scatola e baffi

Il *box-plot* ovvero *diagramma a scatola e baffi* è un diagramma molto usato in ambito Biomedico per rappresentare tutti i quartili di un dataset, ovvero il riassunto dei 5 numeri.

---

[41] Leggiamo in questo link accademico: "Molti software hanno diversi algoritmi per calcolare i quantili."

[42] *Vettoriale* perchè produce una cinquina di numeri e non un solo numero. È solo una questione definizionale.

Iniziamo vedendo sulla rete alcuni esempi di pertinenza delle Scienze Mediche e Farmaceutiche seguendo questo `link<--`, con immagini tratte da PubMed.

Precisiamo subito che di questa rappresentazione grafica
• esistono varianti, sulla lunghezza dei “baffi”[(43)], ma non solo[(44)]
• considereremo (quasi) solo la versione più semplice
• chi pubblica un box plot dovrebbe specificare[(45)] i dettagli su come intenderlo.

Leggiamo su Wikipedia, l’enciclopedia libera, alla voce “Diagramma a scatola e baffi”:

> il diagramma a scatola e baffi (o diagramma degli estremi e dei quartili o box and whiskers plot o box-plot) è una rappresentazione grafica [...] Viene rappresentato (orientato orizzontalmente o verticalmente) tramite un rettangolo diviso in due parti, da cui escono due segmenti. Il rettangolo (la “scatola”) è delimitato dal primo e dal terzo quartile, $q_{1/4}$ e $q_{3/4}$, e diviso al suo interno dalla mediana, $q_{1/2}$. I segmenti (i “baffi”) sono delimitati dal minimo e dal massimo dei valori. In questo modo vengono rappresentati graficamente i quattro intervalli ugualmente popolati delimitati dai quartili.

Esercizi$_\mu$ Si disegni il box-plot dei primi 10 numeri primi.
Talvolta gli outlier vengono rappresentati isolati. Si faccia così per il dataset 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,..., $\frac{1}{11}$, $\sqrt{7}$; e poi senza $\frac{1}{11}$.

Su Nature.com, un sito web di altissimo livello per le Scienze Biomediche (e Naturali), seguendo questo `link<--` troviamo una

[43] Si veda per esempio questo link.
[44] Per esempio in questo link vediamo una crocetta: possiamo ragionevolmente ipotizzare che rappresenti un decesso.
[45] Per esempio in questo link leggiamo “the whiskers show the smallest and highest value within 1.5 box lengths from the box”, che è una variante comune.

descrizione dei box plot, in cui leggiamo fra l'altro

> Whiskers are conventionally extended to the most extreme data point that is no more than 1.5 IQR from the edge of the box (Tukey style) or all the way to minimum and maximum of the data values (Spear style).

In questa trattazione abbiamo scelto il secondo dei due standard qua sopra detti, più semplice.
La IQR, che è $q_{0.75} - q_{0.25}$, la vedremo meglio in seguito.

Si vuole sperare che lo studente abbia apprezzato i riferimenti a Wikipedia, PubMed, Nature. (Si pensi che qualche decennio fa, internet non c'era...)

ESERCIZI SULLA LEZIONE 20

Esercizio$_\mu$ Si disegni il box-plot del dataset

$$x_k := \frac{1}{\pi - k} \qquad 1 \le k \le 11$$

rappresentando con un pallino l'outlier, escludendolo quindi dal calcolo del massimo. Similmente poi con $1 \le k \le 12$.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; b^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 0,\ b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base b positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo se $b > 1$, che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{f(x)} > \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; b^{f(x)} > b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 1$$

e tutte similmente con $<$, $\geq$, $\leq$.

21 Variabilità, covarianza e correlazione

21.1 Indici di dispersione ovvero variabilità

Gli indici dispersione ovvero variabilità cercano quantificare con 1 numero la non omogeneità di dati numerici.
Sono statistiche di sintesi $f(x_1, ..., x_n)$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, con n a priori indeterminato, proprio come le varie medie, viste in precedenza.
È ovvio che dataset diversi possono avere diversi gradi di "disomogeneità", che vogliamo quantificare, anche se hanno la stessa media e/o mediana. Per esempio i 2 dataset, qua già ordinati,

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \qquad 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

hanno uguale media, e perfino mediana, sempre 8, ma è chiaro che i valori del secondo dataset variano meno, ovvero sono più addensati intorno alla media. Si pensi a dei redditi per esempio.

Campo di variazione, o *range*.

$$range(x_1, ..., x_n) := \max(x_1, ..., x_n) - \min(x_1, ..., x_n)\ .$$

Che vale 12 e rispettivamente 6 nei 2 dataset considerati.
Il range è molto sensibile agli eventuali outlier.

Differenza interquartile. Ben poco sensibile agli outlier:

$$iqr(x_1, ..., x_n) := q_{3/4} - q_{1/4}\ .$$

Varianza, deviazione standard, coefficiente di variazione.
Detta $\bar{x}$ la media aritmetica del dataset $X : x_1, ..., x_n$

$$\text{\textit{population variance}} \qquad \sigma_X^2 = Var(x_1, ..., x_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

$$\text{\textit{population standard deviation}} \qquad \sigma_X = sd(x_1, ..., x_n) := \sqrt{Var(x_1, ..., x_n)}$$

$$cv(x_1, ..., x_n) := \frac{\sigma_X}{\bar{x}} \qquad \text{(non definito se } \bar{x} = 0).$$

Varianza e coefficiente di variazione sono sensibili agli outlier.
La varianza ha un'unità di misura diversa da quella del dataset.
Si trova scritto sia *sd* che SD, e sia *cv* che CV.

• Per i dataset visti in precedenza si calcolino i 5 indici sopradetti.

21.2 Covarianza; correlazione; retta di regressione

Dati 2 dataset numerici di uguale numerosità

$$X:\ x_1, ..., x_n \qquad Y:\ y_1, ..., y_n$$

si definisce la loro *covarianza* (ovvero *covarianza di 2 n-uple di numeri*, ovvero *covarianza osservata*)

$$Cov(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n) := \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + ... + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{n}$$

dove $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono le medie dei 2 dataset. Si trova denotata anche anche $\sigma_{X,Y}$, oppure con $cov(...$ minuscolo. Si definisce anche l'*indice di correlazione di [Bravais-]Pearson*, o *indice di correlazione lineare* (e al posto della parola *indice* altri scrive *coefficiente*)

$$\rho_{X,Y} := \frac{Cov(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n)}{\sqrt{Var(x_1, ..., x_n)Var(y_1, ..., y_n)}} \qquad = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

e questo dà un'idea di come varino le y_j relativamente alle x_i: un indice prossimo a 1 suggerisce che al crescere delle x_i crescano linearmente le y_i, un indice prossimo a -1 suggerisce che al crescere delle x_i decrescano linearmente le y_i, e un indice prossimo a 0 indica la non presenza di tali relazioni approssimate. In ogni caso

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1 \ .$$

Coi dataset X : 2, 7, 4, 3, e Y : 3, -1, 0, 2 si calcoli l'indice di correlazione, e si rappresentino sul piano cartesiano i punti

(x_i, y_i).
In un senso non banale, una retta $y = mx + q$ si avvicina meglio ai punti se ha coefficienti

$$m := \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2} \qquad q := \bar{y} - m\bar{x} \quad \text{equivalentemente: } m := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{X,Y}$$

e in questo caso si chiama *retta di regressione* (dietro, vi è il *metodo dei minimi quadrati*, che non approfondiamo).
Per esempio per i punti $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, -1)$, ovvero per i dataset $X\colon 2, 1, 3$ e $Y\colon 1, 3, -1$, si trova $y = -2x + 5$, che passa *esattamente* per i punti. è $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 1$, $\sigma_X^2 = \frac{2}{3}$, $\sigma_{X,Y} = -\frac{4}{3}$. E con $y_2 := 3.14159265$ si trova $y \approx -2.07x + 5.19$. Si facciano i disegni.

22 Note finali sulla Statistica Descrittiva

Ad un livello basico, nella Statistica Descrittiva **si vuole riassumere molti valori (*dataset*) con 1 valore o pochi valori, e/o con un grafico (in senso lato)**.
Quest'opera di sintesi non è banale.
Viene fatta per comprendere i dati, divulgarli, confrontarli. Alcuni lo fanno perfino per presentarli manipolativamente; allora noi dovremo attrezzarci conoscitivamente per non essere tratti in inganno.

22.1 Bugie, bugie cattive, e statistica

Da più di un secolo si dice "lies, damned lies, and statistics". Ai numeri si può far dire quel che si vuole o quasi.

Attenzione!

PARTE I – DATI VERI

22.2 La scelta dei parametri

In questa trattazione elementare siamo sempre partiti da dati numerici, ma a monte c'è il problema di quali numeri considerare in una data situazione.

Se consideriamo un quadrato di lato 2 ovvero area 4, e 2 quadrati di lato 5 ovvero area 25, e volessimo rappresentare un "quadrato medio", facendo la media dei lati abbiamo 4 (con area 16), invece facendo la media delle aree abbiamo 18 (con lato $3\sqrt{2} \approx 4.24$).

Qual è il senso di quelle tabelle che mettono ai primi posti il peperoncino per contenuto di vitamina C? Il peperoncino si mangia, eventualmente, a grammi, mica a etti come certa frutta, che, certo, contiene meno vitamina C *all'etto*, ma ne contiene di più *per porzione* (*ragionevole*, per quanto ciò possa significare). La scelta di un diverso parametro cambia completamente l'impostazione della questione.

Se leggiamo

La regione X prima per tumori

potremmo farci l'idea che la regione X sia più inquinata, o meno assistita medicalmente, magari peggio governata da quel noto partito che ha la maggioranza nella regione X – associazioni d'idee che magari sono il motivo reale per cui è stato pubblicato quell'articolo sui media – ma il contenuto informativo di quel titolo è seminullo, e quelle argomentazioni che ci sorgono istintivamente sono praticamente insensate. Potrebbe ben essere che nella regione X i tumori siano 10 volte meno probabili *per ogni singolo residente* che nella regione Y, ma la regione X ha più del decuplo di abitanti della regione Y, per cui *il numero assoluto di casi* della regione X sopravanza quello della regione Y, molto più inquinata e meno assistita medicalmente.
Nella situazione considerata, altrettanto legittimo sarebbe stato il titolo

La regione Y prima per tumori

e in un caso numerico estremo potrebbe essere vero addirittura

*Nella regione X la **minima** incidenza di tumori*

(Per una disamina del termine *incidenza*: `->Link`).
Anche qua la scelta di un diverso parametro cambia completamente l'impostazione della questione:

frequenza assoluta: non dice nulla su inquinamento, malasanità...

frequenza relativa: serio indizio, su varie possibilià.

Il numero assoluto, spesso espresso da cifre ad alto impatto emotivo ("milioni di tumori"), da un punto di vista medico e farmaceutico ci dice meno della frequenza relativa, che in generale si potrà misurare in casi per 1 000 residenti, o per 100 000, o per milione. (Per evitare scritture come 0.000077, scarsamente leggibili: molto più chiaro, come nell'esempio del link sopra riportato, 7.7 casi per 100 000).
Si noti che la frequenza relativa corrisponde alla probabilià, per

1 singolo residente preso a caso. Per esempio 50 casi ogni 1000 abitanti dà una probabilità di $\frac{1}{20}$. Si tratta della concezione frequentista della probabilità.
La frequenza assoluta ha una diversa importanza: corrisponde alla *dimensione economica* complessiva della questione: è ovvio che se in un certo luogo ci sono più casi di una malattia usualmente trattata con un certo farmaco, là c'è un maggior *mercato* per quel farmaco.

In ambito medico e farmaceutico: ragionando con la logica comune – sbagliata – trovare una riduzione nelle aritmie che causano morte è un buon risultato per un farmaco, e si verifica abbastanza facilmente; verificare la sopravvivenza a lungo termine è molto più oneroso (e in passato ha dato risultati opposti).
La sopravvivenza a 5 anni dalla diagnosi di cancro è un indice di altissimo valore ma richiede molto tempo e denaro; la riduzione della massa tumorale in un breve tempo si verifica prima.

22.3 Rispetto a quale standard fare le statistiche?

Una fonte di problematicità è quale standard scegliere. Se per esempio volessimo vedere se la carenza di una certa sostanza nel sangue è statisticamente correlata ad una malattia, avremmo – oltre al problema della diagnosi della malattia nei soggetti, problema medico che non considereremo – il problema di quali soggetti considerare carenti e quali no, in base alle analisi chimiche del sangue: infatti ci sono molti standard per i vari livelli delle sostanze nel sangue, e in generale per i parametri biomedici, come l'essere sovrappeso, e come la mortalità infantile e l'aspettativa di vita alla nascita, standard che variano nel tempo e nelle grandi entità scientifiche, sanitarie e/o geopolitiche ragionevolmente considerabili: Ministero della Salute italiano, Comunità Europea, OMS (Organizzazione Mondiale della Sanità), ONU, USA (NIH, CDC...), la rivista scientifica The Lancet e molte altre...

L'aspettativa di vita delle donne in Italia, e il ranking dell'Italia per essa, sarebbe([46])

86.49 – 3^ secondo l'ONU (luglio 2015), dati 2010-2015
85.6 secondo l'OECD (2016), che considera solo stati OECD
85.1 – 12^-13^ secondo The World Factbook (2017)
84.8 – 7^ secondo l'OMS (maggio 2016), dati 2015
83.90 – 7^ secondo (un articolo di) The Lancet (2012).

Abbastanza variabilità per fare affermazioni molto diverse, pure autorevoli, specialmente usando il dato del ranking, molto fuorviante: per esempio San Marino viene considerato solo nella lista del World Factbook.

Gli standard variano nel tempo, e a seconda delle agenzie che li fissano, pur autorevoli.

Esempio. Attualmente (giugno 2019) leggiamo su sito governativo statunitense a proposito dell'anilina, in `https://www.atsdr.cdc.gov/substances/toxsubstance.asp?toxid=79`

> Cancer Classification: EPA: Probable human carcinogen. IARC: Not classifiable as to carcinogenicity to humans. NTP: Not evaluated

(Si veda per esempio il `Link ->`).

22.4 Illusioni percettive nella presentazione dei dati

In questo paragrafo siamo sia lo standard del punto decimale che della virgola decime.

Un indice che ora vale 1200 e l'anno scorso 800 permette di titolare

"Quest'anno 50% più dell'anno scorso"

e anche

"L'anno scorso 33% meno di quest'anno".

[46] Si veda Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce List of countries by life expectancy.

In linea generale, i titoli faranno più conseguenze dei testi sottostanti.

Se il partito dei Vispi Volpini un anno riceve lo 0,6% e l'anno dopo lo 0,9% (è un partito piccolo...) la televisione dirà che è cresciuto dello 0,3%, ma il Corriere dei Vispi Volpini dirà che il loro elettorato è aumentato del 50%, il che è vero. (Anche la televisione magari lo dirà, chissà chi è il direttore...)

N.d.A. Ricordo, decenni fa, un esempio di presentazione fuorviante dei risultati elettorali del tipo "il partito A scende dal XY,W% al xy,w%, il partito B prende il rs,t% contro il RS,T% della volta precedente" dove nel profluvio di cifre e decimali l'ascoltatore medio ricorda solo che A *scende* e B *prende*, ma in effetti B scendeva più di A...

Fare raffronti con dati collaterali può permettere di titolare "aumento" un articolo che poi parla di un fenomeno in diminuzione, ma moltissimi si limiteranno a leggere il titolo.

In ambito medico, affermare che con diagnosi precoci si allunga la speranza di vita dalla diagnosi può essere molto fuorviante: "Una volta il paziente viveva mediamente due anni dalla diagnosi, adesso dodici anni"... ma facendo la diagnosi mediamente quanti anni prima?

Attenzione alle fallacie della memoria: vi pare di ricordare che secondo l'Organizzazione Mondiale della Sanità ogni anno 12.6 milioni di persone muoiono a causa dell'inquinamento, e adesso leggete che ogni anno 4.2 milioni di persone lasciano questo mondo a causa dell'inquinamento dell'aria? Basta rileggere con attenzione.

Attenzione soprattutto alle rappresentazioni grafiche.

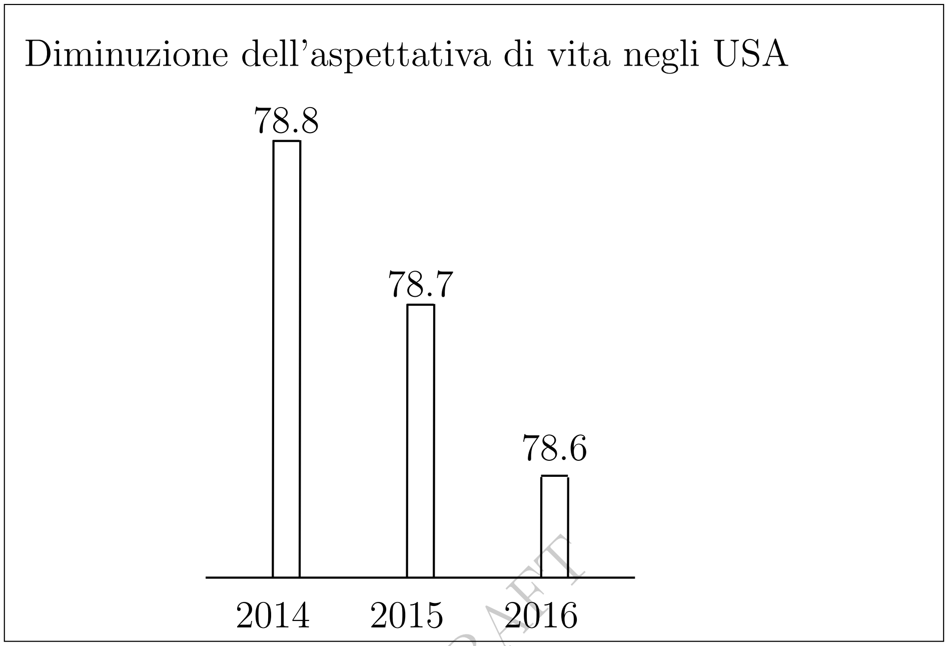
Iniziare un diagramma a colonne o un grafico da un certo tempo invece che da un tempo precedente può permettere di fare affermazioni completamente diverse, magari entrambe formalmente vere, ma che genereranno emozioni e poi reazioni completamente diverse.
Grafici che sull'asse delle ordinate non iniziano da 0 possono dare l'impressione di variazioni enormi, anche raddoppi o dimezzamenti, a variazioni minuscole.
Diagrammi a torte tridimensionali in rappresentazione prospettica possono far apparire più grandi certi dati rispetto agli altri.

22.5 Di cosa parliamo?

Diamo solo un cenno di un argomento ciclopico. Ogni persona vive immersa in un flusso di informazioni che gli arrivano, in base al quale costruisce la sua percezione della realtà, che lui crede vera.
Anche se tutte quelle informazioni fossero vere (per ipotesi assurda, ovvio) l'immagine complessiva che l'individuo si forma è in generale (molto!) distorta: una *diversa scelta* di informazioni *altrettanto vere*, da far arrivare coi media – dal livello più basso fino agli articoli scientifici – creerebbe in quella stessa persona un'immagine del mondo completamente diversa, per molti versi quasi opposta.

22.6 Illustrazione di un triplice esempio reale

Aumento dell'aspettativa di vita negli USA: `link<--`



Aumento del tasso di mortalità negli USA:

2009	7.9
2010	8.0
2011	8.1
2012	8.1
2013	8.2
2014	8.2
2015	8.4
2016	8.5
2017	8.6

Capire questi diagrammi richiede:

1) conoscere la Statistica Descrittiva, notando in particolare che
   il diagramma considera solo gli ultimi 3 anni;
   il diagramma ha una linea base posta a circa 78.5 anni.

1 bis) conoscere la Demografia, che possiamo considerare semplificatamente una branca specialistica della Statistica Descrittiva. Questo ci farebbe capire che non è per nulla strano che si alzino da tempo i tassi di mortalità, anche prima della riduzione dell'aspettativa di vita. Il tasso di mortalità può ben alzarsi mentre l'aspettativa di vita si alza, proprio perchè la popolazione mediamente invecchia, in compresenza di un fattore demografico completamente diverso: la scarsità di nuovi nati.

2) Conoscere la situazione reale il che è completamente diverso dal guardare questi numeri o grafici.
Per una parziale spiegazione della situazione reale dietro alla diminuzione dell'aspettativa di vita negli USA si segua questo `link<--`.

22.7 Conclusioni

Pensare di aver capito una situazione perchè si è vista una qualche statistica o lista di numeri è in generale *ingenuo*, e i grafici sono, per le persone non istruite, perfino più fuorvianti. Le parole, poi, possono essere ancora più ingannevoli anche se sembrano esprimere dati oggettivi, numerici, statistiche: aumento, diminuzione...

È necessario acquisire una buona competenza statistica per non essere tratti in inganno. Sia da errori fatti in buona fede, che da manipolazioni volontarie, fatte da soggetti interessati.

Superato il problema della comprensione formale di statistiche e grafici, il problema
delle statistiche
e dei grafici,
e perfino dei dati grezzi/completi,
è che ce ne possono sempre essere altri, che non stiamo vedendo ovvero non ci stanno mostrando, che cambierebbero completamente la nostra prospettiva sui fenomeni considerati.

In linea generale, le statistiche economiche dei media non valgono la carta su cui sono scritte. Per le statistiche scientifiche, non è vietato sperare una maggiore oggettività.

Ulteriori problematiche si presentano nella Statistica Inferenziale.

If you torture the data long enough, it will confess to anything. (In questo link<-- è in articolo su sito governativo statunitense).

PARTE II – DATI QUASI VERI (QUASI FALSI)

22.8 Il valore anomalo: outlier

Per un'infinità di motivi, in un dataset ci può essere qualche valore che il ricercatore ritiene *assurdo*, e tenderà ad eliminarlo prima di procedere con qualunque analisi dei dati stessi, per non comprometterla.

Questi *outlier*, valori anomali ovvero aberranti, provengono da risposte scherzose a questionari, truffe ("reddito zero"...), malfunzionamento di apparati, confusione fra punto decimale e virgola decimale, confusione fra milligrammi e microgrammi, eccetera. Ma talvolta sono dati *veri* benchè *eccezionali*.

La decisione di quali valori siano da considerare outlier ed eventualmente da eliminare, può essere

soggettiva

oppure dettata da formule, che comunque non considereremo,

e in ogni caso è molto problematica.
In una ricerca seria *et* onesta, si *dovrebbe* avvertire se sono stati eliminati outlier.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Outlier", e non è chi non veda le pericolose conseguenze di ciò:

> There is no rigid mathematical definition of what constitutes an outlier; determining whether or not an observation is an outlier is ultimately a subjective exercise. There are various methods of outlier detection. (...) Deletion of outlier data is a controversial practice

22.9 Omissione di dati ritenuti poco significativi

Dati ritenuti poco significativi vengono talvolta omessi, per esempio San Marino da molte statistiche; facendoli rientrare si possono ottenere affermazioni molto diverse, ma per certi versi effettivamente meno significative.

22.10 Migliorare le statistiche invece che la realtà

"Fatta la legge, trovato l'inganno." Fissato uno standard per valutare statisticamente un qualche aspetto della realtà, qualcuno trova conveniente, diciamo così, fare azioni che migliorano di molto la valutazione statistica con scarso o nullo miglioramento della realtà. Se per esempio una legge attribuisce ai *"comuni montani"* particolari finanziamenti, fissando ad una certa altitudine del municipio la denominazione di "comune montano", state sicuri che qualche comune sposterà la sede del municipio, più a monte... *et voilà*, il comune – esattamente lo stesso di prima – diventa "montano" (e ottiene i finanziamenti).
In ambito scientifico e biomedico in particolare, a rischio, diciamo così, sono le statistiche che valutano la *credibilità percepita* ("impact factor") delle riviste scientifiche; si veda per esempio *A user's guide to inflated and manipulated impact factors*, di John P. A. Ioannidis e Brett D. Thombs, European Journal of Clinical Ivestigation (17 giugno 2019) Link->

22.11 Il problema della discrezionalità

Nella rilevazione dei dati può essere presente un ampio margine di discrezionalità: classificare al microscopio cellule in "regolari/irregolari", "simmetriche/asimmetriche"... Per trovare risultati eclatanti (e pubblicarli o farli fruttare economicamente) piuttosto che insignificanti magari si fa un po' influenzare nella classificazione delle cellule.
E si consideri la problematica dei referti di causa di morte, che

un famoso medico[47] scrisse che non valgono la carta su cui sono scritti: le persone in generale giungono alla morte con diverse patologie concomitanti. E alcune muoiono pure dissanguate in incidenti automobilistici, in realtà causati dalle loro patologie (non è il dissanguamento la "vera" causa, a monte). (Si pensi per esempio all'incidente automobilistico da crisi ipoglicemica).

PARTE III – DATI FALSI

22.12 La falsificazione dei dati

Finora abbiamo considerato solo dati *veri*, magari presentati con omissioni o in modo fuorviante ma comunque veri: nella realtà pratica, esiste anche la falsificazione dei dati.
Per esempio in `Link 1 ->` leggiamo[48]

> Giugno 2019 [...] Scienziati impegnati nella ricerca sul cancro hanno manipolato le immagini dei loro studi, riuscendo così a ottenere successo, carriera, nuovi fondi per le loro ricerche. La Procura di Milano ha appena concluso un'indagine lunga e complessa, che fornisce un quadro devastante

e in `Link 2 ->` troviamo molto dettagli[49]).

[47] Henry G. Bieler (1893-1975).
[48] https://www.ilfattoquotidiano.it/in-edicola/articoli/2019/06/30/ricerca-sul-cancro-risultati-ritoccati-per-ottenere-milioni/5291204/
[49] https://codacons.it/ricerca-sul-cancro-risultati-ritoccati-per-ottenere-milioni/

Esercizio$_\mu$ Si afferma che un intervento del 1845 ha causato una rapida diminuzione del parametro X, e si presenta questo diagramma a colonne:

```
1845 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1846 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1847 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1848 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1849 XXXXXXXXXXXXXXXXX
1850 XXXXXXXXXXXXXX
```

È plausibile quell'affermazione? Ecco un dataset più completo:

1842 7.68
1843 6.14
1844 4.92
1845 3.93
1846 3.19
1847 2.58
1848 2.09
1849 1.69
1850 1.37

(Risposta: no, non è plausibile. Infatti fino al 1845 il parametro diminuiva circa del 20% annuo e poi circa del 19%).

Postille alle precedenti lezioni

Eventuali asimmetrie nei dataset: skewness
Una distribuzione coi dati più "addensati" verso i valori bassi che quelli alti si dice *right skewed*, e si intuisce com'è una distribuzione *left skewed*. (Queste *non* sono definizioni rigorose[50] ma permettono di decidere nella generalità dei casi non particolarmente "capricciosi").
Si provi con un diagramma a colonne coi dati

12.2 20%,
12.4 30%
12.6 25%
12.8 12.5%
13.0 5%
13.2 7%
13.4 3.5%
13.6 2%

[50] Il lettore interessato cercherà sulla rete la *formula*, piuttosto complessa, che quantifica la skewness.

Sezione A2 – Calcolo Infinitesimale

Il Calcolo Infinitesimale comprende essenzialmente:
◇ La teoria dei limiti (delle successioni e delle funzioni)
◇ La teoria delle derivate, o Calcolo Differenziale
◇ La teoria delle serie (numeriche, e di funzioni)
◇ La teoria dell'integrale.

V – Limiti e derivate

23 Limiti di successioni

In questa Lezione consideriamo successioni, cioè funzioni definite su $\mathbb{N}$, o sue semirette come $n \geq 1$ oppure $n \geq 2$. Piuttosto che indicarle con $f(n)$ oppure $g(k)$ oppure $s(m)$, che comunque si potrebbe, le indicheremo con x_n, a_m, b_k o simili scritture.
Per esempio, con l'indice n: $x_n := n!$, $a_n := n^2$, $b_n := \frac{1}{n}$.
Ci interessa il "comportamento limite" per n che tende all'infinito:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{(Altri scrive }_{n\to\infty}\text{ invece di }_{n\to+\infty}\text{).}$$

Nella Lezione successiva considereremo non solo funzioni a_n ovvero $f(n)$ con n che varia in $\mathbb{N}$, cioè le successioni, ma funzioni $f(x)$ definite in $\mathbb{R}$ o suoi sottointervalli, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, e allora sarà possibile considerare x che tende a $-\infty$ oppure a un numero.

Torniamo allora alle sole successioni, e n tenderà sempre a $+\infty$.

Semplificando al massimo, le successioni sono di 4 tipi:
0. Successioni come $\lg n$ oppure $\frac{1}{n}$ la cui definizione si potrebbe subito estendere a $\mathbb{R}$ o suoi sottointervalli, semplicemente scrivendo x oppure t in luogo di m, n, k... Scrivendo $f(n)$ in luogo di a_n, e indicando con u il limite finito o infinito, si ha(51) (teorema)

$$\text{se } \lim_{x\to+\infty} f(x) = u \text{ allora } \lim_{n\to+\infty} f(n) = u$$

(per esempio $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$) e allora lo studio del Caso 0 ricade nell'argomento della prossima Lezione e in questa non ne parliamo più.
I. le successioni definite per ricorrenza, come quella di Fibonacci;
II. Successioni definite "ellitticamente" ovvero "coi puntini", come

[51] Per il lettore interessato: vale anche

$$\text{se } \nexists \lim_{n\to+\infty} f(n) \text{ allora } \nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$\text{e se } \exists \lim_{n\to+\infty} f(n) \text{ allora può esistere o non esistere } \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

$n!$ per $n > 0$;
III. $(-1)^n$ e successioni che contengono $(-1)^n$, per esempio $(-1)^n n$;

Esempio 1 del tipo I: il Modello Malthusiano. La popolazione – di microbi o quant'altro – si espande nel tempo scandito da n, proporzionalmente alla sua numerosità (detto semplificatamente: a molti microbi seguono quegli stessi microbi più molti figli di microbi, proporzionalmente al tasso di accrescimento):

$$a_{n+1} := a_n + c \cdot a_n \qquad a_0 := \text{popolazione iniziale}$$

con c il *tasso di accrescimento*. Ecco per esempio il caso $c := 2$:

$$a_0,\ 3\,a_0,\ 9\,a_0,\ 27\,a_0...$$

per esempio con $a_0 := 1000$

$$1\,000, 3\,000, 9\,000, 27\,000...$$

Si può dimostrare che la successione a_n ammette una rappresentazione *in forma chiusa*

$$a_n = (c+1)^n\, a_0$$

e se $c > 0$ si ha un vero e proprio accrescimento verso $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{se } c > 0$$

e il senso del limite $+\infty$ è (usando p. es. una successione x_n) è

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, M)\ (\exists\, \bar{n})\ n > \bar{n} \Rightarrow x_n > M.$$

Invece se $-1 < c < 0$ il comportamento è molto diverso, per esempio con $c := -\frac{1}{2}$ abbiamo i valori

$$a_0,\ \frac{1}{2}a_0,\ \frac{1}{4}a_0,\ \frac{1}{8}a_0...$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che a_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\ .$$

Più in generale si dà il caso, con altra successione x_n, e $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L \qquad \text{(o invece di n, qualunque variabile, p. es. } k\text{)}.$$

Il significato è di un indefinito avvicinamento, con o senza raggiungimento del limite L. Più precisamente

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \bar{n})\, n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon\ .$$

Cioè, fissato un numer(ett)o positivo, chiamiamolo ε, da un certo punto in poi x_n dista dal limite meno di ε.
Si provi con stessa successione del Modello Malthusiano a scrivere i primi 7 valori numerici con $a_0 := 100\,000$, prima con $c := -0.3$ e poi con $c := 0.3$.
E ovviamente con $c := 0$ abbiamo un equilibrio fra nati e morti ovvero tasso di accrescimento nullo e in quel caso la popolazione resta costante:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 \qquad \text{se } c = 0.$$

Esempio 2 del tipo I. Consideriamo ora la successione a_n di Fibonacci, a suo tempo definita per ricorrenza:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 31, 34, 55, 89, 144...$$

Ci sembra, ed è vero e si potrebbe dimostrare, che i valori supereranno qualunque soglia, crescendo indefinitamente. Scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello prima detto.

Nota sull'accrescimento di Malthus o di Fibonacci. Una popolazione microbica o altra, che si espandesse con quelle leggi, tenderebbe ad un'espansione infinita; nella realtà ad un certo punto interverranno meccanismi che di fatto sospenderanno la validità della legge di Malthus o di Fibonacci nel rappresentare la numerostà della popolazione. Questo avviene, se non altro,

perchè gli organismi da un certo punto in poi inevitabilmente si ostacolano a vicenda in modo significativo.
Piuttosto che tendere all'infinito esponenzialmente, ad un certo punto l'accrescimento in generale rallenterà producendo un tratto di sigmoide. Ed eventualmente poi decrescerà fino ad estinguersi o quasi, producendo un grafico a campana: si veda la figura a questo `link->`.

Esempio del tipo II. Il fattoriale

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

assume i valori

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040...$$

Si ha

$$\forall\, n > 0 \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \geq n$$

e già n tende a $+\infty$, e allora anche $n!$ che come appena visto gli sta sopra:

$$\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello sopra esposto, valido per qualunque successione.
(Il fattoriale ricorre ampiamente nel Calcolo delle Probabilità).

Esempio 1 del tipo III. La successione $(-1)^n$ ha i valori

$$+1, -1, +1, -1, +1...$$

e non esiste il limite:

$$\nexists \lim_{n \to +\infty} (-1)^n.$$

Questa successione consente nella programmazione informatica – per esempio con l'onnipresente in campo commerciale e scientifico Excel – di distinguere i numeri pari dai numeri dispari. (Esistono anche altri modi). In particolare $3/2+(-1)^n/2$ produce, a partire da $n := 1$, i valori

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1...$$

che può consentire per esempio di produrre i turni in farmacia di Aldo e Bianca nei vari giorni dell'anno, alternandoli secondo il numero ordinale del giorno (per esempio al 1 febbraio corrisponde il numero 32, pari: lavora Bianca). Oppure per programmare con un software l'apertura automatizzata di sportellini 1 e 2, a giorni alterni, in un allevamento di animaletti.

> **Esempio.** Si consideri il display ai LED programmabile della farmacia *Al Cuore Vispo* che dispone della funzione
>
> `ordinalNumberOfDay`
>
> e vuole esporre a giorni alterni i messaggi
>
> `STRING(1):=Buongiorno, allegro ti sia il giorno!`
>
> `STRING(2):=I nostri clienti campano cent'anni!`
>
> Ciò si potrà ottenere programmando qualcosa come

```
display(STRING(3/2+((-1)^ordinalNumberOfDay)/2))
```


Esempio 2 del tipo III. La successione $\frac{(-1)^n}{10^n}$ ha i valori, per $n \geq 1$, cioè

$$-0.1, +0.01, -0.001, +0.0001...$$

e si capisce bene che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Similmente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

e similmente il limite è 0 se il numeratore è *limitato* (cioè si mantiene fra 2 numeri), e il denominatore $\to +\infty$.

Esempio 3 del tipo III. La successione $(-1) \cdot n$ ha i valori

$$+1, -1, +2, -3, +4, -5, +6, -7, +8, -9, +10...$$

e alcuni Autori dicono che va a ∞, l'infinito senza segno, ma in questa trattazione elementare diremo invece

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1) \cdot n$$

e similmente diremo per successioni che oscillano senza "assestarsi".

24 Limiti e continuità

Ci occupiamo del comportamento di una funzione $f(x)$

$$f : I \to \mathbb{R}$$

(I intervallo o unione – finita o non troppo “capricciosa” se infinita – di intervalli) quando

$$x \to +\infty \;\text{ oppure }\; x \to -\infty \;\text{ oppure }\; x \to x_0 \in \mathbb{R}.$$

Dai grafici apprendiamo che

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e similmente	$x^1, x^3 \ldots x^\alpha$ *con* $\alpha > 0$: $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$
$\lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty, \qquad b > 1$	(e 0 se $0 < b < 1$)
$\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0$	$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0, \qquad b > 1$	(e $+\infty$ se $0 < b < 1$)
$\lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to0} \lg x = -\infty$	$\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} x^{dispari} = -\infty \;\; dispari > 0$	$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[dispari]{x} = -\infty$
$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$	similmente $-\infty$, *e* cos *e* tan

Esempio 1.

$$\lim_{x\to+\infty}(7\,x^2 - x + 1) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\Big(7 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\Big) =$$

che per "grandi" x è il prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 7

$$= +\infty.$$

Esempio 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{n}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) =$$

prodotto di 2 numeri "grandi"

$$= +\infty$$

ovvero $= x\,(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})$, prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 1: in ogni caso il limite è $+\infty$.

Tutto ciò costituisce il *calcolo dei limiti*, che comunque può raggiungere più alti livelli di sottigliezza:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 6 - \mathrm{e}\sqrt{x}}{3x^3 - \frac{1}{x} - 2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^4} - \frac{\mathrm{e}}{x^3\sqrt{x}}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^5} - 2} = -\frac{3}{2}\,.$$

Si dimostrano

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{10^x}{x} = +\infty$$

e in effetti $\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty \quad b > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\lg x}{x} = 0$$

e in effetti $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x} = 0 \quad 0 < b \neq 1.$

Solo che adesso x può andare anche a $-\infty$, per esempio

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-5x^3+6-\mathrm{e}\sqrt{x}}{3x^3-\frac{1}{x}-2x^4}=...=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0 \quad \text{(si tratta di 2 limiti)}$$

o un numero $x_0\in\mathbb{R}$, anche distinguendo x_0^+ e x_0^-, e ci sono 2 casi:
$\diamond$ $x_0\notin \mathrm{dom}f$, p. es. $\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}=-1$, $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$
$\diamond$ $x_0\in\mathrm{dom}f$ e ci sono 2 sottocasi:

- $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$: la f **si dice continua** in x_0 e si noti che le funzioni elementari sono continue nei domini, e allora per esse sempre limite=valore calcolato, p. es. $\lim_{x\to0}\mathrm{e}^x=1$;
- $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$: la f si dice discontinua in x_0 e questo può essere con funzioni non elementari come $\mathrm{sgn}(x)$ e $\lfloor x\rfloor$.

Allora per le funzioni elementari sono significativi solo i limiti dove la funzione "smette di esistere": gli estremi, finiti o no, degli intervalli che compongono il dominio, non appartenenti ad esso:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}= \text{ [forma 0 su 0] } \lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} \text{ [funzione elementare, limite=valore] } =\frac{1}{2}\,.$$

Si dice *limitata* una f tale che esistono 2 numeri M e N tali che $M<f(x)<N$, per esempio $\sin x$. Limitata $\not\Rightarrow$ $\exists$ limite.

Si dice *infinita* una funzione che tende a $+\infty$ o $-\infty$ e *infinitesima* una che tende a 0 (per $x\to u_0$ finito o no). Per esempio sono infinite per $x\to+\infty$ le b^x con $b>1$, e infinitesime per $0<b<1$; viceversa per $x\to-\infty$. Infinite le $\log_b x$ per $x\to0^+$ e $x\to+\infty$.

Esempio: logistica. Consideriamo il caso ultra-semplificato:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}=$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^t}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Una forma più generale dà, con costanti positive K, q, r,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1+q\,\mathrm{e}^{-r\,t}} = K$$

(Si veda Wikipedia alla voce *Equazione logistica*).

24.1 Teoremi sui limiti

Qua formalizziamo le "regole" di calcolo dei limiti che in parte abbiamo già usato a livello intuitivo.

Con le definizioni dei limiti (con ε, δ...) si dimostra che:

- Primo **limite fondamentale**: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.
- limite somma=somma limiti se finiti: $\lim_{x\to\pi}(\mathrm{sign}(x)+\lfloor x\rfloor)=4$
- limite prodotto=prodotto limiti se finiti: $\lim_{x\to-\pi}\mathrm{sign}(x)\lfloor x\rfloor=4$
- limitata fratto infinita, $\to 0$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\log_{\frac{1}{2}} x} = 0$
- limitata + infinita>0, $\to+\infty$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}(\cos x+\sqrt{x}) = +\infty$
- reciproca di tendente a $L \neq 0$ tende a $\frac{1}{L}$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x} = \frac{2}{\pi}$
- reciproca d'infinita $\to 0$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log_{10} x} = 0$
- reciproca d'infinitesima >0, $\to+\infty$, p.es. $\lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin x} = +\infty$
- reciproca d'infinitesima <0, $\to-\infty$, p.es. $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\ln x} = -\infty$
- per quanto gli infiniti non siano numeri e le espressioni seguenti siano scorrette matematicamente, valgono come mnemonici:
  $+\infty+\infty=+\infty$ e analogamente $-\infty+(-\infty)=-\infty$
  $+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$ e analoghe 3 coi $-$ e il prodotto dei segni.
  $\diamond$ Nelle prossime 3 indichiamo con L un limite finito:
  $+\infty+L=+\infty$ p.es. $\lim_{x\to+\infty}(x^3+\arctan x)=+\infty$
  $-\infty+L=-\infty$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}(\log_{4-\pi} x+(4-\pi)^x)=-\infty$
  $+\infty\cdot L=+\infty$ se $L>0$ e analoghe 3 per $L<0$, e $-\infty$.

Restano fuori queste **forme di indecisione**, da risolvere caso per caso: $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞. Per esempio

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x) = \\
&[= +\infty - \infty] \\
&= \lim_{x\to+\infty} x \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = \\
&= [+\infty \cdot (+\infty) =] \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Tutte le funzioni considerate in questa lezione sono definite in singoletti o intervalli o unione (finita o non troppo "capricciosa" se infinita) di singoletti e/o intervalli.
I singoletti non hanno rilevanza per quanto riguarda i limiti.
Sono significativi solo gli intervalli del dominio delle funzioni.
P. es. $\frac{1}{x}$ è definita nell'unione dei 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$; considereremo i limiti a quegli estremi: $-\infty$, 0^-, 0^+, $+\infty$.

Similmente con $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Questa sopra è una funzione che ricorre ampiamente in Fisica, per esempio l'attrazione fra 2 cariche di segno opposto è (in modulo, non vettorialmente), prima "in generale" e poi come funzione della sola distanza r,

$$F = C\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \qquad F(r) = C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

essendo q_1 e q_2 i valori, senza segno, delle 2 cariche.
(E dal punto di vista fisico è significativa solo per $r > 0$).

Esercizi. Per $x\sqrt[3]{x}$, $\log_2|2^x-1|$, $\ln|x|$, $\sin 2^x$, $\cos\pi x$,

$\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$, $\dfrac{4+3x-x^2}{x^2-2x-8}$ questi 8 limiti: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$, $\lim\limits_{x\to-2^\pm}$, $\lim\limits_{x\to 0^\pm}$, $\lim\limits_{x\to 4^\pm}$.

Gli stessi 8 limiti per queste 3 funzioni: $\dfrac{2^x-2^{-x}}{3^x\pm 3^{-x}}$, $\quad \lg\left|1-\dfrac{2}{x}\right|$.

25 Derivata; teoremi algebrici sulle derivate

25.1 Derivata in un punto e funzione derivata

In questa trattazione elementare considereremo solo le derivate delle funzioni reali di variabile reale.

Essenzialmente, la derivata $f'(x)$ di una funzione f in un punto x, è un <u>numero</u> che se esiste rappresenta la pendenza del grafico in $(x, f(x))$; e se non esiste vuol dire che in quel punto il grafico non ammette retta tangente, per qualche sorta di sua non liscezza. La derivata positiva ($f'(x) > 0$) corrisponde – con precisazioni che faremo – alla crescenza di f nel punto x e quella negativa alla decrescenza. Al variare di x nel dominio di f si ottiene una <u>funzione</u> $f'(x)$ che si chiama [funzione] derivata.

Tutto questo richiede molte precisazioni.

La derivata [come numero] è definita da

$$f'(x) := \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \ \textit{ovvero} \ := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

per ogni x per cui i limiti (equivalenti) esistono, anche se infiniti.

La *funzione* derivata ha la stessa definizione ma solo per ogni x per cui i limiti esistono *finiti*.

L'argomento del secondo limite qua sopra si chiama *rapporto incrementale* di f in x.

(La maggioranza dei testi, trattando più separatamente le derivate come numero e come funzione, per il primo caso scrive $f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ovvero $:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, derivata in x_0).

Si dimostra (teorema) che se in $(x, f(x))$ esiste la tangente al grafico essa forma con l'asse x un angolo orientato α tale che $\tan\alpha = f'(x)$.
Da ciò segue, lasciando per adesso all'intuizione il significato di funzione crescente o decrescente in un punto, che
$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0
$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ decrescente in x_0 .

La derivata di $f'(x)$ è la *derivata seconda* $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$ eccetera.

Esempi. Si trova facilmente che la derivata di x^2 è $2x$. Dal che, la pendenza del grafico (parabola) in 0 è 0 (tangente orizzontale) e la funzione per $x < 0$ decresce e per $x > 0$ cresce. Si trova facilmente che la derivata di $|x|$ è $\frac{x}{|x|}$ corrispondentemente all'inesistenza della tangente al grafico in 0 (ovvero, in $(0, 0)$).

25.2 Derivate delle funzioni elementari reali

Tutte queste formule valgono nell'intersezione dei domini della funzione derivanda e della funzione derivata. Per esempio $D\ \ln x = \frac{1}{x}$ vale per $x > 0$ sebbene $\frac{1}{x}$ esista anche per $x < 0$, e $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ vale per $x > 0$ sebbene la derivanda $\sqrt{x}$ esista anche per $x = 0$.

$$
\begin{array}{llcll}
\forall c & D\,c & = & 0 & \\
 & D\,x & = & 1 & \\
 & D\,x^n & = & n\,x^{n-1},\ n \text{ intero}, & \text{in particolare:} \\
 & & & & Dx^2 = 2x \\
 & & & & D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \\
 & D\,x^\alpha & = & \alpha\,x^{\alpha-1} \text{ con } x > 0 & \text{e } \alpha \text{ reale non intero,} \\
 & & & \quad \text{in particolare} & D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 & D\sin x & = & \cos x & \\
 & D\cos x & = & -\sin x & \\
 & D\tan x & = & \frac{1}{\cos^2 x} & = 1 + \tan^2 x \\
 & D\,\mathrm{arctan}\,x & = & \frac{1}{1+x^2} & \\
 & D\,\mathrm{e}^x & = & \mathrm{e}^x & \\
 & D\,10^x & = & \frac{10^x}{\lg \mathrm{e}} & \\
 & D\ \ln x & = & \frac{1}{x} & \text{e vale anche } D\ln|x| = \frac{1}{x} \\
 & D\ \lg x & = & \frac{\lg \mathrm{e}}{x} & \text{e vale anche } D\lg|x| = \frac{\lg \mathrm{e}}{x} \\
(\text{e} & D\,\Phi(x) & = & \phi(x) & \text{ma } \Phi(x) \text{ non è elementare).}
\end{array}
$$

([52])

---

[52] Per lo studente interessato, ad un livello superiore si considerano anche:

$$
\begin{array}{llcll}
\forall a > 0 & D\,a^x & = & a^x \ln a & \\
\forall\, 0 < b \neq 1 & D\,\log_b x & = & \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln b} & \\
 & D\,\mathrm{cotan}\,x & = & -\frac{1}{\sin^2 x} & = -1 - \mathrm{cotan}^2 x [= -\mathrm{cosec}^2\, x] \\
 & D\ \mathrm{arcsin}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\ \mathrm{arccos}\,x & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\ \sinh x & = & \cosh x & \\
 & D\ \cosh x & = & \sinh x & \\
 & D\,\tanh x & = & \frac{1}{\cosh^2 x} & [= 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2\, x] \\
 & D\,\mathrm{arsinh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \\
 & D\,\mathrm{arcosh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \\
 & D\,\mathrm{artanh}\,x & = & \frac{1}{1-x^2} & [= D\,\mathrm{arcoth}\,x] \\
 & D\,|x| & = & \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} & [= \mathrm{sgn}\,x,\ \forall\, x \neq 0]
\end{array}
$$

25.3 Teoremi algebrici sulle derivate

In tutto questa Lezione, la somma è somma di funzioni, e così il prodotto e il quoziente: per esempio $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$.
La derivata della somma [di 2 funzioni] è la somma delle derivate [di quelle 2 funzioni]:

$$(f+g)' = f' + g'$$

che potremmo anche scrivere $D(f+g) = Df + Dg$ ma continueremo con la notazione dell'apice per la derivata prima.
La derivata del prodotto non è il prodotto delle derivate bensì

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \text{. Da cui subito } (cf)' = cf',\ c \text{ costante}\,.$$

Derivata della [funzione] reciproca:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

e da questa e dalla precedente si ricava subito la derivata del quoziente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\,.$$

Derivata della funzione composta:[53]

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi. Con la prima, terza e quinta formula, ricordando la derivata dell'arcotangente, si troverà $D\Big(\text{arctg}x + \text{arctg}\,\frac{1}{x}\Big) = 0$.
Dalla quinta formula $Df^\alpha = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f'$ per ogni $\alpha \in I\!R$.

[53] Per lo studente interessato, quella formula consente la derivazione di f^g derivando l'equivalente $e^{g \cdot \ln f}$:

$$(f^g)' = f^g \cdot \left(g' \cdot \ln f + \frac{g \cdot f'}{f}\right)$$

ricordando la soprastante formula di derivazione del prodotto, e la derivata della funzione esponenziale e della funzione logaritmo.

Esempi di calcolo di derivate

$$D\sqrt{1+x^2} =$$
$$= D\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot D(1+x^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\,x =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$D\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= -(1) \cdot D\frac{1}{x^2} =$$
$$= -D\,x^{-2} =$$
$$= 2\,x^{-3} =$$
$$= \frac{2}{x^3}$$

26 Limiti e derivate per capire le funzioni

Faremo una trattazione semplice di molti tipi di funzioni **continue** di frequentissima ricorrenza in Farmacia.

Non ci proponiamo certo di "imparare a memoria" la casistica ma di capire le relazioni del grafico con limiti e derivate.

Uno studio più completo delle funzioni, ovvero – in pratica – del loro grafico, verrà fatto in seguito, comprendente la ricerca dei minimi e dei massimi, e altro.

Tipo A: $\exists \lim_{x\to+\infty}$

Sottotipo A1 – con infinite oscillazioni, limite $+\infty$
Poco rilevanti.
Esempio:

$$x + 2\sin x$$

Sottotipo A2 – limite finito negativo o $-\infty$
Poco rilevanti.
Esempi:

$$-\arctan x \qquad \log_b x \quad 0 < b < 1.$$

Sottotipo A3 – con infinite oscillazioni, limite 0 o numero positivo

Esempi:

$$\frac{\sin x}{x} \qquad 100 + \frac{\sin x}{x}$$

$f(x) \geq 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$

Sottotipo A4 – Funzioni prima decrescenti e poi crescenti

Sottotipo A4a – con derivata che tende
a $+\infty$ per $x \to +\infty$
a $-\infty$ per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ (e allora $f(x)$ ha limite $+\infty$)
$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ (e allora $f(x)$ ha limite $+\infty$)
Esempi:

$$x^2 \qquad x^4$$

Sottotipo A4b – con derivata che tende a 0 per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

Esempio con limite $+\infty$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$:

$$\ln|x|$$

Esempio con limiti finiti (uguali) er $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$:

$$-\frac{1}{x^2}$$ *link<– al calcolo della derivata*

E si veda su WolframAlpha: `Plot -1/x^2 and D[-1/x^2]`

Sottotipo A4c – con derivata che tende
a $L > 0$ per $x \to +\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L > 0$ [54]
a $-L$ per $x \to -\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -L$ [55]
(L numero reale).
Esempio:

(ramo d'iperbole) $\sqrt{1+x^2}$ *link<– al calcolo della derivata*

E si veda su WolframAlpha: `Plot Sqrt[1+x^2] and D[Sqrt[1+x^2]]`

Da adesso, con qualche piccola perdita, in A consideriamo solo funzioni definitivamente non negative

$f(x) > 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$

Sottotipo A5 – con 1 o più "campane" con limiti 0 a $\pm\infty$
Sono le funzioni principali del Calcolo delle Probabilità e della Statistica.
Verificano queste condizioni (comunque non bastevoli a caratterizzarle)

$$f(x) \geq 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(t) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(t) = 0 \tag{9}$$

[54] E allora (teorema) $f(x)$ ha limite $+\infty$ per $x \to +\infty$.
[55] E allora (teorema) $f(x)$ ha limite $+\infty$ per $x \to -\infty$.

(56)

Praticamente dietro quasi ogni fenomeno della realtà sensibile c'è in qualche modo una funzione più o meno a campana. Imparare a riconoscere queste configurazioni a campana aumenta enormemente la comprensione della realtà.

La campana può avere 2 significati principali: una densità, coi suoi casi estremi rari e quelli medi più comuni, oppure, se in ascissa abbiamo il tempo, talvolta rappresenta (quantitativamente) la classica "parabola della vita", valida anche per una comunità microbica, per la potenza dell'Impero Romano, per la concentrazione di un farmaco immesso nel sangue, o quant'altro: sorgere, ascendere, declinare, finire.

Qua stiamo parlando di curve "più o meno a campana" mentre con "curva a campana" *di solito* si intende proprio la *campana gaussiana*, grafico della *densità normale standard* $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Curve più o meno a campana del primo tipo, cioè densità, (della

[56] **Sottotipo A5a – con 1 "campana" e con limiti 0 a $\pm\infty$**
Sono il caso più importante della Statistica.
Esempi:

$$\text{densità di Cauchy: } \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$\underline{\text{densità normale standard}}\text{: } \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

e densità log-normali.
Sottotipo A5b – con più "campane" con limiti 0 a $\pm\infty$
Per esempio le densità bimodali. Il caso "capriccioso". Comunque verificano le (9).

Microbiologia) sono in questo link->.

Una curva più o meno a campana del secondo tipo, cioè un'evoluzione di una quantità nel tempo, (della Microbiologia) è in questo link-> e un altro (della Farmacocinetica) in questo link-> e un altro a pagina 44 di questo link->.

Da adesso, con qualche piccola perdita, in A consideriamo solo funzioni definitivamente positive aventi derivata > 0 oppure < 0 nel dominio (e allora crescenti o decrescenti nel dominio)
[57]

Sottotipo A6a – derivata costante non nulla
$f'(x) = m = cost \neq 0$
Grafico: retta obliqua.
Equazione:

$$f(x) = m\,x + q, \qquad m \neq 0$$

È il tipo principale di funzione che ricorre in Farmacia e nelle altre Scienze Applicate. Le applicazioni sono pressochè infinite.
Limite $+\infty$ se $m > 0$ e $-\infty$ se $m < 0$.

Sottotipo A6b – derivata che tende a $+\infty$.
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$
La funzione cresce sempre più e (teorema) va a $+\infty$.
Esempi:

$$x^3, \quad \mathrm{e}^x$$

Sottotipo A6c – derivata positiva che tende a 0.
$f(x) \geq 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$
$f'(x) > 0$
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
La funzione cresce sempre meno e (teorema) va a $+\infty$ oppure a un limite finito. (Non negativo come definitivamente è la funzione).

[57] Stiamo perdendo per esempio $-x^2$.

Esempi con limite $+\infty$:

$$\sqrt{x}, \quad \ln x$$

Esempi con limite finito:

$$\Phi(x) \quad \arctan x \qquad 1 - \mathrm{e}^{-x} \qquad 1 - \frac{1}{x}$$

e le prime 3 sono importanti in Calcolo delle Probabilità e Statistica.

Sottotipo A6d – derivata positiva che tende a un numero positivo.
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L > 0$, finito
La funzione (teorema) tende a $+\infty$.
Ma può farlo in modi alquanto vari, discriminati dalla derivata seconda e dalla ricerca degli asintoti.
Esempi:
Cresce sempre più e ha asintoto obliquo: $x + \mathrm{e}^{-x}$
Cresce sempre meno e ha asintoto obliquo: $x - \mathrm{e}^{-x}$
Cresce sempre più e non ha asintoto obliquo: $x - \ln x$
Cresce sempre meno e non ha asintoto obliquo: $x + \ln x$

Ultimo sottotipo, A7:

Da adesso, con qualche piccola perdita, in A consideriamo solo funzioni definitivamente positive aventi derivata negativa che tende a 0

$f(x) > 0$ definitivamente cioè per $x > \bar{x}$
$f'(x) < 0$
$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
La funzione decresce sempre meno e (teorema) ha limite ≥ 0.
Esempi con limite 0:

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x^2} \qquad \mathrm{e}^{-x}$$

Esempi con limite > 0:

$$3 + \frac{1}{x} \qquad 4 + \frac{1}{x} \qquad 5 + \mathrm{e}^{-x}.$$

Tipo B: $\nexists \lim_{x \to +\infty}$

Sottotipo B1 – Grafico "oscillante" con "campate" ugualmente larghe

Sottotipo B1a: limitate
Esempi:

$$\sin x \qquad \cos x$$

Sottotipo B1b: illimitate
Poco rilevanti per noi.
Esempio:

$$\mathrm{e}^{x} \sin x$$

Sottotipo B2 – Grafico "oscillante" con "campate" non ugualmente larghe
Poco rilevanti per noi.
Esempio:

$$\sin x^2$$

Sottotipo B3 – Grafico "oscillante" senza vere "campate" distinguibili
Poco rilevanti per noi, ma rilevantissime in altra teoria.
Esempio:

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2\,x$$

26.1 Le funzioni elementari in Farmacia

L'uso delle funzioni elementari nella ricerca farmaceutica e in generale biomedica è *enorme*, per **modellizzare** i fenomeni.

Gli articoli scientifici che le usano sono sicuramente *milioni*.

Avere in mano dei <u>numeri</u>, risultato di un esperimento, è *qualcosa*. Avere una <u>funzione</u> che li modellizza – anche se non rende conto *esattamente* di tutti i casi riscontrati – è *immensamente di più*. Nel modello ci saranno dei parametri, come la quantità di qualche sostanza presente in un liquido di coltura per fare un esempio, che si potrà ipotizzare di modificare, in un successivo esperimento, e così si va avanti.

Nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto generale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:

qualitativa ("bollendo *un po'* otterrai *un po' di* precipitato")
numeri
operazioni (numeriche)
funzioni (numeriche)← **qua siamo**
analisi statistica dei dati (numerici)

È allora fondamentale conoscere il comportamento – verrebbe quasi da dire la *psicologia* se non l'*anima* – delle varie funzioni elementari, il loro *modo* di crescere e decrescere e tendere all'infinito eccetera...

Sarebbe bello fare una lunga lista, lunghissima, ciclopica.
Diamo qua solo 3 esempi:

• **logaritmo**
<-link il logaritmo che usato nella considerazione dell'attività degli ioni idrogeno nelle soluzioni acquose col pH

• **esponenziale** <-link l'esponenziale in base 1+ il tasso di accrescimento modellizza l'accrescimento malthusiano delle popolazioni

• la **radice quadrata** che modellizza l'accrescimento microbico in certe condizioni link->

27 Prime applicazioni del Calcolo Differenziale

27.1 Tangente, de/crescenza, min/max, concavità, flessi

Definizioni. Si dice che *f è crescente in x_0* se in un intervall(in)o a sinistra di x_0 vale meno che in x_0 e in un intervall(in)o a destra di x_0 vale più che in x_0. (In simboli è alquanto complicato). Con ovvi mutamenti si definisce la funzione decrescente in un punto. Si dice che f è *crescente in un insieme E* se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Se E è un intervallo ciò equivale (si dimostra) alla crescenza in ogni punto di E. Simile equivalenza con la decrescenza, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, sugli intervalli.
Il punto x_0 si dice di *minimo relativo* per f se essa in un intervall(in)o a sinistra di x_0 e in un intervall(in)o a destra di x_0 vale *più* che in x_0. Se *meno*, si ha un *punto di massimo relativo*.
Il punto x_0 si dice di *flesso* per f se essa in un intervall(in)o a sinistra di x_0 *volge la concavità verso l'alto* e in un intervall(in)o a destra verso il basso, oppure viceversa; $(x_0, f(x_0)))$ si dice *flesso*.
Se $\forall\, x \in \mathrm{dom} f$ è $f(x) \geq f(x_0)$, $f(x_0)$ si dice *minimo assoluto* di f, e *massimo assoluto* se $\forall\, x \in \mathrm{dom} f$ è $f(x) \leq f(x_0)$.
Teorema 1. La **tangente** al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e allora si ha l'approssimazione

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall\, x \approx x_0\,.$$

Per esempio per $x \approx 0$ è $\sin x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.
Teorema 2. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decrescente in } x_0\,.$$

(Se $f'(x_0) = 0$ allora f in x_0 può essere crescente o decrescente o nè crescente nè decrescente: si considerino x^3, $-x^3$, x^2).
Teorema 3. Se f è crescente prima di x_0 e decrescente dopo x_0 allora x_0 è un punto di massimo relativo. Similmente scambiando *crescente* e *decrescente* si ha un **punto di minimo relativo**.
Teorema 4. Se $f''(x) > 0$ in un intervallo, in esso $f(x)$ *volge la* ***concavità*** *verso l'alto*, e verso il basso se < 0.

27.2 Regola di de l'Hospital

Detti u_0 e l due numeri o $+\infty$ o $-\infty$, se per $x \to u_0$

$$\left.\begin{array}{cl} & f(x) \to 0 \\ \wedge & g(x) \to 0 \\ \wedge & \frac{f'(x)}{g'(x)} \to l \end{array}\right| \quad \vee \quad \left|\begin{array}{cl} & f(x) \to \pm\infty \\ \wedge & g(x) \to \pm\infty \\ \wedge & \frac{f'(x)}{g'(x)} \to l \end{array}\right.$$

si dimostra (teorema detto Regola di de l'Hospital) che

$$\lim_{x \to u_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

se f e g sono "sufficientemente regolari" (come sono in genere le funzioni che ricorrono nelle Scienze Applicate, e negli esercizi elementari, anche di questa trattazione).
Si noti che l'eventuale inesistenza del limite del rapporto delle derivate non esclude l'esistenza del limite del rapporto iniziale.
Esempi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \left(= \frac{0}{0} \right) <=^{H} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

che si chiama **secondo limite fondamentale** (e per esso non vale *come dimostrazione* il calcolo soprastante, esiste una dimostrazione specifica; e proprio da quel limite si dimostra che $D \sin x = \cos x$, che quassù viene utilizzato).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) <=^{H} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \, .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) <=^{H} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \, .$$

Da questi 2 limiti si ha questa sequenza di funzioni "sempre più infinite" in $+\infty$, cioè tali che il rapporto di una di esse con una precedente tende a $+\infty$: (lentissima) $\ln x$, x, e^x (velocissima).
Il $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5e^x+\pi}{7x^3+3x^2+1}$ si risolverà con 3 applicazioni successive del teorema. Invece $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+\sin x+\cos x}{5x-\sin x+3\cos x}$ semplificando per x.

27.3 Asintoti

Definizioni degli asintoti. Se x_0 è un numero [finito] e

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta verticale $x = x_0$ si dice ***asintoto verticale*** per f. (Ma alcuni Autori ritengono inutile questa definizione).
Se esistono 2 numeri [finiti] m e q tali che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$$

allora la retta $y = mx + q$ si dice ***asintoto destro*** (oppure: *per* $x \to +\infty$) per f, in particolare *obliquo* se $m \neq 0$ e *orizzontale* se $m = 0$. Con $x \to -\infty$ si definisce l'eventuale ***asintoto sinistro***.
Esempi. La funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ ha asintoto verticale $x = 0$ e asintoto orizzontale $y = 0$: si trovano coi limiti a 0^+, $-\infty$ e $+\infty$.
La funzione $\tan x$ ha gli infiniti asintoti verticali $x = k\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$.
Si troverà che $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro per $\arctan x$, e $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.
Si troverà che $y = 1$ è asintoto orizzontale destro per $\tanh x$, e $y = -1$ è asintoto orizzontale sinistro.
Si trova che $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro per $\ln(1 + e^x)$ e $y = x$ è asintoto obliquo destro.
Per $f(x) := \sqrt{x}$ si troverebbe $m = 0$ ma q infinito e allora non esiste asintoto destro. (E sinistro non c'è perchè $\mathrm{dom} f = [0, +\infty[$).
Con la Regola di de l'Hospital per $\ln x$ si trova $m = 0$ ma q infinito e allora non esiste asintoto destro. (Sinistro escluso dal dominio).
La funzione $f(x) := \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ ha asintoto verticale $x = 0$ che si trova col limite per $x \to 0^+$, e asintoto orizzontale [destro e sinistro] $y = 1$.
Esercizi. Si trovino i 2 asintoti di questa funzione considerata da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Asymptote*:

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x}$$

e con essi e qualche valore si disegni un grafico approssimativo. Similmente per la reciproca, che ha 3 asintoti.

28 Teoria dello studio di funzione

28.1 La “ricetta” per lo studio di funzione; sup e inf

Fermo restando che una funzione molto “capricciosa” non può essere studiata con metodi elementari, è però vero che un’infinità di funzioni del tipo di quelle che tendono a capitare nelle Scienze Applicate può validamente studiarsi coi metodi visti finora.
Per quanto possibile si cercherà di seguire questa “ricetta”:

1) Dominio
2) Simmetrie e periodicità
3) Zeri [equazione $f(x) = 0$]
4) Segni [disequazione $f(x) > 0$]
5) Limiti [negli “estremi” (in senso lato) del dominio]
6) Asintoti
7) Derivata prima
8) Limiti della derivata prima [non se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$]
9) Crescenza/decrescenza, max/min, sup/inf
10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]
11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi
12) Disegno del grafico

Le funzioni 2π-periodiche, si studino in $[0, 2\pi[$ o meglio $]-\pi, \pi]$. Analoghe riduzioni del dominio si attuino per altre periodicità.
Resta da vedere cosa sono $\sup f$, e $\inf f$. Se una funzione ha un massimo assoluto $\max f$, esso è l’*estremo superiore* $\sup f$. Tuttavia, consideriamo la funzione $\arctan x$. Essa per $x \to +\infty$ tende a $\frac{\pi}{2}$ ma senza mai raggiungerlo: vi si avvicina indefinitamente rimanendo sempre minore. In questo caso $\frac{\pi}{2}$ non è certo max – infatti per essere max ci vorrebbe un x_0 tale che arctan là vale prorio quel valore, il che non succede mai – ma si dice che è estremo superiore. Similmente, si potrebbe definire l’estremo inferiore $\inf f$; in questo caso $\inf f = -\frac{\pi}{2}$. Ovvio poi è il significato di $\sup f = +\infty$, e di $\inf f = -\infty$.

Esercizi. Si studino $\ln(1 + \mathrm{e}^x)$, $\sin x + \cos x$, $\sqrt{x^2 - 1}$, $\frac{x-3}{x^2-4}$, $\frac{x^2-4}{x-3}$, $\sqrt{x} - x$, $x - \sqrt{2x+3}$, $\ln\left(x^2 - x\right)$, $\frac{x+1}{x^2-2x+1}$, $(1 - x)\sqrt{x}$, $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

28.2 Esempi di studio di funzione

- $$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
- $$f(x) := \frac{x}{2+x^2}$$
- $$f(x) := \ln(x^2-1)$$

VI – Serie numeriche e integrali

29 Serie geometrica e cenni alle altre serie

Essenzialmente le <u>serie</u> sono in qualche modo delle <u>"somme infinite"</u>. Estenderemo l'uso del simbolo di sommatoria $\sum$ dal caso finito a quello con infiniti termini: essenzialmente, vogliamo occuparci di $a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$ con infiniti termini.

Definizione di serie (numerica). In questa trattazione elementare, una serie (numerica) è una <u>scrittura</u> come queste

$$a_0 + a_1 + ... + a_k + ... \quad {\scriptstyle \textit{il primo indice poteva essere diverso da } 0} \tag{10}$$

$$\text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad {\scriptstyle \textit{anche qua, ovvio}} \tag{11}$$

$$\text{per esempio} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \text{ ovvero } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{12}$$

e questa dell'esempio si chiama *serie armonica* mentre quest'altra

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... + \frac{3}{2^k} + ... \text{ ovvero } \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{13}$$

è una (particolare) *serie geometrica* di *ragione* $\frac{1}{2}$.

Definizione di somma di una serie.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \to +\infty} (a_0 + a_1 + ... + a_n) \quad \text{ se } \exists\,. \tag{14}$$

Questa formula (14) ci dice che la *somma della serie* al primo membro è il <u>**limite**</u>, se esiste (finito o infinito) della

ridotta o *somma parziale* $\;a_0 + a_1 + ... + a_n$. $\leftarrow$ (normale) numero.

Nota sull'ambiguità notazionale. Le 2 scritture equivalenti

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{e} \qquad a_0 + a_1 + ... + a_n + ... \tag{15}$$

denotano sia la *serie* (scrittura), che l'<u>eventuale</u> sua *somma*.

La teoria delle serie è molto ampia([58]).

Ci occuperemo della sola *serie geometrica di ragione r compresa fra 0 e 1 esclusi*, che ricorre ampiamente nel Calcolo delle Probabilità:

$$\begin{aligned} & a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^k + ... = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = \frac{a}{1-r} \\ & a \in \mathbb{R} \\ & 0 < r < 1 \end{aligned} \tag{19}$$

[58] Per lo studente interessato, ecco qualche approfondimento.

***Carattere* delle serie, "tipi" di serie, e serie particolari.**
• Serie *convergente*, con somma s: il limite delle somme parziali è il numero $s \in \mathbb{R}$. Per esempio la *serie ciclometrica*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + ... + \frac{(-1)^k}{2k+1} + ... = \frac{\pi}{4}\,. \tag{16}$$

• *Serie non convergenti*: quelle *indeterminate* ($\nexists$ limite) come

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^k + ... \tag{17}$$

(la somma parziale vale alternatamente 1 e 0), quelle *divergenti a* $+\infty$ come $1+1+...+1+...$ e quelle *divergenti a* $-\infty$.
⋆ Serie *a termini positivi*: $a_k > 0$ per ogni k. (Similmente le serie a termini *non negativi* se ≥ 0, e negativi, e non positivi se ≤ 0).
⋆ Serie *a termini di segno alternato*, con ovvio significato.
• *Serie geometrica di ragione* $r \in \mathbb{R}$, fissiamo le idee con $a > 0$:

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & \textit{se } |r| < 1 \\ +\infty & \textit{se } r \geq 1 \\ \nexists & \textit{se } r \leq -1 \end{cases} \tag{18}$$

Nel terzo caso la serie è indeterminata. Per $a<0$ vale il Teor. 1.
• *Serie esponenziale.* $1 + a + \frac{a^2}{2} + ... + \frac{a^k}{k!} + ... = \mathrm{e}^a$. (Si dimostra).
• La *serie armonica*, prima vista: diverge a $+\infty$.
Teorema 1. $ca_{n_0} + ca_{n_0+1} + ... + ca_k + ... = c(a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_k + ...)$ con l'ovvio significato se la serie in parentesi diverge a $+\infty$.
Teorema 2. Se $a_k \not\to 0$ allora la serie è non convergente.
Teorema 3. Se ogni $a_k \geq 0 \Rightarrow$ la serie converge o diverge a $+\infty$.
Teorema 4. (Di Leibniz). Se in una serie a termini di segno alternato $|a_k| \to 0$ e $|a_k|$ è decrescente anche solo in senso debole, cioè $|a_{k+1}| \leq |a_k|$, allora la serie converge.
In particolare $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{k+1}}{k} + ... = \ln 2$, *serie di Leibniz*.
Si possono considerare interessanti esercizi↑.

(La formula vale anche per $-1 < r < 1$ ma ci interessano solo i valori $0 < r < 1$, e poi il caso $r = 0$ è ovvio).
Nel Calcolo delle Probabilità è sempre $a > 0$.

Seppure il Calcolo delle Probabilità lo tratteremo in seguito, ritenendo noto qualche concetto dagli sudi scolastici vediamo un esempio di applicazione della serie geometrica, per mostrarne l'utilià.

ESERCIZIO$_{\mu 2018 \neq}$
$* \approx ^{\%}$ Una certa affezione, quando insorge ha una durata in giorni (interi) con probabilità

$\frac{1}{2}$ probabilità di durare 1 giorno
$\frac{1}{4}$ probabilità di durare 2 giorni
$\frac{1}{8}$ probabilità di durare 3 giorni
...
$\frac{1}{2^n}$ probabilità di durare n giorni.

(Che si chiama *densità geometrica iniziante da 1 di parametro* $\frac{1}{2}$).
Qual è la probabilità che duri un numero pari di giorni?

Svolgimento

Detta X la durata dell'affezione, scriviamo (usando la notazione delle variabili aleatorie, che tratteremo in seguito, ma che comunque qua appare di interpretazione ovvia)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & n \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \ldots & \frac{1}{2^n} \ldots \end{pmatrix}$$

$$P(X\ pari) = P(X \in \{2, 4, 6...\}) =$$

$$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + ... =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$

che si riconosce esser serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{4}$ (perchè ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n + ...$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

(Si noti che allora è più probabile che duri un numero dispari di giorni. Questo rimane vero con qualunque valore di $p \in]0, 1[$, non solo $\frac{1}{2}$, e perfino con qualunque densità decrescente definita su 1,2,3... A Trieste si dice che il vento Bora tende a durare un numero dispari di giorni).

Nota sulla precisione dei numeri.
In questa trattazione matematica in generale diamo i risultati parecchie cifre significative. Il che è una buona cosa da un punto di vista matematico. In Farmacia ci sono aspetti pratici, che in questa trattazione elementare non consideriamo, per i quali le approssimazioni usate in generale potrebbero essere molto meno precise. Difficilmente si leggerà che un paziente ha 33.33% di sopravvivere. E nessuna farmacia ordinerà al fornitore $8\,264.46\,mg$ di un principio attivo.
Dietro tutto ciò ci stanno questioni <u>non matematiche</u>, legate alla precisione delle misure e più in generale dei dati.

30 L'integrale indefinito

30.1 Introduzione all'integrale indefinito

L'integrale indefinito è in sostanza l'anti-derivata:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$
$$\Leftarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = D\left(\arctan x + c\right).$$

(In qualche modo, il segno d'integrale può fare il "salto dell'uguale" trasformandosi in derivata, come un ln fa il "salto" trasformandosi in exp, per esempio $\ln x^2 = 3 \Leftarrow x^2 = \mathrm{e}^3$).
Il termine "$+c$" ci ricorda che non solo $\arctan x$ ha derivata $\frac{1}{1+x^2}$, ma anche $\arctan x + 99$ o più qualunque numero reale c. Allora l'integrale indefinito è un insieme di funzioni. Ciascuna di esse si chiama *primitiva* di f. Abbiamo subito questi integrali indefiniti:

$$\begin{array}{llcll}
 & \int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \arctan x + c & \\
\forall\,\alpha & \int \alpha\,dx & = & \alpha x + c & \text{in particolare:} \\
 & & & & \int 0\,dx = c \\
 & \int \mathrm{e}^x\,dx & = & \mathrm{e}^x + c & \\
 & \int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| + c & \\
\forall\,\alpha \neq -1 & \int x^\alpha\,dx & = & \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \text{in particolare} \\
 & & & & \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \\
 & & & & \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c \\
 & & & & \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c \\
 & & & & \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \\
 & \int \cos x\,dx & = & \sin x + c & Nota: non\ diamo\ alcun \\
 & \int \sin x\,dx & = & -\cos x + c & significato\ al\ termine\ dx.
\end{array}$$

(Il $+c$ va inteso come la somma di una qualunque costante in ognuno degli intervalli massimali contenuti nel dominio dell'integranda[59] ma senza errare troppo immaginiamo che sia 1 singola costante).

[59] Per esempio l'integrale indefinito di $\frac{1}{x}$ è $\ln|x|+c$ e il dominio dell'integranda è costituito dai 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ e per ciascuno di essi si avrà una costante da sommare a $\ln x$, in modo indipendente). Per esempio $\ln(-x)+3$ per $x<0$ e $\ln x + 5$ per $x>0$.

30.2 Approfondimenti ed esempi sull'integrale indefinito

Dalle proprietà (teoremi) delle derivate si hanno (non tutte in modo ovvio) queste 4 proprietà (teoremi) degli integrali indefiniti. Le prime 2 formule costituiscono la *linearità dell'integrale*:

$$\int \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \tag{20}$$

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \tag{21}$$

Integrazione per parti:

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx \tag{22}$$

Integrazione per sostituzione $t := mx + q$:

$$\int f(m\,x + q)\, dx = \frac{1}{m} \Big(\int f(t)\, dt \Big)_{t = m\,x+q} \quad \forall\, m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0. \tag{23}$$

(Una formula più complicata che non diamo permette una sostituzione più generale $t := g(x)$, ed è là che si dà senso al dx).

Esempi.

$$\diamond \qquad \int (x^3 + 2\,x^2 + 3\,x)\, dx =$$

$$=^{(21)} \int x^3\, dx + \int 2\,x^2\, dx + \int 3\,x\, dx =$$

$$=^{(20)} \int x^3\, dx + 2 \int x^2\, dx + 3 \int x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{2}{3}\, x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

$$\diamond \qquad \int (\sin x + 3 \cos x + 7)\, dx =$$

$$=^{(21)} \int \sin x\, dx + \int 3 \cos x\, dx + \int 7\, dx =$$

$$=^{(20)} (-\cos x + c_1) + 3\int \cos x \, dx + (7x + c_2) =$$

$$= (-\cos x + c_1) + 3\,(\sin x + c_3) + (7x + c_2) =$$

chiamiamo c la somma delle 3 costanti d'integrazione c_1, c_2 e c_3

$$= -\cos x + 3\sin x + 7x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

$$\diamond \qquad \int x\,\mathrm{e}^x \, dx =$$

poniamo $f(x) := e^x$ e $g(x) := x$ per integrare per parti $\mathrm{e}^x x$

$$=^{(22)} x\,\mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x \, dx = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

$$\diamond \int \cos(2\,x + 3)\, dx =^{(23)}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int \cos(t)\, dx \Big)_{t = 2\,x + 3} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sin(t) \Big)_{t = 2\,x + 3} + c =$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2\,x + 3) + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Integrale del logaritmo naturale e decimale.

$$\int \ln x \, dx = \qquad \text{moltiplichiamo per 1}$$

$$= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \qquad \text{riconosciamo } D\,x = 1$$

$$= \int (D\,x) \cdot \ln x \, dx =^{(22)}$$

$$= x\,\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= x\,\ln x - \int 1 \, dx =$$

$$= x\,\ln x - x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Con questo procedimento e con la formula di cambiamento di base e con la (20) si calcoli l'integrale del logaritmo decimale.

Esercizi.

$$\int \pi \ln(\sqrt{2}\,x)^3\,dx \qquad \int \pi^2 \lg x^{\sqrt{2}}\,dx \qquad \int \frac{x^2+3}{2x^2+2}\,dx$$

$$\int \pi \ln(\sqrt{2}x-6)^3\,dx \qquad\qquad \int \mathrm{e}^2 \lg(1-3x)^{\frac{1}{\pi}}\,dx$$

31 L'integrale definito

31.1 La questione dell'area sotto una curva

In un'infinità di questioni interessa conoscere l'area compresa fra il grafico di una funzione $f(x)$ e l'asse delle ascisse, da un numero a a un numero b su quell'asse. (Al limite, pure valori a o b infiniti).

Questo problema verrà risolto dall'integrale definito: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nel Calcolo delle Probabilità il concetto è di uso amplissimo.[60]

Veniamo alla Farmacia. Leggiamo su Wikipedia (italiana), l'enciclopedia libera, alla voce "Area Under the Curve":

> L'area sotto la curva concentrazione/tempo o AUC (dalla dicitura inglese area under the time/concentration curve, ovvero area sottesa alla curva) è un parametro farmacocinetico dato dall'integrale in un grafico concentrazione/tempo (...)
> Tale parametro è fondamentale per poter descrivere l'effetto dei farmaci poichè riflette l'esposizione dei tessuti al farmaco nel tempo.
> L'AUC (da zero a infinito) rappresenta l'esposizione totale al farmaco in funzione del tempo.

Cioè, e si veda la figura a questo `link->`,

$$AUC_\infty := \int_0^{+\infty} concentrazione(t)\,dt$$

[60] Nel Calcolo delle Probabilità l'area sotto il grafico di una *densità di probabilità di una variabile aleatoria* X, concetti che definiremo, rappresenterà la probabilità che $a \le X \le b$:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Si può cominciare a farsi un'idea con la *densità normale standard* $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, considerando il suo grafico. Per esempio con WolframAlpha

```
Integrate[Exp[-t^2/2]/Sqrt[2Pi],{t,-2,2}]
```

ci dà circa 95%, e un'interessante figura.

Un'applicazione molto vicina alla Farmacia è l'area sotto il grafico che esprime la concentrazione di glucosio nel sangue all'avanzare del tempo dopo l'assunzione di un pasto; si veda questa figura di Wikimedia Commons: link->; ciò serve a definire l'indice glicemico degli alimenti. Quel grafico viene certo da analisi del sangue, ma può anche essere modellizzato matematicamente con funzioni, per ulteriori ricerche: link->. (Il quel testo, si noti che *in silico* = col computer; è un aggiornamento dei classici *in vitro* e *in vivo*).

Ma le applicazioni sono veramente innumerevoli.[(61)]

31.2 Teoria ed esempi dell'integrale definito

Siano $F(x)$ e $f(x)$ due funzioni definite fra a e b, cioè sull'intervallo $[a, b]$ se $a \leq b$ e sull'intervallo $[b, a]$ se $a > b$.
Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F' = f$, e tale primitiva si può ottenere dall'integrale indefinito di f ponendo $c = 0$ o qualunque altro valore, in questa trattazione elementare **definiremo l'*integrale definito* di $f(x)$ da a a b in questo modo**

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)_{\textit{scritto anche}}\,[F(x)]_{a \leftarrow \textit{incremento di } F \textit{ da } a \textit{ a } b}^{b}$$

(è ovvio che qualunque primitiva si scelga, ovvero qualunque c, si ottiene lo stesso valore: c si elide nella sottrazione).

Esso uguaglia l'area (consueta) fra l'asse x e il grafico di f fra a e b se $a < b$ e su $[a, b]$ è $f(x) \geq 0$. *(Sottografico).* (A un livello superiore l'integrale viene definito sostanzialmente proprio

[61] In ambito Biomedico, si consideri la funzione $f(t)$ che esprime in millilitri all'ora il flusso di un liquido in un tubo, anatomico o artificiale: l'area in questione, da t_1 a t_2 in ore, rappresenta la quantità di liquido fluito, in millilitri; e ovviamente millilitri e ore possono essere cambiati con altre unità di misura di volume e tempo. Quella quantità sarà proprio $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.
Si consideri, ancora, la determinazione delle aree geometriche, di figure definite dal loro bordo inteso come grafico di una funzione: ciò può servire nella progettazione di protesi anatomiche (Ingegneria Biomedica) o di reattori chimici per la produzione di farmaci.

con le aree e questo consente di averlo anche per funzioni prive di primitiva↑ come $\operatorname{sgn} x$ ma noi non considereremo tali integrali). Si noti che l'integrale definito è un numero, la primitiva è una funzione, e l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.

Esempio 1. Calcoliamo l'area sotto una "campata" della sinusoide, da 0 a π:

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Esempio 2. Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione $y := \frac{1}{x}$ da 1 a 7:

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

ed è ben evidente che il numero 7 si può sostituire con qualunque numero t, ottenendosi il significato geometrico del logaritmo. Se $0 < t < 1$ il logaritmo naturale è negativo, e infatti l'area del sottografico, da intendersi come *area con segno*, è negativa perchè la base viene percorsa da 1 a t in verso contrario all'orientazione dell'asse x. Si disegni l'iperbole e si stimi (dall'area) $\ln 10$.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Integrale del logaritmo naturale e decimale.

$$\int \ln x \, dx = \quad \text{moltiplichiamo per } 1$$
$$= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \quad \text{riconosciamo } D\,x = 1$$
$$= \int (D\,x) \cdot \ln x \, dx =^{(22)}$$
$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$
$$= x \ln x - \int 1 \, dx =$$
$$= x \ln x - x + c \,. \quad \text{[Verificare derivando]}$$

Con questo procedimento e con la formula di cambiamento di base e con la (20) si calcoli l'integrale del logaritmo decimale.

32 Integrali: approfondimenti e applicazioni

Dalla definizione segue subito che

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Regola di Chasles. Per ogni a, b, c, in qualunque ordine,

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \tag{24}$$

(dove si intendano completati i 3 simboli di integrale con $f(x)dx$, che per focalizzare il significato di questo teorema, non è stato scritto esplicitamente).
Esercizio. Con la Regola di Chasles si calcoli $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$, si faccia un disegno, e si ricalcoli quell'integrale con le aree della geometria elementare. (Si noti che di $|x|$ non abbiamo dato una primitiva, ma quella funzione coincide con $-x$ fino a 0, e con x da 0 in poi).

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$
$*$ Supponiamo che in un tubo (per esempio di un reattore chimico per la produzione di farmaci) passi un liquido nella misura di

$$p(t) := |t|\,dl/h$$

nel tempo t fra -1 e 2 (h, ore, unità di tempo; quella negativa indica un tempo anteriore a un tempo detto 0; si può ipotizzare, per esempio, che lo 0 sia una certa mezzanotte, e allora stiamo considerando il tempo dalle 23 alle 2 di notte, in effetti del giorno successivo). Calcolare

$$\int_{-1}^{2} p(t)\,dt$$

che da un punto di vista fisico – ma non ce ne occuperemo – rappresenta la quantità totale di liquido fluito nel tempo considerato, e ha unità di misura dl, cioè decilitri, ma per semplicità si facciano i calcoli e si dia la soluzione senza unità di misura.

SVOLGIMENTO

Ricordando che

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

ora (eliminando le unità di misura)

$$\int_{-1}^{2} p(t)\, dt = \int_{-1}^{2} |t|\, dt =$$

per la Regola di Chasles

$$= \int_{-1}^{0} (-t)\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

per la linearità dell'integrale (cioè per le formule (20) e (21))

$$= -\int_{-1}^{0} t\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

ricordando la primitiva elementare $\int t\, dt = t^2/2 + c$

$$= -\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2} =$$

esattamente

$$\boxed{2.5}$$

oppure anche validamente (ma in effetti meno bene, visto il significato fisico)

$$\boxed{\tfrac{5}{2}}$$

(Si tratta di due decilitri e mezzo, dal punto di vista fisico, molto meglio espressi – almeno come risultato finale – come 2.5 che $\frac{5}{2}$).

Esercizio$_\mu$ Si consideri la funzione

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \quad \text{(che si chiama \textit{densità di Cauchy})}$$

e si calcoli

$$\int_0^1 f(t)\, dt$$

e si troverà $\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$ che rappresenta – anticipando un argomento di Calcolo delle Probabilità – la probabilità che una variabile casuale (o meglio detta aleatoria) che ha quella densità assuma un valore fra 0 e 1. Si faccia un disegno della funzione ombreggiando il sottografico relativo all'area trovata.
Si calcoli poi

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

e ovviamente l'estremo $+\infty$ va inteso nel senso del limite(62). Si troverà $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ che rappresenterà la probabilità che una variabile aleatoria che ha quella densità assuma un valore fra 0 e $+\infty$ ovvero non negativo.
Infine si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

e si troverà 1 cioè 100% e questo valere 1 dell'integrale su tutto $\mathbb{R}$ avviene per tutte le densità di probabilità (che, poi, hanno anche la caratteristica di essere ≥ 0).
Questa non è la curva a campana che più ricorre nelle applicazioni come densità che invece è la campana gaussiana già accennata, ma ha il pregio di essere più facilmente trattabile pur esibendo comportamenti in parte simili.

62 Per le funzioni molto regolari che ci interessano in pratica, questo non creerà alcun problema, e nei trattati di Calcolo delle Probabilità si scrivono tranquillamente cose come $\arctan(+\infty)$, formalmente scorrette dal punto di vista matematico.

Praticamente dietro quasi ogni fenomeno della realtà sensibile c'è in qualche modo una funzione più o meno a campana. Imparare a riconoscere queste configurazioni a campana aumenta enormemente la comprensione della realtà.

La campana può avere 2 significati principali: una densità, coi suoi casi estremi rari e quelli medi più comuni, oppure, se in ascissa abbiamo il tempo, talvolta rappresenta (quantitativamente) la classica "parabola della vita", valida anche per una comunità microbica, per la potenza dell'Impero Romano, per la concentrazione di un farmaco immesso nel sangue, o quant'altro: sorgere, ascendere, declinare, finire.

Qua stiamo parlando di curve "più o meno a campana" mentre con "curva a campana" *di solito* si intende proprio la *campana gaussiana*, grafico della *densità normale standard* $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Curve più o meno a campana del primo tipo, cioè densità, (della Microbiologia) sono in questo link->.

Una curva più o meno a campana del secondo tipo, cioè un'evoluzione di una quantità nel tempo, (della Microbiologia) è in questo link-> e un altro (della Farmacocinetica) in questo link-> e un altro a pagina 44 di questo link->.

PARTE B – MATEMATICHE DELL’INCERTEZZA

Sezione B1 – Calcolo delle probabilità

VII – Probabilita assiomatica ed elementare

33 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

33.1 Inquadramento della questione

Il calcolo delle probabilità è una branca della matematica.
Come tale tratta oggetti astratti, ma a differenza di altre branche della matematica i modelli che crea sono in generale molto vicini o collegati alla realtà sensibile: troverete affermazioni su dadi, palline colorate, mortalità e lunghezza della vita, soldi...
Sebbene comprenda molti sottocapitoli, il suo prodotto principale è un numero che è *la probabilità di un evento*, come "la probabilità che la somma di 2 dadi sia 7 è $\frac{1}{6}$" che di per sè potrebbe voler dire poco ma può diventare preziosissimo per *scegliere* fra diverse alternative possibili, confrontandole numericamente; per esempio la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia 8 è $\frac{5}{36}$ che è meno di $\frac{1}{6}$. Non solo per una scommessa sui dadi fra amici ma anche per delicate scelte mediche o economiche o personali.

I dadi, le monete, eccetera, sono modelli "puliti", "perfetti", ma è ovvio che poi nella pratica ci interesseranno fenomeni di tipo medico e farmaceutico, come migliora/ peggiora.
Detto semplificatamente, la Statistica Inferenziale cercherà di affrontare la "non nettezza" di quei fenomeni, che avvengono nel mondo reale in presenza di miriadi di fattori confondenti.

Gli enti teorici di base sono gli eventi e la probabilità, definita in 4 modi:

- Concezione classica della probabilità
- Concezione frequentista della probabilità
- Concezione soggettiva della probabilità
- Concezione assiomatica della probabilità

Metodi del calcolo delle probabilità sono l'algebra e la geometria analitica, le funzioni elementari, il calcolo combinatorio, il calcolo infinitesimale.

33.2 Concezioni classica e frequentista della probabità

La concezione classica della probabilità è definita da

$$p = \frac{numero\, dei\, casi\, favorevoli}{numero\, dei\, casi\, possibili}$$

e vale se i casi possibili sono ragionevolmente da ritenere *equiprobabili* ovvero aventi la stessa probabilità.
Per esempio la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia maggiore di 10 è $\frac{3}{36}$ cioè $\frac{1}{12}$ perchè dei 36 casi possibili equiprobabili $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$,..., $(6, 6)$ sono 3 quelli favorevoli all'evento considerato (somma maggiore di 10) e cioè $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$.
Esercizio. Che probabilità c'è che la somma (dei punteggi) di 2 dadi sia un numero primo? E che non lo sia?
La concezione frequentista della probabilità è intuitiva e la vediamo con un esempio. Un farmaco è stato somministrato a 1000 persone con una certa diagnosi di malattia, e dopo 5 anni sono vive 700. Per l'uniformità delle condizioni e l'alto numero di *prove* si tende a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato a 1 persona con quella stessa diagnosi di malattia, c'è il 70% di probabilità che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 70% cioè 0.7 è $\frac{700}{1000}$).
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 2000 persone e dopo 5 anni sono vive 1200, si tenderà a ritenere che la sopravvivenza a 5 anni sia del 60%, meno del primo farmaco.
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 4 persone e dopo 5 anni sono vive 3, ne verrebbe una probabilità di sopravvivenza a 5 anni del 75%, cioè 3 su 4, cioè perfino meglio del primo farmaco, che però è stato provato su 1000 persone, mentre questo solo su 4; e qui siamo giunti al limite della validità di questa concezione, se non vengono fatti ulteriori approfondimenti.
Le probabilità così ottenute si chiamano *probabilità a posteriori*.

ESCERCIZIO$_{\mu 2018}$

$* \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari?

SVOLGIMENTO

Dei 36 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6
```

con somme rispettive

```
02 03 04 05 06 07
03 04 05 06 07 08
04 05 06 07 08 09
05 06 07 08 09 10
06 07 08 09 10 11
07 08 09 10 11 12
```


(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3 5, 7, 11) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12) rispettivamente

```
P P n P n P
P n P n P n
n P n P n n
P n P n n n
n P n n n P
P n n n P n
```

avendosi così 15 casi favorevoli su 36 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\ favorevoli}{\#\, casi\ possibili\ equiprobabili} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

e in definitiva

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.417 = 41.7\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.4167 = 41.67\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$* \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari a 8 facce numerate da 1 a 8? (Hanno la forma di ottaedro regolare).

SVOLGIMENTO
Dei 64 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6	3+7	3+8
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6	4+7	4+8
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6	5+7	5+8
6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6	6+7	6+8
7+1	7+2	7+3	7+4	7+5	7+6	7+7	7+8
8+1	8+2	8+3	8+4	8+5	7+6	8+7	8+8

con somme rispettive

02	03	04	05	06	07	08	09
03	04	05	06	07	08	09	10
04	05	06	07	08	09	10	11
05	06	07	08	09	10	11	12
06	07	08	09	10	11	12	13
07	08	09	10	11	12	13	14
08	09	10	11	12	13	14	15
09	10	11	12	13	14	15	16

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3, 5, 7, 11, 13) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16) rispettivamente

```
P P n P n P n n
P n P n P n n n
n P n P n n n P
P n P n n n P n
n P n n n P n P
P n n n P n P n
n n n P n P n n
n n P n P n n n
```

avendosi così 23 casi favorevoli su 64 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\, equiprobabili} =$$

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.359 = 35.9\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.3594 = 35.94\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

34 Concezioni soggettiva e assiomatica

34.1 Concezioni soggettiva della probabilità

La definizione soggettiva della probabilità (di Leonard Jimmie Savage e Bruno de Finetti) la diamo implicitamente attraverso questo esempio. Supponiamo che io possa scommettere sulla vittoria della squadra dei Vispi Volpini della prima partita del campionato e abbia queste idee:
Metto 100 euro e se vince prendo 300 euro: accetto felicissimo
Metto 100 euro e se vince prendo 200 euro: accetto contento
Metto 100 euro e se vince prendo 126 euro: per un pelo accetto
Metto 100 euro e se vince prendo 125 euro: sono indifferente
Metto 100 euro e se vince prendo 124 euro: per un pelo ma rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 110 euro: rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 100 euro: ci mancherebbe!
Questo significa che io ritengo che la probabilità di vittoria della squadra è $\frac{4}{5} = 0.8 = 80\%$. In pratica nell'ipotesi intermedia in cui non ho nè interesse a scommettere nè a non scommettere ritengo che se l'evento si verificasse 5 volte, 4 volte la squadra vincerebbe e io avrei preso $4 \cdot 125$ euro cioè 500 euro, esattamente quanto avrei speso nelle 5 scommesse. È ovvio che a 126 euro considero vantaggiosa la scommessa (seppure di poco).
Il pareggiarsi della spesa con l'ipotetica vincita definisce la *probabiità soggettiva* che io attribuisco al verificarsi dell'evento considerato.
La formula è

$$p = \frac{costo\, della\, scommessa}{vincita\, nel\, caso\, indifferente}.$$

Nell'esempio $\frac{100}{125}$.
Con questa definizione, un esperto attuario può fissare il premio assicurativo per un evento per il quale non sia disponibile una casistica significativa, come l'immissione sul mercato di un farmaco da parte di una nuova azienda, o un viaggio su Marte; o esiste una casistica assolutamente non omogenea.

34.2 Concezione assiomatica della probabilità

La definizione assiomatica della probabilità è astratta e con definizioni e assiomi crea la probabilità, interpretabile in modo del tutto compatibile con le altre concezioni:

• Ω: *evento certo* (p.es. "il dado fa 1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6").
• $\mathbb{A}$: *σ-algebra degli eventi*, un sottoinsieme delle parti di Ω (cioè di $\mathbb{P}(\Omega)$) sufficientemente regolare, precisamente tale che:
 ⋄ $\emptyset, \Omega \in \mathbb{A}$
 ⋄ $(\forall A \in \mathbb{A})\ A^C \in \mathbb{A}$ (dove A^C è il complementare di A)
 ⋄ $(\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathbb{A})\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.
(In $\mathbb{A}$ stanno tutti gli eventi *ragionevolmente* considerabili).
• La *[funzione] probabilità* $P : \mathbb{A} \to [0, 1]$ tale che
 ⋄ $P(\Omega) = 1$ (l'evento certo ha probabilità 100%)
 ⋄ $P(A_1 \cup^* A_2 \cup^* ... \cup^* A_n \cup^* ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$
dove $\cup^*$ indica l'unione disgiunta cioè con intersezione vuota.
• Lo *spazio di probabilità*: la terna ordinata $(\Omega, \mathbb{A}, P)$.
• Gli *eventi indipendenti* sono nella nostra trattazione elementare un concetto primitivo, e contemporaneamente sono caratterizzati da $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
• Si dimostra (sono teoremi) che valgono, $\forall A, B, A_1, A_2 \dots \in \mathbb{A}$:
 ⋄ $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$
 ⋄ $P(A^C) = 1 - P(A)$ da cui in particolare $P(\emptyset) = 0$
 ⋄ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 ⋄ $P(A \cup^* B) = P(A) + P(B)$
 ⋄ $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \dots)$
 ⋄ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
 ⋄ Ls Formula di Bayes, che vedremo.

Per esempio uno spazio di probabilità si ottiene con un dado regolare, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dove $\{1\}$,...,$\{6\}$ sono gli *eventi semplici*, possiamo fissare molto opportunamente $\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega)$, e la funzione P vale costantemente $\frac{1}{6}$. Per esempio $A := \{2, 3, 5\}$ è l'evento

"esce 1 o 3 o 5", ovvero "[esce] [un numero] dispari".
Si calcolino A^C, $P(A^C)$, $\{1,2,6\}^C =: B$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B)$. Poi con lo stesso Ω si trovino altri 2 spazi di probabilità.
ESERCIZIO$_\mu$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ $^{\%}$ Supponiamo che in una certa popolazione la mutazione RX1vis si presenti con probabilità 25% e, indipendentemente, la mutazione RS2vol con probabilità 40%. Che probabilità c'è che un soggetto di quella popolazione abbia la RX1vis e non abbia la RS2vol?

SVOLGIMENTO

$$P((\text{RX1vis})\,\mathit{et}\,(\mathit{non}\,\text{RS2vol})) =$$

l'avere o non avere la RS2vol è indipendente dall'avere o non avere la RX1vis

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot P(\mathit{non}\,\text{RS2vol}) =$$

con l'evento complementare

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot (1 - P(\text{RS2vol})) =$$

coi dati numerici

$$= 0.25 \cdot (1 - 0.4) =$$

in definitiva

$$\boxed{0.15 = 15\%}$$

Nota. Il seguente esercizio richiede una calcolatrice con 8 cifre, o una moltiplicazione con carta e penna.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ $\approx$ % Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità 7%. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probabilità c'è che andando 4 volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso?

SVOLGIMENTO

$$P(punto\,al\,1^{\wedge}\,viaggio) = ... = P(punto\,al\,4^{\wedge}\,viaggio) = 7\% = \frac{7}{100}$$

Evento complementare:

$$P(nonpuntoal1^{\wedge}viaggio) = ... = P(nonpuntoal4^{\wedge}viaggio) = 93\% = \frac{93}{100}$$

Evento composto:

$$P(mai\ punto\ nei\ 4\ viaggi) = \frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100} = \left(\frac{93}{100}\right)^4$$

Evento complementare:

$$P(punto\ almeno\ 1\ volta\ nei\ 4\ viaggi) = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{93^4}{100^4} = 1 - \frac{74\,805\,201}{100\,000\,000} = \frac{100\,000\,000 - 74\,805\,201}{100\,000\,000} =$$

$$\boxed{\frac{25194799}{100\,000\,000} \approx 0.252 = 25.2\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in metropolitana, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di entrare in contatto coi pidocchi, con probabilità p. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probablità c'è che in 10 viaggi in metropolitana – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona sia entrata in contatto coi pidocchi?

SVOLGIMENTO

$$P(contatto\,nel\,1^{\wedge}\,viaggio) = ... = P(contatto\,nel\,10^{\wedge}\,viaggio) = p$$

Evento complementare:

$$P(noncontattonel1^{\wedge}viaggio) = ... = P(noncontattonel10^{\wedge}viaggio) = 1-p$$

Evento composto:

$$P(nessun\,contatto) = (1-p)\cdot ... \cdot(1-p) = (1-p)^{10}$$

Evento complementare:

$$\boxed{P(almeno\,un\,contatto) = 1-(1-p)^{10}}$$

35 Probabilità combinatoria, prima parte

Il Calcolo Combinatorio ricorre nella Farmacia in almeno 2 ambiti.

• Il Calcolo Combinatorio ricorre nella chimica dei farmaci. Una rivista scientifica internazionale è Combinatorial Chemistry Link->. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> Spesso il ricercatore si imbatte in un composto che dimostra una certa attività biologica, che però non è sufficiente per garantire il successo clinico (e commerciale) del composto. A questo punto inizia un processo di screening "quasi casuale": vengono preparati e testati tutti i possibili composti che mantengono una analogia strutturale per il nucleo fondamentale, ma ne differiscono per i sostituenti collegati.

• Il Calcolo Combinatorio ricorre anche nelle questioni di elencazione, catalogazione e archiviazione dei prodotti e delle attività di una farmacia. Per esempio il Calcolo Combinatorio risponderà alla domanda: in quanti modi posso ordinare 3 prodotti su una brochure pubblicitaria? Sono 6 modi, possono essere elencati facilmente, e poi assoggettati a considerazioni sanitarie e/o di marketing, per sceglierne uno per la stampa della finale.

35.1 Probabilità combinatoria elementare

La **probabilità combinatoria elementare** si basa su 2 cose:

• la concezione classica della probabilità, quella della probabilità come *casi favorevoli / casi possibili*;

• il calcolo combinatorio, costituito da metodi per determinare il numero di elementi di un insieme finito E, cioè la sua cardinalità, indicata con $\#E$ (e da altri con card$E$ o $|E|$); conteggiare gli elementi degli insiemi finiti adesso serve proprio per contare i casi favorevoli e i casi possibili di cui sopra.

In questa trattazione elementare, trattiamo il **calcolo combinatorio** – che di per sè sarebbe una matematica elementare – in 2 porzioni:

• una parte l'abbiamo già trattata nell'insiemistica: in particolare

◦ prodotto cartesiano

◦ insieme delle parti

◦ cardinalità dell'unione

• un'altra parte adesso, in questa lezione e nella succssiva, nel contesto del calcolo delle probabilità:

◦ elencazione con conteggio

◦ permutazioni

◦ combinazioni,

◦ disposizioni,

◦ dismutazioni$^{\nearrow}$.

Per esempio col prodotto cartesiano, e l'elencazione con conteggio, avevamo trovato la probabilità che la somma dei punteggi di 2 dadi sia un numero primo:

$$p = \frac{\#\,casi\ favorevoli}{\#\,casi\ possibili\ equiprobabili} = \frac{15_{\leftarrow elencazione\ con\ conteggio}}{6 \times 6_{\leftarrow prodotto\ cartesiano}}$$

$$= \frac{5}{12}$$

L'*elencazione con conteggio* è adeguata quando è più semplice dell'applicazione di formule. Per esempio per determinare quanti sono i numeri primi minori di 25

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \qquad \to \textit{ sono } 9$$

o (col computer) di $10\,000$.
Si troverà facilmente, elencandoli, che i numeri primi ≤ 92 sono 24: ci sono allora $92 - 24 - 1 = 67$ elementi chimici con numero atomico maggiore di 1 e non primo (i quali, allora, in via del tutto ipotetica – non vogliamo qua fare chimica nucleare – potrebbero dare tutti i loro protoni ad atomi più piccoli e uguali fra loro).
Nota banale di algebra. Il calcolo $92-24-1$ si fa $(92-24)-1 = 68-1$ e dà 67, non $92-(24-1)$ che dà un valore che non c'entra. Questo succede nonostante in $\mathbb{R}$ valga la proprietà associativa dell'addizione $(a + b) + c = a + (b + c)$ perchè non vale quella della sottrazione. (Il meno indica sia passaggio all'opposto che sottrazione, per esempio $3 + (-2)$ viene usualmente scritto $3 - 2$, dove il meno ha tutt'altro significato, e questo non crea problemi purchè si facciano le operazioni nell'ordine in cui sono scritte).

Un esempio applicato al Calcolo delle Probabilità. La probabilità che un numero primo minore di 25 scelto a caso sia dispari è

$$\frac{8}{9} \approx 0.889 = 88.9\%$$

perchè $\#\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} = 9$ e solo il 2 non è dispari, restandone 8.

Note sul prodotto cartesiano.
Osservato che il prodotto cartesiano di 2 insiemi finiti A e B ha (ovviamente) cardinalità

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

e con 3 insiemi finiti

$\#(A \times B \times C) = \#A \cdot \#B \cdot \#C$ e similmente con n insiemi

osserviamo che parallelamente, per così dire, se un'azione si può fare in n modi e una seconda azione si può fare in m modi, la sequenza delle 2 azioni si può fare in $n \cdot m$ modi. E la sequenza di 3 azioni in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ modi, eccetera. Vediamo un esempio.

ESERCIZIO$_\mu$ Quante sono le possibili schedine classiche, quelle di 13 risultati 1, 2 o X?

SVOLGIMENTO

L'1-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X
il 2-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X
...
il 13-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X.

In tutto 3^{13} modi cioè

$$1\,594\,323.$$

ESERCIZIO$_\mu$ Supponiamo in via del tutto ipotetica che una certa molecola possa completarsi in un punto con uno qualunque fra gli elementi con numero atomico da 58 a 71 (lantanoidi diversi dal lantanio) e in altro punto con uno qualunque fra in primi 5 di essi. (Senza voler qua fare farmacologia, si pensi comunque ai *farmaci chelanti*). In quanti modi può completarsi la molecola? E se aggiungiamo l'ipotesi che in ogni caso non si completa con due atomi uguali?

SVOLGIMENTO

I lantanoidi diversi dal lantanio, con numeri atomici

$$58, 59, ..., 70, 71$$

sono $71 - 57$ cioè 14.

La coppia ordinata di atomi atta a completare la molecola può costituirsi (prodotto cartesiano) in $14 \cdot 5 =$

$$\boxed{\text{a) 70 modi}}$$

Se aggiungiamo l'ipotesi che la molecola non può completarsi con due atomi uguali, dobbiamo escludere 5 casi, restandone $70 - 5$ cioè

$$\boxed{\text{b) 65 modi}}$$

35.2 Cardinalità dell'unione; permutazioni

nel 2019 questo paragrafo va assolutamente nella lezione 5

Cardinalità dell'unione. Per gli insiemio finiti, dei quali soli ora ci occupiamo, vale (teorema) questa (ovvia: si disegnino i diagrammi di Eulero-Venn) formula (che lega le cardinalità dell'unione e dell'intersezione):

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

In particolare se A e B sono disgiunti (l'intersezione ha 0 elementi) la cardinalità dell'unione è la somma della cardinalità.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
* Supponiamo che di 116 individui
con anticorpo VISα oppure VISγ, (FRASE CHE MANCAVA QUANDO È STATO FATTO QUESTO ESERCIZIO IN AULA LA PRIMA VOLTA)73 hanno l'anticorpo VISα, e 53 l'anticorpo VISγ. Quanti hanno entrambi gli anticorpi?

SVOLGIMENTO

Sappiamo che per gli insiemi finiti la numerosità ovvero cardinalità degli insiemi unione e intersezione vale

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

cioè equivalentemente vale

$$\#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$$

e ora con

$A = \{\text{soggetti con VIS}\alpha\}$
$B = \{\text{soggetti con VIS}\gamma\}$
si ha

$$\text{numero di soggetti con entrambi gli anticorpi} =$$
$$= \#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B) =$$
$$= 73 + 53 - 116 =$$
$$\boxed{10}$$

Permutazioni. Ogni ordinamento totale di un insieme finito non vuoto A si dice *permutazione* degli elementi di A. Esso viene identificato con l'unica $(\#)$-upla di elementi di A che "rappresenta" quell'ordinamento totale. Per esempio dall'unica 5-upla – come (b, d, a, e, c) – che rappresenta un determinato ordinamento totale di A se esso ha 5 elementi.
Il numero delle permutazioni di un insieme di n elementi si indica talvolta con P_n e si pone anche $P_0 := 1$.
Il numero delle permutazioni di un insieme di n elementi è dato dal *fattoriale*$^{\uparrow}$ di n, che vale 1 se $n = 0$ e altrimenti $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$:

$$P_n = n!\,.$$

Esempio. In quanti ordini diversi si possono mettere in un contenitore di acqua 8 sostanze chimiche diverse?
Che probabilità c'è di ordinarle in un particolare fissato modo mettendole a caso?

È un problema di permutazioni, dell'insieme $\{x_1, ..., x_8\}$ o più semplicemente $\{1, ..., 8\}$ delle sostanze considerate, che ha 8 elementi. Gli elementi si possono riordinare in $8! = 40\,320$ modi. La probabilità è $1/43\,320 \approx 0.0000231 = 0.00231\%$
Esercizio. In quanti modi diversi si possono allineare 4 prodotti farmaceutici su un espositore?

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Gli *eventi indipendenti* sono nella nostra trattazione elementare un concetto primitivo, e contemporaneamente sono caratterizzati da

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

36 Probabilità combinatoria, seconda parte

36.1 Dismutazioni

Si dice *dismutazione* (o *permutazione completa* o *sconvolgimento*) di un insieme ogni sua permutazione in cui tutti gli elementi cambiano posizione. (Si immaginino degli studenti alle loro sedie, si alzano e "rimescolano", si siedono, ma nessuno sulla sedia che aveva prima). Per esempio per l'insieme ordinato { 1, 2, 3, 4, 5 } ovvero per la 5-upla ordinata $(1, 2, 3, 4, 5)$, due permutazioni sono $(4, 5, 1, 2, 3)$ e $(2, 5, 1, 4, 3)$, ma solo la prima è una dismutazione. Per il numero N di dismutazione di un insieme di n elementi, è (teorema) $N \approx \frac{n!}{e}$; l'errore assoluto è sempre < 0.5; e per $n > 5$ l'errore relativo è minore dello 0.05%, che in questo caso possiamo considerare una buona approssimazione, e $\to 0$ per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N}{n!/e} = 1 \quad \text{ovvero } N \simeq \frac{n!}{\mathrm{e}}$$

in cui $\simeq$ è il simbolo ISO per l'*approssimazione asintotica.*

Esempio. Si abbiano molte persone, e altrettanti foglietti coi loro nomi. Li distribuiamo a caso a quelle persone. Che probabilità c'è che nessuno riceva il foglietto col suo nome? E che qualcuno lo riceva? Ovviamente se non sappiamo il numero n di persone, non possiamo dare una risposta esatta. Tuttavia se, come d'usuale, ci accontentiamo di un valore ben approssimato della probabilità, in pratica possiamo, purchè n, che è stato garantito grande, sia ≥ 5 o meglio > 5, e sorprendentemente la risposta non dipende da quel numero esatto di persone. Consideriamo l'evento che nessuno riceva il foglietto con il suo nome. Così per il primo quesito i casi possibili sono le permutazioni e i casi favorevoli sono le dismutazioni, e allora

$$p \approx \frac{n!/e}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0.368 = 36.8\% \qquad \text{(}\textit{viene questo } \forall n{>}5, \textit{ e per } n{=}5 \textit{ viene } {\approx}0.367\text{).}$$

E allora la probabilità che qualcuno riceva il foglietto col suo nome (evento complementare) è $\approx 0.632 = 63.2\%$.

36.2 Combinazioni semplici e disposizioni semplici

Consideriamo un insieme $n = 7$ elementi e scegliamone $k = 3$. In quanti modi si può fare? La risposta è data dalle *combinazioni (semplici)* che ora vedremo, ma se anche riteniamo ordinata la terna scelta, si può fare in molti più modi ($3! = 6$ volte tante) e sono le *disposizioni (semplici)*.
Combinazioni semplici. Dato un insieme E di $n > 0$ elementi (cioè non vuoto) e un numero naturale k tale che $0 \le k \le n$, i sottoinsiemi di E di k elementi si chiamano *combinazioni (semplici)* di n oggetti a k a k (per esempio a 3 a 3) e il numero di esse si chiama *coefficiente binomiale*, e si indica con $C_{n,k}$ o $\binom{n}{k}$ e si pone per convenzione $C_{n,0} := 1$. Questo numero si calcola col Triangolo di Tartaglia oppure con una formula di esso

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Numeri enormi li lasceremo indicati, p. es. $\frac{365!}{23!\,342!}$ *per* $\binom{365}{23}$.

Disposizioni semplici. Dato un insieme E di $n > 0$ elementi (cioè non vuoto) e un numero naturale k tale che $0 \le k \le n$, i sottoinsiemi <u>ordinati</u> di E di k elementi si dicono *disposizioni (semplici)* di n oggetti a k a k (per esempio a 3 a 3), e il numero di esse si indica con $D_{n,k}$ e si pone per convenzione $D_{n,0} := 1$.
è (teorema)

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

Mnemonici:

co mbinazioni... **co**n $k!$ e **co**sì **co**mpare numero **co**rto

di spo sizioni... **di**menticati $k!$ e **dispo**ni ordinatamente

Esempi. 3 elementi ordinati si possono scegliere da 7 in $\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5\cdot6\cdot7 = 210$ modi, e senza riguardo all'ordine in $\binom{7}{3} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35$ modi. (Riordinabili in $3!\cdot35 = 210$ modi). Si provi a elencare i 35 modi. (Si fissi per esempio $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

Esercizio. In quanti modi si possono scegliere 4 elementi chimici diversi della tavola periodica che ha 92 elementi? E quante sono le quaterne ordinate di 4 elementi?

Per il primo quesito, sono

$$\binom{92}{4} = \frac{92!}{4!\,(92-4)!} = \frac{92!}{4!\,88!} = \frac{92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$
$$= 23 \cdot 91 \cdot 15 \cdot 89 = 2\,794\,155$$

(Si provi con Wolframalpha `Binomial[92,4]`).
Per il secondo quesito, sono

$$\binom{92}{4} = \frac{92!}{(92-4)!} = \frac{92!}{88!} = 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 =$$
$$= 67\,059\,720$$

Esercizi. In quanti modi si possono scegliere 23 giorni diversi del 2018? Con o senza significato, quante "parole" di 4 lettere si possono comporre con le lettere C, R, O, N, I, S, T, A?

●●●

Esempio sulle combinazioni semplici. Che probabilità c'è di vincere giocando una cinquina su una ruota del lotto? Per essere sicuri di vincere giochiamo 1 euro su ciascuna di esse. Quanto guadagniamo?
Di casi favorevoli ce n'è 1, e i casi possibili sono le combinazioni semplici di 90 oggetti a 5 a 5, che sono in numero di $\binom{90}{5}$, e allora la probabilità è

$$p = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\frac{90!}{5!(90-5)!}} = \frac{5!\,85!}{90!} = \frac{1 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 85}{1 \cdot \ldots \cdot 90} =$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90} = \frac{1}{86 \cdot 87 \cdot 22 \cdot 89 \cdot 3} = \frac{1}{43\,949\,268}\,.$$

Abbiamo speso 43 949 268 euro e 1 cinquina da noi giocata vince; poichè si vince 6 milioni di volte la posta, vinciamo 6 milioni di euro, con un guadagno di $-37\,949\,268$ euro. (Ciclopica perdita)$^{\nearrow}$.

Esempio sulle disposizioni semplici. Quanti sono i numeri esadecimali di 5 "cifre" (da 00000 a FFFFF) con le "cifre" tutte diverse?
è un problema di disposizioni semplici. Consideriamo i sottoinsiemi ordinati di { 0, 1,..., 9, A,..., F } di 5 elementi, che – in base al teorema – sono in numero di

$$D_{16,5} = \frac{16!}{(16-5)!} = \frac{16!}{11!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = 524\,160.$$

36.3 Triangolo di Tartaglia e potenza del binomio

(Evitando complesse definizioni formali, in questa trattazione elementare) il *Triangolo di Tartaglia* (o *di Pascal*, in ogni caso sostanzialmente noto ben prima di quegli Autori) è la *scrittura*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

variamente estesa con la Formula di Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(e cioè ogni numero è la somma dei 2 soprastanti, a parte gli 1 ai margini) dove n è il numero di riga a partire dalla 0-esima e k è la posizione nella riga a partire dalla 0-esima.

Il Triangolo di Tartaglia consente il calcolo dei *coefficienti binomiali* $\binom{n}{k}$ mediante sole somme. Ciò è utile sia nel problema delle combinazioni semplici che nella *potenza del binomio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{ovvero}$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

(si noti che nella seconda formula gli a e b nel secondo membro sono scambiati fra loro rispetto alla prima formula, come se là fosse scritto $a^{n-k}\, b^k$, ma è equivalente). I vari coefficienti dei monomi si trovano semplicemente sulla n-esima riga del Triangolo di Tartaglia (intendendo come 1-esima quella con due 1), per esempio (e si provi poi con la quinta potenza)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

• • •

Esercizio risolto. In un'urna sono contenute queste palline numerate: 6 bianche, 4 nere, 3 rosse e 7 verdi. Se si estrae 1 pallina, che probabilità c'è che sia verde? In quanti modi diversi si possono estrarre 5 palline in modo che si abbiano fra esse palline di tutti i colori? (Si noti che le palline sono distinguibili perchè sono numerate).

Svolgimento.

I casi favorevoli sono 7 e i casi possibili sono 20=6+4+3+7 e allora

$$p = \frac{7}{20} = 0.35 = 35\%.$$

Per avere tutti i 4 colori con 5 palline, uno e uno solo dei colori, indicati con b, n, r e v è ripetuto 2 volte:

$bnrvb: \binom{6}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$

$bnrvn: 6 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 6 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 7 = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

$bnrvr: 6 \cdot 4 \cdot \binom{3}{2} \cdot 7 = 6 \cdot 4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 7 = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$

$bnrvv: 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \binom{7}{2} = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3.$

In tutto $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (30 + 18 + 12 + 36) = 4032$.

Esercizi.

Che probabilità c'è che un numero < 10 sia primo? E < 25? E nei 2 casi, che sia quadrato? Triangolare? Pari?

37 Indipendenza e Formula di Bayes

37.1 Probabilità condizionata e indipendenza

Si definisce la *probabilità condizionata*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{25}$$

per la quale è apparsa conveniente l'interpretazione di probabilità che si verifichi B *sapendo* che si è verificato A. Per esempio con riferimeno a un dado (regolare)

$$\begin{aligned} P(\text{“}dispari\text{”}|\text{“}primo\text{”}) &= \frac{P(\text{“}dispari\text{”} \wedge \text{“}primo\text{”})}{P(\text{“}primo\text{”})} = \\ &= \frac{P(\{2,3,5\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \\ &= \frac{P(\{3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nel caso che sapere che si è verificato A non muti per noi la probabilità che si verifichi B, cioè $P(B|A) = P(B)$, si ottiene, da quest'equazione e dalla (25),

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

e quest'equazione definisce assiomaticamente il caso di 2 *eventi indipendenti*. E si estende a 3 o più eventi (ma la questione è delicata$^{\uparrow}$).

Per esempio

$$\begin{aligned} &P(\text{“la moneta dà testa”} \wedge \text{“il dado dà 4”}) = \\ &= P(\text{“la moneta dà testa”}) \cdot P(\text{“il dado dà 4”}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Fissiamo l'attenzione per esempio sullo *spazio di probabilità uniforme* $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ del lancio di 1 dado, con 6 *eventi semplici* di probabilità $\frac{1}{6}$, e $64 = 2^6$ eventi nella σ-algebra $\mathbb{A}$ delle parti di Ω:

$$\Omega := \{1,2,3,4,5,6\} \qquad P(k) = 1/6,\ k = 1, ..., 6$$

$$\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, ...\{6\}, \{1,2\}, ..., \{1,2,3,4,5\}, \Omega\}.$$

Per esempio $\{1,2\}$ è l'evento "esce 1" *vel* "esce 2"; $P(1,2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Naturalmente esistono spazi di probabilità finiti non uniformi, per esempio ottenuti con dadi truccati.

Oppure con riferimento a una diagnosi e/o trattamento farmacologico, e un fissato intervallo temporale (per esempio 5 anni), e comunque in un'ottica frequentista, con *scores* da 1=morte a 6=ottimamente, potremmo avere per esempio:

$3\% = P(morte)$	...
$5\% = P(molto\, male)$	.....
$12\% = P(male)$	....
$20\% = P(stabile)$	....
$40\% = P(bene)$	....
$20\% = P(ottimamente)$	....

(Si noti la forma più o meno a campana).

Calcoliamo per esempio

$$P(\text{"}migliora\text{"}) = P(\text{"}bene\text{"} \vee \text{"}ottimamente\text{"}) =$$

eventi disgiunti, somma delle probabilità:

$$= P(\text{"}bene\text{"}) + P(\text{"}ottimamente\text{"}) =$$

$$= 40\% + 20\% = 60\%.$$

Per 2 soggetti

$$P(\text{"}entrambi\ morti\text{"}) =$$

$$= P(\text{"}morte\ del\ 1^{\wedge}\ soggetto\text{"} \wedge \text{"}morte\ del\ 2^{\wedge}\ soggetto\text{"}) =$$

e nell'ipotesi di indipendenza

$$= P(\text{"}morte\ del\ 1^{\wedge}\ soggetto\text{"}) \cdot P(\text{"}morte\ del\ 2^{\wedge}\ soggetto\text{"}) =$$

$$= 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 = 0.09\%$$

(Poco meno dell'1 per mille). Ma se i soggetti sono legati affettivamente, l'ipotesi di indipendenza diventa alquanto inverosimile.

(La morte dell'uno in generale aumenta la probabilità di morte dell'altro a prescindere dalla terapia seguita).

Si noti che appena si esce dalla modellizzazione "perfetta" dei dadi e delle monete, si introducono inevitabilmente problematiche che poi di fatto si trasformeranno in incertezze nei risultati statistici. (Dove l'indipendenza, e la normalità gaussiana dei dati – che vedremo – sono spesso ipotesi implicite, di fatto imperfette).

Esistono anche spazi di probabilità infiniti, per i quali nessuna uniformità è possibile, e in cui nella realtà sensibile possiamo aspettarci che in generale tenderà a ricorrere una *distribuzione* in qualche modo *a campana* – eventualmente troncata da una parte.

Ricordiamo che $A \cap B$ è l'evento intersezione di 2 eventi A e B, per esempio, scrivendo in forma logica $\wedge$ ovvero *et*,

"*pari*" *et* "*primo*" $= \{pari\} \cap \{primi\} = \{2,4,6\} \cap \{2,3,5\} = \{2\}$.

Quei 2 eventi non sono indipendenti perchè

$$P(\{2,4,6\} \cap \{2,3,5\}) = P(2) = \frac{1}{6} \neq$$
$$\neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(\{2,4,6\}) \cdot P(\{2,3,5\}).$$

Sono indipendenti per esempio "pari" e "quadrato": si verifichi. Si trovi un'altra coppia di eventi indipendenti della stessa σ-algebra.
Si noti l'immediata (duplice) conseguenza della (25)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$

37.2 Formula di Bayes

Si dimostra (teorema) la Formula di Bayes: dati un $B \in \mathbb{A}$ e una partizione di Ω, cioè degli insiemi $A_1, \ldots A_n$ disgiunti con unione

Ω, vale

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$

$$i = 1, ..., n.$$

Anche la sola uguaglianza dei denominatori è interessante:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

e in particolare con $n = 2$, scrivendo A invece di A_1 ed essendo necessariamente $A_2 = A^C$ (avendosi una partizione) si ha la

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)$ (Legge delle Alternative)

Si faccia un disegno rappresentativo della situazione.

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
$* \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità $\frac{1}{n}$, con n un numero che per adesso non specifichiamo. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probabilità c'è che andando n volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso, per n molto grande, diciamo pure per n tendente all'infinito?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{punto al 1-esimo viaggio}) = ... = P(\text{punto all'}n\text{-esimo viaggio}) = \frac{1}{n}$$

Evento complementare:

$$P(\text{non punto al 1-esimo viaggio}) = ... = P(\text{non punto all'}n\text{-esimo viaggio}) = 1 - \frac{1}{n}$$

Evento composto:

$$P(\text{mai punto negli } n \text{ viaggi}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \quad (n\,volte)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Evento complementare:

$$P(\text{punto almeno 1 volta negli } n \text{ viaggi}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

e allora al limite per n tendente all'infinito

$$P(\text{punto almeno 1 volta negli } n \text{ viaggi con } n \text{ grandissimo}) \approx$$

$$\approx \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

e ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

e allora in conclusionela probabilità cercata vale

$$\boxed{1 - \tfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.632 = 63.2\%}$$

(Per esempio con $n = 10$ si ha $\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 0.651$).
Detto molto grossolanamente: se facendo una cosa si prende una malattia con probabilità $\frac{1}{n}$, facendo quella cosa n volte si prende la malattia con probabilità circa del 63%, supponendo l'indipendenza degli eventi ed n molto grande.

Esercizio$_\mu^f$ risolto. Un'urna U contiene 20 palline bianche e 40 nere, e un'urna V contiene 5 palline bianche e 6 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae a caso una pallina che risulta bianca. Che probabilità c'è che sia stata scelta l'urna U?

Svolgimento$_\mu$

$U : 20b + 40n$

$V : 5b + 6n$

A_1: "scelta a caso l'urna U"

A_2: "scelta a caso l'urna V"

B: "estratta a caso una pallina bianca".

A_1 e A_2 costituiscono una partizione dell'evento certo.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{60}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{60} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{11}} =$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $3 \cdot 11$

$$\frac{11}{11 + 5 \cdot 3} = \frac{11}{26} \approx 0.423 = 42.3\%.$$

(Osserviamo che allora con probabilità $\approx$ 58% era stata scelta l'urna V e questo riflette il fatto che là c'erano proporzionalmente più palline bianche: visto che è venuta una pallina bianca, più probabilmente avevamo scelto quell'urna).

Esercizio$_\mu$ Costruire e risolvere un esercizio analogo.

Esercizio risolto$_L$ Tre urne A, B e C contengono palline bianche e nere secondo lo schema

$$A : 2b + 2n \qquad B : 3b + 1n \qquad C : 1b + 3n.$$

Si estrae una pallina da A e si vede il colore:
• se è bianca la si mette in C e poi si estrae una pallina da C e la si mette in A;
• se è nera la si mette in B e poi si estrae una pallina da B e la si mette in A.
Qual è la probabilità di ripristinare la situazione iniziale?
Quali altri casi si possono avere e con quali probabilità?

come all'inizio
2/5 ↗○ A ○○●● B ○○○● C ○●●●
C ○○●●●
3/5 ↘● A ○●●● B ○○○● C ○○●●
nuovo caso I
B ○○○●
B ○○○● 1/2 ↗○ A ○●●
A ○○●●
C ○●●● 1/2 ↘● A ○○●
nuovo caso II
3/5 ↗○ A ○○○● B ○○●● C ○●●●
B ○○○●●
2/5 ↘● A ○○●● B ○○○● C ○●●●
come all'inizio
C ○●●●

Ripristino della soluzione iniziale: può avvenire in 2 modi, eventi disgiunti; ciascuno dei 2 addendi è un prodotto perchè corrispende ad eventi composti (cioè $\cap$ ovvero *et*) indipendenti; probabilità: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$.
Nuovi casi e loro probabilità, valendo le osservazioni soprastanti:
I: $(A : 1b + 3n;\ B : 3b + 1n;\ C : 2b + 2n)$, $p' = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$,
II $(A : 3b + 1n;\ B : 2b + 2n;\ C : 1b + 3n)$, $p'' = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$.
Esercizio$_\mu$ Costruire e risolvere un esercizio analogo.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Si dice *dismutazione* (o *permutazione completa* o *sconvolgimento*) di un insieme ogni sua permutazione in cui tutti gli elementi cambiano posizione. (Si immaginino degli studenti alle loro sedie, si alzano e "rimescolano", si siedono, ma nessuno sulla sedia che aveva prima). Per esempio per l'insieme ordinato { 1, 2, 3, 4, 5 } ovvero per la 5-upla ordinata $(1, 2, 3, 4, 5)$, due permutazioni sono $(4, 5, 1, 2, 3)$ e $(2, 5, 1, 4, 3)$, ma solo la prima è una dismutazione. Per il numero N di dismutazione di un insieme di n elementi, è (teorema) $N \approx \frac{n!}{e}$; l'errore assoluto $\left|N - \frac{n!}{e}\right|$ è sempre < 0.5; e per $n > 5$ l'errore relativo (nel senso di errore percentuale rispetto all'esatto) è minore dello 0.05%, che in questo caso possiamo considerare una buona approssimazione, e $\to 0$ per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N}{n!/e} = 1 \quad \text{ovvero } N \simeq \frac{n!}{\mathrm{e}}$$

in cui $\simeq$ è il simbolo ISO per l'*approssimazione asintotica*.

38 Sensibilità, specificità, predittività

In questa lezione si fa riferimento alla concezione frequentista della probabilità, che detto molto semplificatamente ci fa ritenere che se finora le cose sono andate in un certo modo in un gran numero di casi, continueranno ad andare così. Con riferimento alla Farmacologia: se 3 014 soggetti sono morti di 10 000 a 5 anni dal trattamento, riteniamo che la *probabilità* di morte sia circa del 30% (a 5 anni, con quel trattamento, in una popolazione *simile*).

Traiamo abbondantemente da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Con il termine sensibilità, in statistica, più precisamente nel campo della epidemiologia, si indica la capacità intrinseca di un test di screening di individuare in una popolazione di riferimento i soggetti malati. Essa è data dalla proporzione dei soggetti realmente malati e positivi al test (veri positivi) rispetto all'intera popolazione dei malati.

Un test sarà tanto più sensibile quanto più bassa risulterà la quota dei falsi negativi (cioè di soggetti malati erroneamente identificati dal test come sani). Un test molto sensibile, in definitiva, ci consente di limitare la possibilità che un soggetto malato risulti negativo al test.

Supponiamo che un test di screening dia come risultato solamente due opzioni: positivo al test e negativo. Essere positivi al test equivale ad essere ammalato secondo quel test, ma indagini diagnostiche successive possono rivelare l'effettiva malattia o meno.

Allora si otterranno 4 tipologie di osservati:
Sani Negativi (veri negativi)
Sani Positivi (falsi positivi) $\leftarrow$ *risultano avere la malattia; ma non ce l'hanno...*
Malati Positivi (veri positivi)
Malati Negativi (falsi negativi) $\leftarrow$ *non scoprono la loro malattia*

Rappresentabili così in tabella:
/////// MALATI - SANI
POSITIVI Veri + Falsi +
NEGATIVI Falsi - Veri -

La sensibilità del test verrà così calcolata:

$$S = \frac{V_+}{totaleMALATI} = \frac{V_+}{V_+ + F_-}$$

ESEMPIO
25 2
4 55
Si troverà 86.2%.

Con il termine specificità, in medicina, si indica la capacità di un test di dare un risultato normale (”negativo”) nei soggetti sani:

$$Sp = \frac{V_-}{totaleSANI} = \frac{V_-}{V_- + F_+}$$

ESEMPIO
25 2
4 55
Si troverà 96.5%.

Per predittività, in medicina, si intende la probabilità che un soggetto positivo ad un test di screening sia effettivamente malato. Il Valore Predittivo Positivo, che esprime numericamente la predittività, si calcola come quota di soggetti veri positivi sul totale dei positivi (veri e falsi positivi).

$$VPP = \frac{V_+}{totalePOSITIVI} = \frac{V_+}{V_+ + F_+}$$

ESEMPIO
25 2

4 55

Si troverà 92.6%.

Vediamo ora il caso in cui la prevalenza (frequenza) della malattia è decisamente minore, aumentando ad esempio di un fattore 100 le persone sane e lasciando inalterato il numero dei malati:

25 200

4 5500

Si troverà 11.1.

Esercizio. Relativamente all'ultima tabella, si calcolino prevalenza, sensibilità e specificità.

ESERCIZIO. (Tratto da Wikipedia, l'enciclopedia libera).

$\approx$ % Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	25	200
NEGATIVI	4	5500

Calcolare la predittività, ovvero il Valore Predittivo Positivo.

SVOLGIMENTO

Ricordando la definizione

$$\text{predittività} = \text{Valore Predittivo Positivo} = VVP =$$

$$= \frac{\text{veri positivi}}{\text{totale positivi}} = \frac{V_+}{V_+ + F_+}$$

ora abbiamo

$$VVP = \frac{25}{25+200} = \frac{25}{225} = \frac{1}{9} \approx$$

$$\boxed{\approx 0.111 = 11.1\%}$$

(Notiamo che il valore è piuttosto basso nonostante la specificità sia alta:

$$Sp = \frac{\text{veri negativi}}{\text{totale sani}} = \frac{V_-}{V_- + F_+} = \frac{5\,500}{5\,500 + 200} = \frac{5\,500}{5\,700} =$$
$$= \frac{55}{57} \approx 0.965 = 96.5\%$$

e questo è dovuto alla rarità della malattia nella popolazione considerata: circa una trentina di malati su poco più di 5 700 soggetti).

Nota di Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> Ossia la probabilità che un soggetto positivo al test sia effettivamente malato è pari all'11, 1%, che equivale a dire che il soggetto ha una probabilità dell'88, 9% di essere sano nonostante il test dica il contrario.

VIII – Variabili aleatorie discrete

39 Introduzione alle variabili aleatorie

39.1 Variabili aleatorie discrete e continue

Una funzione (che ad eventi semplici associa numeri reali)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

si chiama *variabile aleatoria* (purchè sia sufficientemente regolare(63) come sono tutte quelle che capitano a un livello elementare).

Per esempio una variabile aleatoria è il risultato del lancio di un dado, che potremo rappresentare così in 2 diversi casi:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{\textit{dado equilibrato}}_{\textit{ovvero regolare}} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{\textit{qua un certo}}_{\textit{dado truccato}}$$

Oppure il punteggio da 1 (morte) a 6 (ottimo) precedentemente considerato, esito (a 5 anni) di un intervento farmacologico.

Allora, finora, niente di nuovo nella sostanza, solo una diversa impostazione di fenomeni già considerati.

Un'altra variabile aleatoria, non così facilmente rappresentabile, è il peso in kg del primo bambino che nascerà vivo il 1 gennaio 2019, ora locale del luogo. Potrebbe essere 3.412..., 4.576..., eccetera. Ragionevolmente parlando, ognuno dei singoli valori ha probabilità 0: perchè mai il primo bambino dovrebbe pesare *esattamente* (con infiniti decimali) 3.18452785356... kg? Scriveremo

$\{X < 3.5\}$ intendendo l'evento $\{\omega | X(\omega) < 3.5\}$

$\{X \leq 3.5\}$ intendendo l'evento $\{\omega | X(\omega) \leq 3.5\}$

e similmente con $>$ e $\geq$.
E ancora con tutte le possibili variazioni di $<$ e $\leq$

63 Precisamente deve essere $\{\omega | X(\omega) \leq t\} \in \mathbb{A}$ per ogni t reale; questione sottile.

$$\{2.5 < X \leq 3.5\} \text{ intendendo l'evento } \{\omega | 2.5 < X(\omega) \leq 3.5\}$$

e per questi eventi, e altri del tipo $X \in I \subset \mathbb{R}$, con I insieme sufficientemente regolare, possiamo invece attenderci probabilità diverse da 0, per esempio
$P(X < 20) = 1$ il bambino peserà sicuramente meno di 20 chili,
$P(X < 0.1) = 0$ il bambino nato vivo non peserà meno di 100 g,
e – ipotizziamo qua – con probabilità 50% peserà meno di 2.1 kg: $P(X \leq 2.1) = 0.5$. E magari ancora $P(X \leq 2.5) = 0.7 = 70\%$.

La funzione $F_X(t) := P(X \leq t)$ si chiama *funzione di ripartizione* della variabile aleatoria X, *cumulative distribution function*.

Si grafichino le funzioni di ripartizione delle v.a. X e Y inizialmente considerate. Si osserverà che i salti hanno ampiezze pari alle corrispondenti probabilità. E questo è un fatto generale che succede per tutte le variabili aleatorie discrete.

La prima v.a., quella del dado, si dice *discreta* (cioè a valori "ben separati", anche eventualmente infiniti) e la seconda *continua*.

Si noti che, almeno per le variabili aleatorie continue, questa impostazione è veramente innovativa, e permette una valida trattazione di casi che altrimenti nel modo precedente si ridurrebbero semplicemente ad affermare che ogni singolo valore ha probabilità nulla

$$\forall\, t \quad P(X = t) = 0 \qquad (X \textbf{ v.a. continua})$$

e sommando o moltiplicando zeri non si otterrebbe niente di significativo.

Teorema (ovvio). $P\{a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, $\forall\, a, b$
e uno o entrambi gli estremi possono essere infiniti, e allora $F_X(x)$ andrà inteso nel senso del limite.

Anticipiamo che per le densità delle variabili aleatorie continue è

$$\boxed{\text{funzione di ripartizione:} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt} \tag{26}$$

$$\boxed{\text{(derivata della f.r.)} \quad F' = f \quad \text{(densità)}} \tag{27}$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

La funzione di ripartizione delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con F_X, F_Y, F_Z... ma anche con altri simboli: F, F_1, G...

La densità delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con f_X, f_Y, f_Z... ma anche con altri simboli: f, f_1, g...

Tipico delle densità riferite alla realtà sensibile è avere una forma "più o meno a campana". (Non succede proprio sempre).
La più "pura" delle campane è la *campana gaussiana* della densità normale standard

$$\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

che però ha il difetto che gli integrali di essa non si riescono a calcolare con le funzioni elementari.
Un modello più semplice di campana è la densità di Cauchy

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

per la quale si ha subito, integrando elementarmente,

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}(\arctan b - \arctan a)$$

per esempio

$$P(1 < X \leq \sqrt{3}) = \frac{1}{\pi}(\arctan \sqrt{3} - \arctan 1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-3}{3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{12} \approx 0.0833 = 8.33\%.$$ link a WolframAlpha ->

La forma più o meno a campana si ravviserà in generale anche nelle densità discrete, per le quali la fondamentale formula

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

prima detta, che vale sia per variabili aleatorie discrete che continue, darà somme o serie invece di integrali.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Naturalmente esistono spazi di probabilità finiti non uniformi, per esempio ottenuti con dadi truccati; oppure con riferimento a una diagnosi e/o trattamento farmacologico, e un fissato intervallo temporale (per esempio 5 anni), e comunque in un'ottica frequentista, con *scores* da 1=morte a 6=ottimamente, potremmo avere per esempio:

$3\% = P(morte)$ ...
$5\% = P(molto\, male)$ .....
$12\% = P(male)$ ....
$20\% = P(stabile)$ ....
$40\% = P(bene)$ ....
$20\% = P(ottimamente)$ ....

(Si noti la forma più o meno a campana).

Calcoliamo per esempio

$$P(\text{“}migliora\text{”}) = P(\text{“}bene\text{”} \vee \text{“}ottimamente\text{”}) =$$

eventi disgiunti, somma delle probabilità:

$$= P(\text{“}bene\text{”}) + P(\text{“}ottimamente\text{”}) =$$

$$= 40\% + 20\% = 60\%.$$

Per 2 soggetti

$$P(\text{“}entrambi\, morti\text{”}) =$$

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1^{\wedge}\ soggetto\text{”} \wedge \text{“}morte\ del\ 2^{\wedge}\ soggetto\text{”}) =$$

<u>e nell'ipotesi di indipendenza</u>

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1^{\wedge}\ soggetto\text{”}) \cdot P(\text{“}morte\ del\ 2^{\wedge}\ soggetto\text{”}) =$$

$$= 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 = 0.09\%$$

(Poco meno dell'1 per mille). Ma se i soggetti sono legati affettivamente, l'ipotesi di indipendenza diventa alquanto inverosimile. (La morte dell'uno in generale aumenta la probabilità di morte dell'altro a prescindere dalla terapia seguita).

Si noti che appena si esce dalla modellizzazione "perfetta" dei dadi e delle monete, si introducono inevitabilmente problematiche che poi di fatto si trasformeranno in incertezze nei risultati statistici. (Dove l'indipendenza, e la normalità gaussiana dei dati – che vedremo – sono spesso ipotesi implicite, di fatto imperfette).

Esistono anche spazi di probabilità infiniti, per i quali nessuna uniformità è possibile, e in cui nella realtà sensibile possiamo aspettarci che in generale tenderà a ricorrere una *distribuzione* in qualche modo *a campana* – eventualmente troncata da una parte.

40 Variabili aleatorie discrete

Data una v.a. discreta, cioè con valori "ben separati", come per esempio la X e la Y della lezione precedente, o queste

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}^{\leftarrow infiniti\ valori\ possibili\ ma\ staccati}_{\leftarrow qua\ si\ forma\ una\ serie\ geometrica}$$

individuiamo dei *valori* x_k, in numero finito o anche infiniti ma comunque "ben separati" (non necessariamente interi) e corrispondentemente le loro probabilità $p_k := P(v.a. = x_k)$:

$$X := \begin{pmatrix} x_1\ x_2\ x_3\ \dots\ x_k\ [\dots] \\ p_1\ p_2\ p_3\ \dots\ p_k\ [\dots] \end{pmatrix}^{\leftarrow fra\ le\ quadre\ possono\ esserci\ numeri,\ se\ i}_{valori\ sono\ infiniti,\ oppure\ no\ nell'altro\ caso}$$

e ovviamente deve essere, nel senso di una somma o di una serie,

$$somma\ su\ tutti\ gli\ indici\rightarrow \sum_k p_k = 1 \qquad (esistono\ serie\ con\_somma\ 1, non\ solo\ geom.)$$

La funzione di ripartizione $F_X(t) := P(X \leq t)$ di una v.a. discreta X è una *funzione a scala (step function)* costante fra x_{k-1} e x_k, con salti pari a p_k in x_1, x_2,...,x_k... e "pallini pieni" a sinistra (continuità a sinistra).

Da adesso consideriamo solo valori interi; allora $p_k = P(v.a. = k)$. La funzione

$$p_k := \begin{cases} P(X = k) & se\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

si chiama ***densità*** della variabile aleatoria X. Tenderemo a usare la lettera p coi pedici per le probabilità , mentre per i valori della v.a. possiamo usare x_1, x_2... per una v.a. X e y_1, y_2... per una v.a. Y, eccetera. O anche x_0, x_1... iniziando da 0, o da altro numero, a seconda dei casi. Per esempio per le X e W di prima

$$p_k = P(X = k) := 1/6, \quad k = 1, ..., 6$$

$$p_k = P(W = k) := 1/2^k, \quad k = 1, 2, 3...$$

Le densità si rappresentano graficamente coi bar chart.

40.1 Alcuni esempi di variabili aleatorie discrete

Esempio$_{\mu}$ (sulla notazione "binomiale" delle variabili aleatorie discrete).
Per una v.a. a 3 valori con $p_1 = \frac{1}{\pi}$ e $p_2 = \frac{1}{\pi^2}$ determinare p_3.
Si tratta di trovare l'unico numero incognito p_3 in

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi^2} & p_3 \end{pmatrix}$$

e da $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + p_3 = 1$ $\qquad\leftarrow$ somma 1 delle probabilità
segue subito $p_3 = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0.5804 = 58.04\%$.

Il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1,6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *"con legge"* e il simbolo $\mathbb{U}\{1,6\}$ lo leggeremo *"con legge uniforme discreta di parametri 1 e 6"*:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \ X \sim \mathbb{U}\{1,6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0,1\} \text{ rappresenta una moneta } \textit{equilibrata}.$$

Esercizio$_{\mu}$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0,1\}$ e $\mathbb{U}\{1,6\}$.

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev'essere $0 \leq p \leq 1$) ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1,2,3... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

per esempio con $p := \dfrac{1}{2}$ si ha quella di prima $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & ... & \frac{1}{2^{k-1}} & ... \end{pmatrix}$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha } \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \; ... & k & ... \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \; ... & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & ... \end{pmatrix}$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $Geom_1\left(\frac{1}{2}\right)$, la variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{1}{2}$ (simbologia per nulla standard purtroppo).

Osservazione. La probabilità di "$X = h \ vel\ X = k$", con $h \neq k$, essendo eventi disgiunti, è la somma delle 2 probabilità:

$$P(X\!=\!h\ \ vel\ \ X\!=\!k) = P(X\!=\!h) + P(X\!=\!k)$$

e similmente con 3 o più valori diversi, e questo vale per le v.a. discrete con qualunque distribuzione.
Per esempio per la v.a. W considerata all'inizio

$$P(W = 2 \vee W = 3) = P(W\!=\!2) + P(W\!=\!3) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}$$

Nella prossima Lezione vedremo anche la **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0**, e vedremo meglio le variabili aleatorie uniformi discrete.

41 Variabili aleatorie uniformi e geometriche

In questa lezione approfondiremo le variabili aleatorie uniformi e geometriche accennate nella lezione precedente.

Una **variabile aleatoria uniforme discreta** di parametri interi a e b ha n valori interi a, $a+1$, $a+2$,...,$b = a+n-1$, con le corrispondenti probabilità tutte uguali $p_k = \frac{1}{n}$ per $k = 1, ..., n$, e la sua distribuzione ovvero legge verrà indicata con $\mathbb{U}\{a, b\}$.
Per esempio il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *"con legge"*:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \ X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0, 1\} \text{ rappresenta una moneta } \textit{equilibrata}$$

Ecco un'altra, $\sim \mathbb{U}\{a, b\}$ con $a=-2$ e $b=4$ e allora $n=b-a+1=7$:

$$Y := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \ Y \sim \mathbb{U}\{-2, 4\}.$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0, 1\}$ e $\mathbb{U}\{1, 6\}$.

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$)

$$X \sim Geom_1(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

per esempio con $p := \dfrac{1}{2}$ si ha quella di prima $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & ... & \frac{1}{2^{k-1}} & ... \end{pmatrix}$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \ldots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & \ldots \end{pmatrix}$$

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0** di parametro p (e dev'essere $0 \leq p \leq 1$)

$$X \sim Geom_0(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 0,1,2... con densità

$$p_k = p(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

$$\text{per esempio con } p := \frac{1}{2} \text{ si ha} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \ldots & \frac{1}{2^k} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \ldots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} & \ldots \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$* \approx {}^{\%}$ Per una variabile aleatoria X geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{3}$ calcolare

$$P(X \geq 3).$$

SVOLGIMENTO.

$$P(X \geq 3) =$$

Con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(X < 3) =$$

la X è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori < 3

$$= 1 - P(X = 1 \vee X = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2)\big) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{3}$

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{1-1} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9-3-2}{9}$$

e in conclusione

$$\boxed{\tfrac{4}{9} \approx 0.444 = 44.4\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018 \neq}$
$* \approx \%$ Si consideri un'entità biologica (come batteri, virus, corpuscoli sanguigni...) che da quando si forma, poi ha una vita (in giorni, interi) che è pari a 7 + una variabile aleatoria geometrica X iniziante da 0 di parametro $\frac{1}{2}$. (Quindi può vivere 7 giorni, 8 giorni, 9 giorni... eccetera, con probabilità via via sempre più piccole).
Che probabilità ha di vivere un numero pari di giorni?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{vive un numero pari di giorni}) = P(7 + X \text{ è pari}) =$$

$$= P(X \text{ è dispari}) =$$

$$= P(X \text{ è 1 oppure 3 oppure 5 oppure 7...}) =$$

più formalmente

$$= P(X = 1 \vee X = 3 \vee X = 5 \vee X = 7 \vee ...) =$$

e trattandosi di eventi disgiunti

$$= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + ... =$$

ricordando la densità $p_k = p\,(1-p)^k$ per $k = 0, 1, 2...$ della variabile aleatoria geometrica di parametro p iniziante da 0, nel nostro caso $\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})^k$,

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$

dove si riconosce la serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ (perchè ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...ar^n + ...$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ $* \approx \%$ Per una variabile aleatoria geometrica Z iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{4}$ calcolare

$$P(Z > 2).$$

SVOLGIMENTO

$$P(Z > 2) =$$

con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(Z \leq 2) =$$

la Z è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori ≤ 2

$$= 1 - P(Z = 1 \vee Z = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(Z = 1) + P(Z = 2)\big) =$$

con la notazione consueta per la densità geometrica iniziante da 1

$$= 1 - (p_1 + p_2) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{4}$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1-1} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} = 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16 - 4 - 3}{16}$$

e in conclusione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.5625 = 56.25\%}$$

o con minore ma comunque accettabile precisione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.563 = 56.3\%}$$

Esempi ed esercizi

Esempio$_{\mu}^{f}$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{0,7\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0,7\}.$$

Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. U del soprastante esempio.

Esempio$_{\mu}^{f}$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{-3,1\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$V := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{-3,1\}.$$

Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. V del soprastante esempio.

Esercizio. Determinare la v.a. $Z \sim \mathbb{U}\{-4,2\}$ e poi calcolare $P(Z \geq 1)$, $P(Z > 1)$, $P(Z \leq 1)$, $P(Z \geq -\pi)$, $P(Z \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq Z < 1)$, $P(Z^2 = 1)$, $P(Z^2 \leq 1)$. [L'ultime vale $\frac{3}{7}$].

Esercizio. Determinare le v.a. geometriche dei 2 tipi, di parametri $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, e verificare le somme delle loro serie.

Esercizi$_{\mu}^{f}$ Rappresentare graficamente densità e funzioni di ripartizione delle v.a Z e W della lezione 40. Calcolare $P(W < 2)$, $P(W > 2)$, $P(W \geq 4)$, e con le serie $P(W > 100)$ e $P(W < 100)$.

Esercizi. Per una v.a. a 3 valori con $p_3 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $p_2 = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ determinare p_1. Per una v.a. A a 4 valori 0, 1, 2, 3 con $p_1 = \frac{1}{7}$ $p_2 = \frac{1}{11}$ e $p_0 = \frac{1}{5}$ determinare p_3, e poi $P(A \geq 1)$, $P(A > 1)$, $P(A \leq 1)$, $P(A \geq -\pi)$, $P(A \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq A < 1)$, $P(A^2 \leq 1)$, $P(A \neq 1)$.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Esempio$_\mu$ (sulla notazione "binomiale" delle variabili aleatorie discrete).
Per una v.a. a 3 valori con $p_1 = \frac{1}{\pi}$ e $p_2 = \frac{1}{\pi^2}$ determinare p_3.
Si tratta di trovare l'unico numero incognito p_3 in

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi^2} & p_3 \end{pmatrix}$$

e da $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + p_3 = 1 \qquad \leftarrow$ somma 1 delle probabilità
segue subito $p_3 = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0.5804 = 58.04\%$.

42 Variabili aleatorie binomiali

Si dice che una variabile aleatoria X è binomiale di parametri n e p (e dev'essere n intero ≥ 1 e $0 \leq p \leq 1$) e si scrive $X \sim B(n, p)$, se ha *densità binomiale*, cioè

$$p_k = P(X = k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, ..., n. \tag{28}$$

Rappresenta il numero k di teste che si ottengono in n lanci di una moneta che ha $P(testa) = p$. Più in generale, dà la probabilità di un certo numero k di successi in uno schema successo-insuccesso con n prove (indipendenti) avendo il successo probabilità p ad ogni prova.

Esempio$^f_\mu$ Con $n = 2$ prove si possono ottenere 0 o 1 o 2 teste (che adesso consideriamo successi) e se la moneta è equilibrata è

$P(k = 0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-0} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow P(0\,teste)$

$P(k = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow P(1\,teste)$

$P(k = 2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-2} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow P(2\,teste).$

Nota importante sulla forma a campana. Ecco il grafico della densità del soprastante esempio, che è un bar chart:

0 XXXX 0.25 qua c'è 1 solo caso su 4: CC cioè croce, croce
1 XXXXXXXX 0.5 qua ci sono 2 casi su 4: TC e CT
2 XXXX 0.25 qua c'è 1 solo caso su 4: TT cioè testa, testa

Si disegni la funzione di ripartizione. (Si osserverà che i 3 salti hanno ampiezza pari alle corrispondenti 3 probabilità, e questo è un fatto generale che succede per tutte le variabili aleatorie discrete, come già osservato.)

Si noti che nel soprastante bar chart si vede la distribuzione a campana molto più chiaramente che nel caso di un solo lancio

0 XXXXXX 0.5 (croce)
1 XXXXXX 0.5 (testa)

e si comincia a capire la natura della quasi onnipresente forma più o meno a campana: essa si forma in fenomeni composti da tante “cose che si sommano”, parlando in modo (necessariamente) impreciso.
Similmente le altezze degli individui di una popolazione, o qualunque altro parametro biometrico, biomedico o fisiologico, tenderanno ad avere una distribuzione con forma più o meno a campana, perchè ognuno di quei parametri è risultante da molti altri: per esempio in un individuo altissimo potranno aver concorso nella stessa direzione (“successi”) la genetica, l'alimentazione, concause fortuite imponderabili, e tale concordanza sarà rara mentre molti più individui avranno un'altezza media, e di nuovo pochi saranno bassissimi.
La forma a campana diventa ancora più evidente con 3 lanci di moneta, ovvero $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, e sempre più al crescere di n. Si faccia il bar chart di $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
Invece l'allontanarsi di p dal valore centrale $\frac{1}{2}$ causerà inizialmente asimmetria nella forma a campana (si faccia il bar chart relativo a $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$) ma al crescere di n l'asimmetria tenderà ad attenuarsi sempre più, rimanendo invece la centratura spostata rispetto alla metà $\frac{n}{2}$ di n: la campana tenderà a centrarsi intorno a $n\,p$.

Prova tu stesso. Leggiamo sul web[(64)] “Il termometro segna già$-41°$, ma da queste parti è normale. Siamo nella nella Jacuzia, nel nord-est della Siberia, chiamata anche la regione del “Polo del Freddo Boreale”. Qui d'inverno la temperatura non supera mai gli zero gradi, e rimane quasi sempre al di sotto dei $-30°$C, raggiungendo talvolta i $-60°$C.” Disegna un ipotetico grafico della densità della funzione temperatura in quel luogo, segnando anche sull'asse delle ascisse il dato rilevato. Osserva sul grafico il significato delle parole usate “mai”, “quasi sempre” e “talvolta”:

[64] http://www.rainews.it/dl/rainews/media/Siberia-la-raccolta-del-ghiaccio-nella-citta-piu-fredd html Dalle informazioni sappiamo che la funzione densità vale 0 già da 0° in poi, e certamente prima di $-273°$ ma in pratica, usando le conoscenze usuali della realtà sensibile, da $-100°$.

corripondono a 3 aree di sottografico, se la temperatura viene considerato un parametro "continuo" – cioè, in pratica, che può assumere valori con inifiniti decimali – e a somme di probabilità delle aste di un bar chart, se le temperature ambientali vengono discretizzate – come si usa – in valori interi. La parola "normale" riferita al valore $-41°$ si riferisce a una quarta area, purchè la normalità si riferisca al significato $\leq -41°$, altrimenti nel caso continuo la probabilità dei $-41°$ *esatti* è 0, e nel caso discreto sarà senz'altro *piccola*, tutt'altro che *grande* ("normale").

In mancanza di altre informazioni – che sarebbe Medicina, che qua non vogliamo e non possiamo fare – per le temperature corporee umane possiamo aspettarci similmente un grafico a campana, seppure situato altrove, intorno ai 37°.

Nota sulle distribuzioni con 2 punti di massimo. Invece distribuzioni "bimodali" fanno ritenere che dietro vi siano 2 fenomeni distinti.
Per esempio se misuriamo i tempi di impegno ad uno sportello, e dopo aver (sapientemente) riunito i tempi misurati in classi facciamo l'istogramma, e questo presenta 2 massimi nettamente distinti, lontani, è plausibile che allo sportello i clienti stiano facendo 2 operazione diverse: chi un'operazione più rapida, chi una più laboriosa. (Nella zona intermedia fra i 2 massimi sono i veloci a fare l'operazione laboriosa e i lenti a fare quella semplice).

Esempio$^{f}_{\mu}$ Qual è la probabilità di ottenere [esattamente] 3 volte il numero 1 su 7 lanci di un dado [regolare]?
Il successo ad ognuna delle $n = 7$ prove ha probabilità $\frac{1}{6}$ e allora, con la densità $B\left(7, \frac{1}{6}\right)$, la probabilità cercata è:

$$P(k=3) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{7-3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4 =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\ \cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{5^4}{6^7} = 5\cdot 7\cdot\frac{625}{279\,936} = \frac{21\,875}{279\,936} \approx 0.0781 = 7.81\%.$$

(Diciamo pure, a parole, circa 8%).

Esempi ed esercizi

Esempio$^{f}_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte il numero 7 con 5 lanci di un dado regolare a 8 facce?
Potremmo sommare le 4 probabilità

$$P(k=2)+P(k=3)+P(k=4)+P(k=5)$$

ma è ovvio che conviene considerare l'evento complementare e cioè calcolare

$$1-(P(k=0)+P(k=1)) =$$
$$= 1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{5-0}-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{5-1} =$$
$$= 1-1\cdot 1\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{5}-5\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(\frac{7}{8}\right)^{4} =$$
$$= 1-\left(\frac{7}{8}\right)^{4}\cdot\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{8}\right)=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{4}\cdot\frac{2}{8}=1-\frac{2\,401}{16\,384} =$$
$$= \frac{13\,983}{16\,384}\approx 0.853 = 85.3\%.$$

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere 3 volte il numero 4 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte il numero 3 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte il numero 3 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte numeri primi con 4 lanci di un dado regolare a 6 facce?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte testa con 5 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte croce con 6 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte testa con 7 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero dispari di volte testa con 5 lanci di una moneta regolare?

43 Leggi congiunte e indipendenza

43.1 Introduzione alle leggi congiunte

Considereremo solo coppie di variabili aleatorie discrete ma con qualche attenzione tutto può essere esteso a 3 o più variabili aleatorie. Date 2 variabili aleatorie discrete X e Y

$$X := \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \dots x_k\, [\dots] \\ p_1\, p_2\, p_3 \dots p_k\, [\dots] \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} y_1\, y_2\, y_3 \dots y_k\, [\dots] \\ p_1\, p'_2\, p'_3 \dots p'_k\, [\dots] \end{pmatrix}$$

si può dimostrare che la coppia ordinata (X, Y) è una v.a., detta *2-dimensionale*. La sua densità è la funzione **densità congiunta**

$$p(x, y) := P(X = x \wedge Y = y)$$

per esempio per i 2 dadi, o per la coppia di lanci di 1 dado,

$$(X, Y) = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (6,6) \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \dots & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \textit{per } x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$ *che scriveremo anche* $p_{i,j}$.

Detto V il prodotto cartesiano degli insiemi dei valori delle v.a.

$$V := \{x_1, x_2, x_3 \dots x_k\, [\dots]\} \times \{y_1, y_2, y_3 \dots x_k\, [\dots]\}$$

è ovviamente

$$\sum_{(x,y) \in V} p(x, y) = 1 \tag{29}$$

e se $A \subseteq V$, avendosi eventi disgiunti si ha ovviamente

$$P(A) = \sum_{(x,y) \in A} p(x, y) \tag{30}$$

per esempio per i 2 dadi regolari

$$P(X + Y = 8) = p(2, 6) + p(3, 5) + p(4, 4) + p(5, 3) + p(6, 2) = \frac{5}{36}.$$

43.2 Densità marginali e indipendenza

Date le 2 v.a. discrete X e Y e la **v.a. bidimensionale** (X, Y) prima considerate, le densità p' di X e p'' di Y si chiamano **densità marginali** di (X, Y). Adesso indichiamo con p la densità congiunta. è (teorema)

$$p'_i = \sum_j p_{i,j} \qquad p''_j = \sum_i p_{i,j}$$

Le 2 v.a. X e Y si dicono **v.a. indipendenti** se

$$p_{i,j} = p'_i \cdot p''_j \qquad \forall\, i, j \quad \textit{\scriptsize ovvero se congiunta=prodotto delle marginali.}$$

Per esempio i 2 dadi o il doppio lancio di prima, con le marginali costantemente $\frac{1}{6}$ e la congiunta costantemente $\frac{1}{36}$. Invece questa densità congiunta

$$p_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{30} & \textit{per } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,\ i \neq j \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

dà luogo a 2 v.a. (non determinate nei valori per adesso)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

che non sono indipendenti perchè $p_{1,2} = \frac{1}{30} \neq \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = p'_1 \cdot p''_2$.
Ecco un'altra densità $p_{i,j}$ di v.a. bidimensionale (X, Y)

$$\begin{array}{lcccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\ x_1 & \frac{4}{44} & \frac{3}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \rightarrow & \frac{11}{44} = p'_1 \\ x_2 & \frac{3}{44} & \frac{4}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \rightarrow & \frac{11}{44} = p'_2 \\ x_3 & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{5}{44} & \frac{5}{44} & \rightarrow & \frac{14}{44} = p'_3 \\ x_4 & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \rightarrow & \frac{8}{44} = p'_4 \\ {\scriptstyle p_{4,1}\nearrow} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & & \\ & p''_1 & p''_2 & p''_3 & p''_4 & & \end{array}$$

con X e Y non indipendenti:

$$p_{1,2} = \frac{3}{44} \neq \frac{11}{44} \cdot \frac{11}{44} = p'_1 \cdot p''_2.$$

(Lasciamo tutto in 44-esimi sebbene qualche semplificazione sarebbe possibile).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{14}{44} & \frac{8}{44} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} \end{pmatrix}.$$

44 Speranza matematica e varianza

La speranza matematica di una v.a. essenzialmente è un numero che congloba la probabilità degli eventi col loro costo ovvero guadagno.
La varianza di una v.a. estende il concetto già visto di varianza di un dataset numerico ovvero di una popolazione.

Consideriamo in questa Lezione variabili aleatorie discrete, e nella Lezione 47 le continue.

Supponiamo che ora lanceranno un dado, e io posso scegliere o di ricevere 2 euro se viene pari o 5 euro se viene 3: cosa mi conviene scegliere?

• Se spero nel pari, mediamente vincerei metà volte, e allora posso considerare che mediamente vincerò metà dei 2 euro in palio, cioè 1 euro;

• se spero nel numero 3, mediamente vincerei 5 euro 1 volta su 6, e allora posso considerare che mediamente vincerò 5/6 dell'euro euro in palio.
Allora conviene la scommessa sul pari perchè 1 è più di 5/6.

Il concetto è immensamente più generale dei giochi d'azzardo, perchè non solo con le assicurazioni, ma anche coi fatti dell'economia e della salute pubblica e individuale, in ultima analisi, la situazione con

spese certe

e ricavi incerti

è analoga ad un gioco d'azzardo.

Un'attenta considerazione del caso numerico soprastante ci induce a definire come **speranza matematica** (o *media* o *valore* *atteso*) di una variabile aleatoria discreta $X := \binom{x_1\, x_2\, x_3\, ...\, x_k\, [...]}{p_1\, p_2\, p_3\, ...\, p_k\, [...]}$

$$\mu = E(X) := \sum_k x_k \cdot p_k \qquad \textit{somma su tutti i valori } x_k \textit{ della v.a.}$$

e questa è una somma finita o una serie, e in quest'ultimo caso a livello teorico si richiede anche una condizione di regolarità, $\sum_k |x_k| \cdot p_k < +\infty$ che in questa trattazione elementare diamo ma mai calcoleremo, e comunque è sempre verificata per le variabili aleatorie che considereremo.

Se esiste la speranza matematica, si definisce la **varianza** di una v.a. discreta X in 2 modi equivalenti

$$\sigma^2 = Var(X) := \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot p_k = E(X^2) - E(X)^2.$$

Per esempio le giocate sul pari e sul 3, prima considerate, producono guadagni medi rispettivi

$$E(U) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \qquad E(V) = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} \approx 0.833.$$

Ma con diversa varianza, che in qualche modo esprime la tendenza a rischiare molto per avere molto: la si calcoli nei 2 casi con le formule soprastanti.

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(x)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}\{a,b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
$X \sim B(n,p)$	$n \cdot p$	$np(1-p)$
X geometrica iniziante da 0	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
X geometrica iniziante da 1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Esercizio$^{f}_{\mu}$ Qual è il valore atteso del punteggio di un dado? E la varianza?
Usando la definizione di speranza matematica si ha

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Usando il teorema sulla speranza matematica di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$X \sim \mathbb{U}\{1,6\} \Rightarrow E(X) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \; (\textit{come sopra}).$$

Con le 2 definizioni di varianza si ha ugualmente

$$Var(X) = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \ldots + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 = \ldots = \frac{35}{12}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad Var(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

e con il teorema sulla varianza di $\mathbb{U}\{a,b\}$ si ha ugualmente

$$X \sim \mathbb{U}\{1,6\} \Rightarrow Var(X) = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}.$$

44.1 Passeggiate aleatorie

Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, versione inglese alla voce "Random walk", in italiano *passeggiata aleatoria"*:

> A random walk is a mathematical object, known as a stochastic or random process, that describes a path that consists of a succession of random steps on some mathematical space such as the integers. An elementary example of a random walk is the random walk on the integer number line, $\mathbb{Z}$, which starts at 0 and at each step moves $+1$ or -1 with equal probability. Other examples include the path traced by a molecule as it travels in a liquid or a gas, the search path of a foraging animal, the price of a fluctuating stock and the financial status of a gambler can all be approximated by random walk models, even though they may not be truly random in reality.
> (...) If a and b are positive integers, then the expected number of steps until a one-dimensional simple random walk starting at 0 first hits b or $-a$ is ab.

Cioè detto X il numero di passi fino al raggiungimento di b o $-a$,

$$E(X) = a \cdot b.$$

Link-> figura. Su queste basi ipotizziamo ora un "parametro vitale complessivo", che non riusciamo in questo esempio semplificato a specificare nei dettagli, ma che comunque non deve superare il valore soglia 7, nè scendere sotto il valore soglia -7, variando di anno in anno nell'individuo, salendo o scendendo di 1 con uguale probabilità 50%. In base a quanto sopra detto, con $a = b = 8$, la speranza matematica della vita è 64 anni, cioè $8 \cdot 8$. Ma se ora (come in un videogioco si danno le vite supplementari) supponiamo che la prima volta che una soglia (8 o -8) viene raggiunta, un farmaco modifica di 1 o -1 il parametro vitale nella direzione giusta, ecco che al nostro ipotetico soggetto la Farmacia regala altri anni di vita!

44.2 Esercizi sulla speranza matematica di v.a. discrete

Esercizio$^f_\mu$ Qual è la vincita netta attesa giocando 1 euro su una cinquina del lotto? (Con la parola "netta" intendiamo che conteggiamo la perdita sicura di 1 euro, il costo della giocata).
Detta V la v.a. "vincita netta", ricordando che si vince 6 milioni di volte la giocata, con probabilità $1/\binom{90}{5} = 1/43\,949\,268$,

$$V = \begin{pmatrix} 5\,999\,999 & -1 \\ \frac{1}{43\,949\,268} & \frac{43\,949\,267}{43\,949\,268} \end{pmatrix}$$

$$E(V) = 5\,999\,99 \cdot \frac{1}{43\,949\,268} - \frac{43\,949\,267}{43\,949\,268} = -\frac{37\,949\,268}{43\,949\,268} =$$

adesso magari semplifichiamo per 2, poi ancora per 2, poi per 3

$$= -\frac{3\,162\,439}{3\,662\,439} \approx -0.8635\,euro$$

cioè una perdita media di circa 86 centesimi di euro. (In generale i giochi d'azzardo sono molto meno svantaggiosi di questo).
Esercizio$^f_\mu$ Qual è la vincita netta attesa giocando 1 euro su un numero della roulette europea?
La vincita avviene con probabilità $1/37$ perchè i numeri equiprobabili sono 37, da 0 a 36, e dà 36 volte la giocata:

$$V = \begin{pmatrix} 35 & -1 \\ \frac{1}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}$$

$$E(V) = 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37} \approx 0.027\,euro$$

cioè mediamente perdiamo, molto approssimativamente, 3 centesimo ad ogni giocata di 1 euro.

45 Alcune variabili aleatorie continue

Come abbiamo visto, una v.a. È una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ che ad eventi associa numeri e si dice continua se i valori riempiono almeno un intervallo.

In questa trattazione elementare, le v.a. continue che considereremo sono **molto regolari**: **la f.r.** $F_X(z) := P(X \leq z)$ **è continua su tutto $\mathbb{R}$, e derivabile salvo al più in 1 o 2 punti**. La derivata della f.r., completata ad arbitrio in quegli eventuali punti particolari ovvero *singolari*,

$$f(z) := F'_X(z) = DP(X \leq z) \qquad \textit{spesso denotata } f_X(z)$$

si chiama **densità** della variabile aleatoria.

Una funzione f è densità di una v.a. se e solo se

$$f(t) \geq 0 \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Se f e F_X sono rispettvamente densità e f.r. di una variabile aleatoria continua X, allora (teorema)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad \forall\, x$$

$$P(X = x) = 0 \qquad \forall\, x$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt \qquad \forall\, a, b, \quad \textit{ogni} \leq \textit{ sostituibile con } <$$

e in quest'ultima a e b possono essere infiniti (col $<$, ovvio).

Esempio 1: v.a. di Cauchy.

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

Esempio 2: v.a. $\sim \mathbb{U}[a,b]$ **oppure** $\mathbb{U}(a,b)$**, uniforme su** $[a,b]$**.**

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\ a \le t \le b \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & se\ a \le x \le b \\ 1 & se\ x > b \end{cases} .$$

Esempio 3: v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$**.**

$$f(t) := \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & se\ t \ge 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & se\ x \ge 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} .$$

La densità esponenziale modellizza molte cose fra cui l'*intertempo* fra 2 chiamate telefoniche a una farmacia o a un qualunque servizio in un tempo del giorno in cui esse arrivano in ogni minuto con la stessa probabilità: Leggiamo sulla Wikipedia in inglese alla voce *Exponential distribution*:

> if we focus on a time interval during which the rate is roughly constant, such as from 2 to 4 p.m. during work days, the exponential distribution can be used as a good approximate model for the time until the next phone call arrives.

Ecco 11 valori (di una simulazione informatica) della variabile aleatoria esponenziale di parametro 3.5, con 3 cifre decimali:
0.163 0.190 0.695 0.132 0.979 0.157 0.023 0.236 0.291 0.113 0.015
Si notino i valori piccoli e i valori grandi, distribuiti in un modo tipico, caratterizzante appunto la variabile aleatoria esponenziale.

Ecco online su WolframAlpha un po' di determinazioni, ad ogni reload nuove, (di una simulazione informatica) della variabile aleatoria esponenziale di parametro 3.5: `link->`

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Se esiste la speranza matematica, si definisce la **varianza** di una v.a. discreta X in 2 modi equivalenti

$$\sigma^2 = Var(X) := \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot p_k = E(X^2) - E(X)^2.$$

Per esempio le giocate sul pari e sul 3, prima considerate, producono guadagni medi rispettivi

$$E(U) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \qquad E(V) = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} \approx 0.833.$$

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(x)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}\{a, b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
$X \sim B(n, p)$	$n \cdot p$	$np(1-p)$
X geometrica iniziante da 0	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
X geometrica iniziante da 1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

46 Quantili delle variabili aleatorie continue

Se l'insieme dove f è positiva è un intervallo, anche se illimitato, allora (si dimostra) per ogni $\alpha \in]0,1[$ esiste un'unica soluzione dell'equazione

$$F_X(t) = \alpha$$

che si chiama *quantile di ordine* α, indicato talvolta con q_α:

$$P(X \le q_\alpha) = \alpha.$$

Si chiama *mediana* il quartile $q_{0.5}$ di ordine 0.5 ovvero 1/2, o 50%.
Esempio. Per una legge esponenziale di parametro 3 calcolare $P\Big(X \ge \frac{2}{3}\ln 2\Big)$.
La densità è

$$f(x) := \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x} & \textit{se } x \ge 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

e allora

$$P\Big(X \ge \frac{2}{3}\ln 2\Big) = \int_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} 3\mathrm{e}^{-3t}\,dt = \star$$

calcoliamo l'integrale indefinito con la (23) con $z := -3t + 0$

$$\int 3\mathrm{e}^{-3t}\,dt = \frac{1}{-3}\Big(\int 3\mathrm{e}^{z}\,dz\Big)_{z=-3t} = -\frac{1}{3}\big(3\mathrm{e}^{z}\big)_{z=-3t} = -\mathrm{e}^{-3t}$$

$$\text{riprendiamo } \star = \Big[-\mathrm{e}^{-3t}\Big]_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} = -\mathrm{e}^{-\infty} - \Big(-\mathrm{e}^{-3\frac{2}{3}\ln 2}\Big) =$$

$$\underset{\textit{intendendendo } \mathrm{e}^{-\infty} \textit{ nel senso del limite e allora } 0}{=} 0 + \mathrm{e}^{-2\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2^{-2}} = 2^{-2} =$$

$$= \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

(e allora $\frac{2}{3}\ln 2$ è il quantile di ordine $\frac{1}{4}$ ossia 0.25 ossia 25%).
Calcolando la probabilità p dell'evento complementare $X < \frac{2}{3}\ln 2$, e poi facendo $1 - p$, si potevano evitare gli infiniti.
Esercizi. Trovare le mediane dell'uniforme e dell'esponenziale. [Si troverà $q_{0.5} = \frac{a+b}{2}$ e $q_{0.5} = \frac{1}{\lambda}\ln 2$ rispettivamente].

Esercizi. Trovare i quartili di ordine $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ dell'uniforme e dell'esponenziale. Per un'esponenziale di parametro 2 calcolare $P(X \geq 3)$. (Si può calcolare come $1 - P(X < 3)$ evitando l'infinito).

Nota. Sia per variabili aleatorie discrete che continue, *distribuzione* è sinonimo di *legge*, e indica sia la *densità* che la *funzione di ripartizione* (e in via teorica anche ogni altra funzione ad esse equivalente ma in pratica useremo quelle due).

Proprietà di ogni f.r. $F(x)$ **di v.a. continua:**
1) ha valori fra 0 e 1, cioè $0 \leq F(x) \leq 1$;
2) è non decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;
3) tende a 0 per $x \to -\infty$ e tende a 1 per $x \to +\infty$;
4) è continua (in trattazioni di livello superiore continua a destra);
5) è crescente puntualmente ovunque la densità $f = F'$ è positiva.

Proprietà di ogni densità $f(x)$ **di v.a. continua:**
1) ha valori ≥ 0, sappiamo;
2) ha integrale 1 su tutto $\mathbb{R}$, sappiamo; e poi si dimostra che
3) è continua salvo al più 1 o 2 punti (in questa trattazione).

3 bis) Tutte le densità che considereremo in questa trattazione tendono a 0 per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$ (ma densità particolarmente "capricciose" potrebbero non avere uno o entrambi quei limiti, con infinite oscillazioni con "campate" strette strette);

Esercizi.

•• I principali quantili considerati in statistica sono:

i *quartili* $q_{0.25}$, $q_{0.5}$, $q_{0.75}$, e il secondo è la mediana;

i *decili* $q_{0.1}$, $q_{0.2}$,...,$q_{0.9}$, corrispondenti a 10%, 20%,...,90%;

i *centili* o *percentili* $q_{0.01}$, $q_{0.02}$,...,$q_{0.99}$, corrispondenti a 1%, 2%,...,99%;

due *ventili*, precisamente $q_{0.05}$ e $q_{0.95}$.

Si calcolino relativamente alla densità esponenziale.
Per esempio per i decili si troverà

$$q_{k/10} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10}{10-k} \qquad k = 1, ..., 9$$

(Si noti che per $k = 5$ si ottiene la mediana).

•• Per una v.a. X di densità esponenziale di parametro 5 calcolare $P(X < 2)$, $P(X^3 > 2)$, $P(X^2 \geq 4)$.

•• Si consideri una v.a. Z di densità

$$f(z) := \begin{cases} 6z(1-z) & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases} .$$

Senza fare calcoli ma col disegno del grafico stabilire quanto vale la mediana e mettere in ordine crescente

$$P(Z < 0.4), \quad P(Z > 0.9), \quad P(Z \leq 0.2), \quad P(Z \geq 0.7).$$

47 Speranza matematica, varianza, covarianza

Definizioni. Consideriamo una v.a. X continua di densità f.

$$\textbf{Speranza matematica:}\ \mu = E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

se l'integrale con $|x|$ esiste finito, che non verificheremo mai.
La speranza matematica si chiama anche *valore atteso* o *media*.

$$\textbf{Varianza:}\ \sigma^2 = Var(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx.$$

Sia per v.a. discrete che continue:

$$\textbf{Deviazione standard:}\ \sigma := \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2}.$$

$$\textbf{Covarianza:}\ Cov(X,Y) := E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

e se la covarianza è 0 le v.a. si dicono *incorrelate*.
Diremo **indipendenti** 2 variabili aleatorie X e Y continue se informazioni sui valori assunti da una non modificano le nostre conoscenze probabilistiche sui valori dell'altra, ovvero e per ogni a, x, c, y con $a < x$ e $c < y$

$$P(a < X < x \wedge c < Y < y) = P(a < X < x) \cdot P(c < Y < y)$$

cioè $\{a < X < x\}$ e $\{c < Y < y\}$ sono eventi indipendenti.
Spesso le variabili aleatorie incorrelate sono indipendenti.

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}[a,b]$ ovvero $\mathbb{U}(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
X esponenziale di parametro λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
X ∼Cauchy	$\nexists$	$\nexists$

47.1 Approfondimenti sulle v.a. discrete e continue

Tutte le cose che diremo qua valgono sia per variabili aleatorie discrete che continue.

Con c intendiamo un qualunque numero reale. E $\sigma := \sqrt{Var(X)}$.

Relazioni di 1 variabile aleatoria con 1 costante:

$$E(c + X) = c + E(X) \tag{31}$$

$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X) \tag{32}$$

$$Var(c + X) = Var(X) \tag{33}$$

$$Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X) \tag{34}$$

Relazioni di 2 variabili aleatorie:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \tag{35}$$

$$X, Y \text{ indip. } \Rightarrow \text{ incorrelate } \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{36}$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X, Y) \tag{37}$$

$$\text{indip. } \Rightarrow Var(X + ... + X_n) = Var(X_1) + ... + Var(X_n) \tag{38}$$

Disuguaglianza di Chebyshev[65]. Riguarda gli *scarti dalla media* $|X - E(X)|$, precisamente la probabilità che siano "grandi" o per meglio dire superino un fissato numero c:

$$P(|X - E(X)| > c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \tag{39}$$

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.
Essa ci dice che minore è la variabilità della grandezza aleatoria X, minore è la probabilità che X assuma valori distanti dalla media. Equivalentemente con l'evento complementare

$$P(|X - E(X)| \leq c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2} \tag{40}$$

[65] Ovvero di Bienaymè-Chebyshev. Miglior traslitterazione dal russo Čebyšëv.

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.

Scrivendo da adesso μ per la speranza matematica e σ per lo scarto quadratico medio, coi valori di c multipli interi positivi $m\,\sigma$ di σ, $m = 1, 2, 3...$, osservato che $1 - \frac{\sigma^2}{(m\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{m^2}$, la Disuguaglianza di Chebyshev è

$$P(|X - \mu| \leq m\,\sigma) \geq 1 - \frac{1}{m^2} \qquad m = 1, 2, 3...$$

e con $m := 2, 3, 4, 5$ (il caso $m := 1$ non è significativo) per una **variabile aleatoria discreta o continua qualunque** purchè dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2, risulta

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \geq \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} = 0.8888... \approx 88.9\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 4\sigma) \geq \frac{15}{16} = 0.9375 = 93.75\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 5\sigma) \geq \frac{24}{25} = 0.96 = 96\%.$$

Queste maggiorazioni valgono – come detto – per distribuzioni qualunque. Molti che sanno qualcosa di Statistica hanno in mente la notissima formula $P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 95\%$ ma una tale affermazione stringente può essere fatta se si sa che X ha densità normale.

Esercizi. Siano X e Y indipendenti di leggi esponenziali di parametri $\log 3$ $\log 4$ rispettivamente. Calcolare la loro covarianza, e la speranza matematica di X, $2Y$, $3 + Y$ e $\pi X - Y$.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Nota. Sia per variabili aleatorie discrete che continue, *Distribuzione* è sinonimo di *legge*, e indica sia la *densità* che la *funzione di ripartizione* (e in via teorica anche ogni altra funzione ad esse equivalente ma in pratica useremo quelle due).

• • •

Proprietà di ogni f.r. $F(x)$ di v.a. continua:
1) ha valori fra 0 e 1, cioè $0 \leq F(x) \leq 1$;
2) è non decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;
3) tende a 0 per $x \to -\infty$ e tende a 1 per $x \to +\infty$;
4) è continua (in trattazioni di livello superiore continua a destra);
5) è crescente puntualmente ovunque la densità $f = F'$ è positiva.
Proprietà di ogni densità $f(x)$ di v.a. continua:
1) ha valori ≥ 0, sappiamo;
2) ha integrale 1 su tutto $\mathbb{R}$, sappiamo; e poi si dimostra che
3) è continua salvo al più 1 o 2 punti (in questa trattazione).

• • •

3 bis) Tutte le densità che considereremo in questa trattazione tendono a 0 per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$ (ma densità particolarmente "capricciose" potrebbero non avere uno o entrambi quei limiti, con infinite oscillazioni con "campate" strette strette);

48 Distribuzioni Gamma e del chi quadrato

48.1 Funzione Gamma, Legge Gamma, alcuni teoremi

La **funzione** $\Gamma(x)$, *funzione Gamma*, è una *funzione speciale* dell'Analisi Matematica, cioè, in pratica e semplificando, una funzione non elementare ma di notevole interesse, con una certa definizione che non daremo. I suoi valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche. Ma per i numeri $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4...$ i suoi valori sono semplici:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)! \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}^+$$

(si faccia un grafico) e quelli soli considereremo, per esempio

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma(2) = 1! = 1, \quad \Gamma(3) = 2! = 2, \quad \Gamma(4) = 3! = 6.$$

La **Legge** $\Gamma(\alpha, \lambda)$, Gamma di parametri $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, ha densità

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & se\ \ t > 0 \\ \\ 0 & se\ \ t \leq 0 \end{cases} . \tag{41}$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $\alpha := \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ e $\lambda := 2$, e si calcolino e grafichino le funzioni di ripartizione.

Teorema.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

48.2 Densità e leggi del chi quadrato

La legge $\chi^2(n)$ [del] chi quadrato (chi-quadrato, chi quadro, chi-quadro, inglese *chi-square* o *chi-squared*) ovvero χ^2 di parametro n o come si meglio dice *a n gradi di libertà* ha densità

$$f(x) = f(x;n) := \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \textit{se } x > 0 \\ 0 & \textit{se } x \leq 0 \end{cases} . \qquad (42)$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $n = 1, 2, 4, 6$, e si calcolino e grafichino le ultime 3 funzioni di ripartizione.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti i quantili. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche.

Il valore di maggior interesse in Statistica Inferenziale è $q_{0.95}$, e in subordine con 0.9 e 0.99:

$$P(X < q_{0.95}) = 0.95 = 95\%$$

$$\textit{equivalentemente} \;\; P(X > q_{0.95}) = 0.05 = 5\%$$

e tale quantile non è un singolo numero perchè viene ulteriormente precisato da n=1,2...

49 Distribuzione t di Student e altre leggi

49.1 Densità e quantili di Student, e legge di Cauchy

Come le leggi del chi quadrato, la t **di Student** è una famiglia di leggi, con un parametro, di solito indicato con n o ν, ancora detto *gradi di libertà*: $n = 1, 2, 3....$ Scriviamo le prime 2:

$$f(t;1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t^2+1} \qquad f(t;2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}$$

e nelle successive $\frac{t^2}{2}$ diventa $\frac{t^2}{3}$, $\frac{t^2}{4}$... e l'esponente $\frac{3}{2}$ diventa $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$... e cambia anche la costante moltiplicativa davanti, e ha una espressione che coinvolge la funzione Γ. I grafici un po' si assomigliano: simmetrici rispetto all'asse y, al crescere di n le campane diventano più alte e strette.

La $f(t;1)$ è la **densità di Cauchy**, che sorprendentemente non ha speranza matematica, ma tutte le altre sì, e allora ovviamente è 0 per la simmetria.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti **i quantili**. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche, purtroppo di difficile lettura a causa di varie ambiguità, col serio rischio di confondere un parametro caratterizzante i quantili, α, con $1-\alpha$ oppure $2(1-\alpha)$ oppure $2\alpha - 1$.

Nella riga di testa si trovano alcuni valori, talvolta con la specificazione *"one tail"*, e per associarli correttamente ad α, evitando di confonderlo con $1-\alpha$, o $2(1-\alpha)$, o $2\alpha-1$, si cerchi nella prima riga (cioè per $n = 1$) il valore ≈ 6.31 corrispondente ad $\alpha = 0.95$:

$$X \sim t \text{ di Student a 1 grado di libertà} \qquad P(X \leq 6.31) \approx 0.95.$$

Ecco alcuni valori:

two tails $2\alpha - 1$ $\to$	0.9	0.95	0.98	0.99
two tails $2(1-\alpha)$ $\to$	0.1	0.05	0.02	0.01
one tail $1-\alpha$ $\to$	0.05	0.025	0.01	0.005
k **one tail** α $\to$	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.3134	12.706	31.820	63.657
...	...	...	...	...
100	1.6602	1.984	2.364	2.625

ESEMPIO$_\mu$ Probabilità che una v.a. di legge di Student a 2 gradi di libertà assuma un valore ≤ 2.52:

$$P(X \leq 2.52) = \int_{-\infty}^{2.52} f(t;2)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{2.52} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}\,dt$$

integrale non facile da calcolare al livello di questa trattazione elementare.
Con Wolframalpha `Integrate (1/(2Sqrt[2]))(1/(t^2/2+1)^(3/2)) from -Infinity to 2.52` dà

$$\approx 0.936 = 93.6\%.$$

49.2 Approfondimenti su χ^2, t di Student, e altre leggi

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \chi^2(n)$ ovvero del χ^2 a n gradi di libertà	n	$2n$
$X \sim t$ di Student a n gradi di libertà	0 per $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$ per $n > 2$

Osservazioni. Quelle che abbiamo visto, e le densità normale e log-normale che vedremo, sono fra le principali densità continue. Ma ne esistono infinite altre, alcune con un nome specifico, altre senza. Si considerino per esempio gli esercizi seguenti.

Esercizio 1$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

$$g(t) := \alpha\, \mathrm{e}^{-2|t|}$$

naturalmente dopo aver determinato la costante α. (La costante viene determinata dall'integrale unitario fra $-\infty$ e $+\infty$, che per la parità della densità è 2 volte l'integrale fra 0 e $+\infty$).

Esercizio 2$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

$$f(z) := \begin{cases} 0 & se\ \ z < \frac{1}{2} \\ c & se\ \ \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ \frac{c}{z^3} & se\ \ z \geq 1 \end{cases} \qquad \textit{discontinua!}$$

naturalmente dopo aver determinato c. (Ovviamente bisognerà usare la Formula (14), Regola di Chasles, fatta valere su $]a, b[=] - \infty, +\infty[$, suddividendo 2 volte l'integrale, nei punti $\frac{1}{2}$ e 1).

Esercizio 3$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

discontinua! $\quad u(x) := a(2 + \mathrm{sgn}(x))\ per\ -1 \leq x \leq 2,\ e\ 0\ altrimenti.$

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

DA METTERE IN QUALCHE LEZIONE ALL'INIZIO

Crescenza (globale) e decrescenza (globale) su intervalli, eventualmente sull'intero dominio di una funzione.

Ci sono 4 casi di cui più importanti il 1° e il 3°.

1) se $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$ **allora** f **si dice crescente.**
Esempi: x^3, arctan, lg, ln, exp, $\sqrt{x}$. Anche x^2 per $x \geq 0$.

2) se $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$ allora f si dice non decrescente, o crescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono crescente).
Esempio: $\lfloor x \rfloor$.

3) se $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$ **allora** f **si dice decrescente.**
Esempio: e^{-x}. Anche $\frac{1}{x}$ per $x > 0$. Anche x^2 per $x \leq 0$.

4) se $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$ allora f si dice non crescente, o decrescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono decrescente).

Nota 1. x^2, $\sin x$ e $\cos x$ non ricadono in alcuna delle 4 categorie.

Nota 2. x^3 è crescente su $\mathbb{R}$ (globalmente) ma non è crescente in 0 (puntualmente; e infatti la sua tangente in 0 è orizzontale).

50 Legge e speranza matematica di $g(X)$

50.1 Legge di $g(X)$ e standardizzazione

Data una variabile aleatoria continua X e una funzione sufficientemente regolare g, anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua. Si pensi per esempio a $mX + q$, X^3, $-X^3$ e X^2.

Teoremi. La funzione di ripartizione di $g(X)$ è

$$F_{g(X)}(x) = F_X(g^{-1}(x)) \qquad \text{se } g \text{ crescente suriettiva} \tag{43}$$

$$F_{g(X)}(x) = 1 - F_X(g^{-1}(x)) \qquad \text{se } g \text{ decrescente suriettiva} \tag{44}$$

(le quali vanno bene per esempio per $mX + q$, X^3 e $-X^3$)

$$F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \qquad \text{se } g(z) := z^2$$

e poi per tutte la densità si ottiene derivando, in particolare

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) \qquad \textit{se } x > 0$$

e ovviamente 0 se $x < 0$.

Esercizio. Si trovino densità e f.r. di $mX + q$ per $m > 0$ e < 0, X^3 e $-X^3$, e poi con una g non nulla a scelta.

Definizione. Per una variabile aleatoria X discreta o continua dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2, scegliendo

$$m := \frac{1}{\sigma} \qquad q := -\frac{\mu}{\sigma}$$

la nuova variabile aleatoria $mX + q$

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

si chiama **standardizzazione** di X.

Teorema.
Se W è standardizzazione di una v.a. discreta o continua

$$E(W) = 0 \qquad Var(W) = 1.$$

Esercizio. Si scrivano le standardizzazioni dei 2 dadi di (39.1), con quella stessa notazione. E di una moneta regolare.

50.2 Speranza matematica di $g(X)$ e momenti

Teorema. Come detto, data una variabile aleatoria continua X e una funzione sufficientemente regolare g, anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua. In condizioni di ulteriore regolarità X e $g(X)$ hanno speranza matematica.
Se la v.a. continua X ha densità f_X allora

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)\, dt.$$

in particolare (con $g(z) := z^n$)

$$E(X^n)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx \quad \text{si chiama } \textit{momento}\; n\text{-esimo.}$$

Il momento primo è proprio la speranza matematica di X.
Esempi. Vediamo 2 esempi tratti da un libro che si distingue nella didattica del Calcolo delle Probabilità e della Statistica: *Calcolo delle probabilità*, di Paolo Baldi, ed. McGraw-Hill. Alle pp. 125-126:

> Supponiamo che X sia uniforme su $[0, 1]$. Quanto valgono $E[\sin(2\pi X)]$ e $E[\mathrm{e}^X]$?(...)
>
> $$E[\sin(2\pi X)] = \int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx = 0$$
>
> $$E[\mathrm{e}^X] = \int_0^1 \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e} - 1.$$

(L'uso delle soprastanti parentesi quadre non è conforme alle standard seguito in questa dispensa, ma si tenga presente che le notazioni fra i vari Autori matematici differiscono alquanto).
Esercizi. Si consideri una v.a. X con $f_X(x) := x$ fra 0 e $\sqrt{2}$ e 0 altrimenti. Trovare $E(\sin(2\pi X))$, $E(\mathrm{e}^X)$ ed $E(\ln X)$, e anche un'altra matematica con una funzione a scelta. Poi si cerchino le stesse 4 speranze matematiche con una nuova densità a scelta.

50.3 Esercizi sulla legge di $g(X)$

Esercizio. Si trovi densità e f.r. di X^3.

$$P(X^3 \leq x) = P(X \leq \sqrt[3]{x}) \qquad \text{cioè}$$

$$\boxed{F_{X^3}(x) = F_X(\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dalla (43) dopo aver riconosciuto che $g(x) := x^3$ è crescente suriettiva con inversa $\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ per $x \neq 0$,

$$\boxed{f_{X^3}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(\sqrt[3]{x}) \quad x \neq 0}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.

Esercizio. Si trovi densità e f.r. di $-X^3$.

$$P(-X^3 \leq x) = P(X^3 \geq x) = 1 - P(X^3 \leq x) = 1 - P(X \leq -\sqrt[3]{x}) \text{ cioè}$$

$$\boxed{F_{-X^3}(x) = 1 - F_X(-\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dalla (44) dopo aver riconosciuto che $g(x) := -x^3$ è decrescente suriettiva con inversa $-\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\boxed{f_{-X^3}(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(-\sqrt[3]{x})}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.

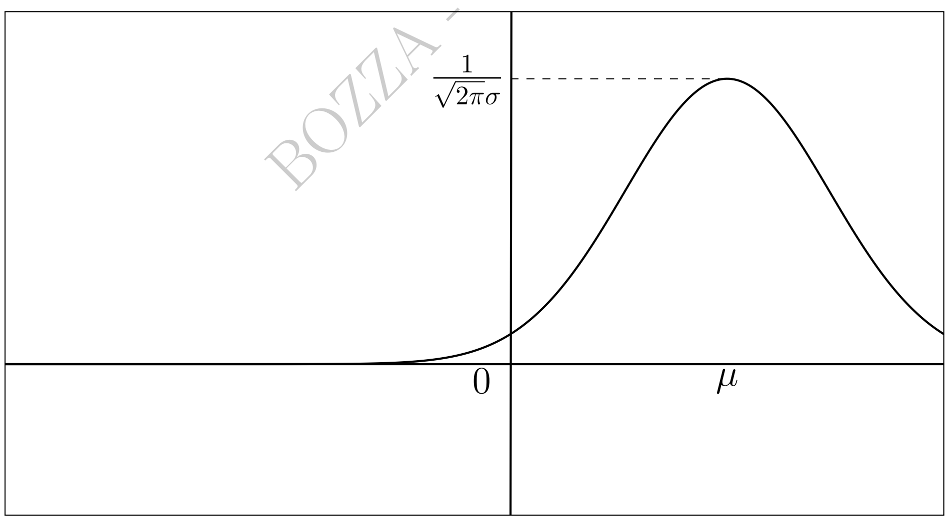
51 Densità e variabile aleatoria normale

51.1 Introduzione alla densità e v.a. normale

La densità **normale** ovvero **gaussiana** ha un grafico detto "a campana", con limiti 0 a $+\infty$ e $-\infty$, prima crescente e poi decrescente, prima con la concavità verso l'alto, poi verso il basso e infine verso l'alto.

Si tratta in qualche modo della più "pura" e "perfetta" delle densità a campana.

La *moda* (cioè l'eventuale unico punto di massimo di una densità di v.a. continua) esiste e coincide con la media μ, e la densità è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$, e a



causa di questa simmetria anche la mediana è μ: la probabilità di un valore prima di μ è uguale alla probabilità di un valore dopo μ. Per la simmetria la skewness è nulla.

Il massimo assoluto (ovviamente) vale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ e in $\mu \pm \sigma$ ci sono i 2 flessi (che si trovano facilmente con la derivata seconda), e allora

a grande varianza corrisponde campana bassa e larga
a piccola varianza corrisponde campana alta e stretta.

Questa legge è denotata con $N(\mu, \sigma^2)$, ha 2 parametri (come la legge Gamma) ed essi sono proprio la media e la varianza:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{densità normale } N(\mu,\sigma^2) \\[2ex] f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\,\sigma^2}} \\[2ex] (\textit{standard},\ \phi(x),\ \text{se } \mu = 0 \text{ e } \sigma^2 = 1) \end{array}} \tag{45}$$

I parametri sono normalmente considerati μ e σ^2 (non μ e σ, ma si faccia attenzione che qualche software invece fa proprio così).

Si noti che è strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}$: sono possibili valori grandissimamente positivi o negativi, ma sono pochissimo probabili (globalmente, ovvio: i singoli valori hanno tutti probabilità 0).

Teorema. Se $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_1, \sigma_2^2)$ sono indipendenti

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$
$$c + X \sim N(c + \mu_1, \sigma_1^2) \qquad c\,X \sim N(c\mu_1, c^2\sigma_1^2). \tag{46}$$

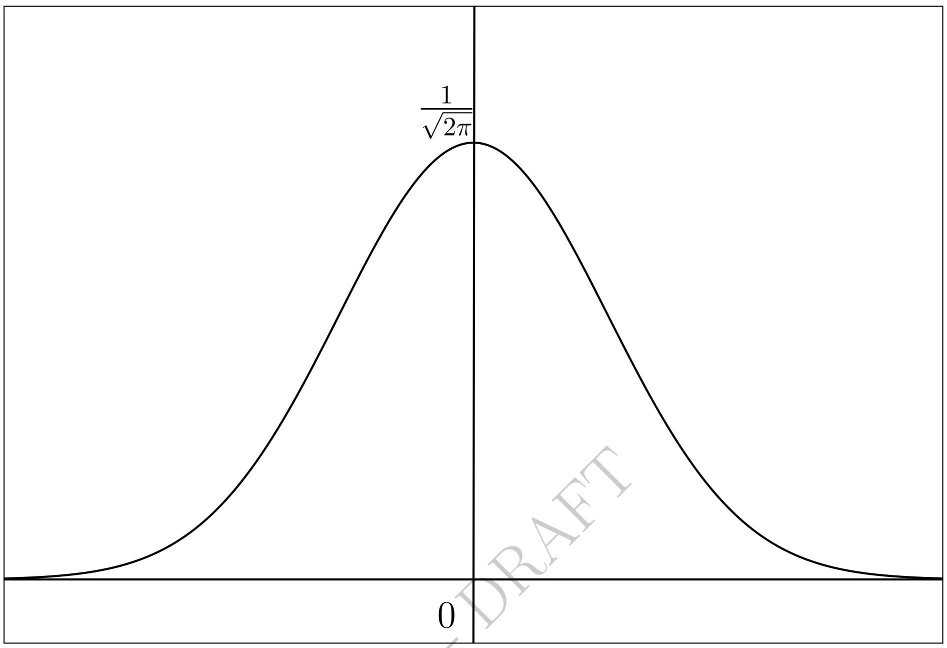
51.2 Variabile aleatoria normale standard

(A causa delle (46)) la standardizzazione di una qualunque variabile aleatoria normale è una variabile aleatoria normale $N(0,1)$. (Avendo media 0 e varianza 1, in base alla (45)) ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad =: \phi(x)$$

(*densità normale standard*, denotata con $\phi(x)$).
Ha anche moda 0 e mediana 0 e skewness 0.

I punti di flesso sono in ± 1.



La sua funzione di ripartizione si indica con $\Phi(x)$

$$\boxed{\Phi(x) \text{ f.r. normale standard}} \tag{47}$$

e si chiama *funzione di ripartizione normale standard*, in Inglese *(standard) normal cumulative distribution function*, e (per le (26) e (45)) è

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

e derivando

$$\boxed{\Phi'(x) = \phi(x)} \tag{48}$$

(corrispondentemente a (27)).

L'integrale che definisce questa *funzione speciale (dell'Analisi Matematica)* non può essere risolto in termini di funzioni elementari.
Valori numerici (approssimati) di $\Phi(x)$ si ottengono in vari modi.

La funzione inversa di $\Phi(x)$ dà i quantili normali, molto importanti nella Statistica. Il quantile di ordine α si indica con ϕ_α:

$$\boxed{\phi_\alpha := \Phi^{-1}(\alpha)} \tag{49}$$

Il grafico della funzione ϕ_α ha dominio $]0,1[$, in 0.5 vale (ovviamente) 0, tende a $-\infty$ in 0 e a $+\infty$ in 1.
Si disegni quel grafico e su esso si trovi il punto $(0.975, \approx 1.96)$.

Si verifica subito che la standardizzazione di una variabile aleatoria normale è una variabile aleatoria normale standard e allora fra le 2 valgono le relazioni

$$\boxed{\begin{array}{c} Y \sim N(0,1) \ \textit{standardizzazione di} \ X \sim N(\mu,\sigma^2) \\ \\ Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad X = \sigma Y + \mu. \end{array}} \tag{50}$$

51.3 Scarti dalla media per v.a. normale

Se si sa che la variabile aleatoria X è normale si ottengono[66] disuguaglianze, che ora vediamo, molto più stringenti di quelle ottenute con la Disuguaglianza di Cebyshev, valida per variabili aleatorie *qualunque*.

[66] Si ha, per ogni $\delta > 0$,

$$P(|X-\mu| \le \delta) = P(|\sigma Y| \le \delta) = P(\sigma|Y| \le \delta) = P\Big(|Y| \le \frac{\delta}{\sigma}\Big)$$

e con facili calcoli→ si conclude

$$P(|X-\mu| \le m\,\sigma) = 2\,\Phi(m) - 1$$

e coi classici valori (che si trovano per esempio sulle tavole) si ottengono le approssimazioni.

$$\boxed{\begin{array}{c} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\[1em] P(|X-\mu| \le \sigma) \approx 68.3\% \\[1em] P(|X-\mu| \le 2\,\sigma) \approx 95.4\% \\[1em] P(|X-\mu| \le 3\,\sigma) \approx 99.7\% \\[1em] P(|X-\mu| \le 1.96\,\sigma) \approx 0.95 = 95\% \end{array}}$$

dove la quarta è una lieve modificazione della seconda per avere con più precisione 95%. Si faccia un disegno.

Per una normale standard diventano (semplificando i decimali)

$$\boxed{\begin{array}{rlll} \text{Normale standard} & & X \sim N(0,1) & \\[1em] P(-1 \le X \le 1) & \approx 68\% & & \\[1em] P(-1.96 \le X \le 1.96) & \approx 95\% & (\text{o spesso } -2 \le X \le 2) & (\alpha) \\[1em] P(-3 \le X \le 3) & \approx 99.7\% & & \end{array}}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione. Compresa la (α) ovviamente.

Fermiamoci un momento!

In questi giorni ha avuto ampio risalto sui media un articolo scientifico sull'invenzione di un nuovo tipo di test diagnostico del cancro, che si fa in meno di 10 minuti e non richiede un laboratorio – e allora potenzialmente potrà interessare le farmacie.
È stato pubblicato su una rivista scientifica di altissimo livello, Nature Communications, con data 4 dicembre 2018.
Apprezziamo quante cose riusciamo a capire, con lo studio fatto finora, in questa figura dell'articolo: Link->

- le figure a campana

- l'AUC, area under the curve – sebbene qua usata in un contesto completamente diverso da quello in cui la introducemmo (relativamente alla farmacocinetica)

- specificità, sensitività; e PPV (Positive Predictive Value) è quello che in questa trattazione è stato indicato VPP (Valore Predittivo Positivo, essenzialmente la predittività.

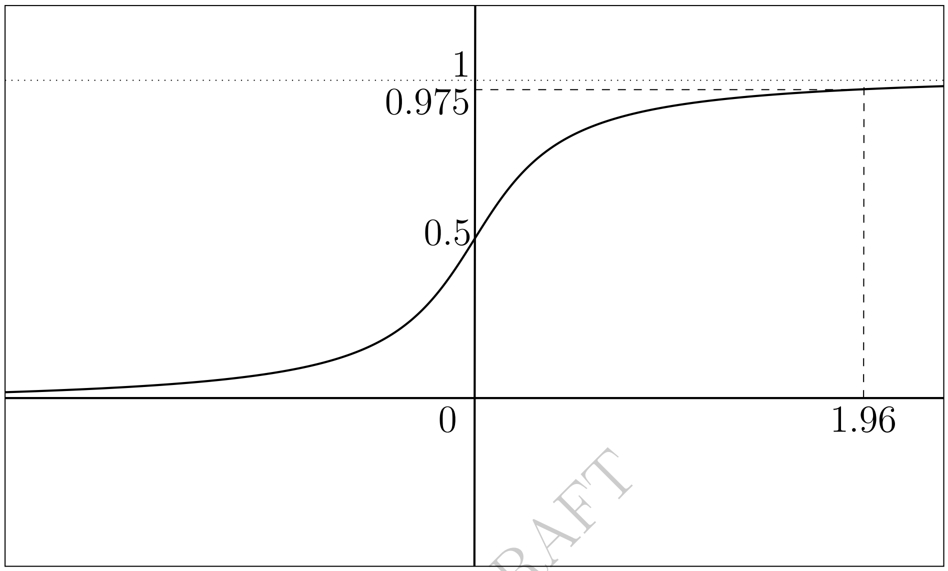
- i box [and wisker] plot – fatti nel modo semplice di questa trattazione:

> "In the box and whisker plots, the middle lines of the boxes represent the median (50th percentile) and the terminal line of the boxes represents the 25th to 75th percentile. The whiskers represent the lowest and the highest value"

- i bar chart

(I "peluzzi" sopra le colonne del bar chart, questione che non abbiamo trattato, si riferiscono alle deviazioni standard dei dataset di misurazioni).

52 Approssimazione di $\Phi(x)$ e ϕ_α



Valori numerici (approssimati) della funzione di ripartizione normale standard $\Phi(x)$ e dei quantili normali ϕ_α si ottengono:

(1) con quelle (rare) calcolatrici scientifiche che la implementano;

(2) online in www.wolframAlpha.com digitando

`CDF[NormalDistribution[0,1],`$_{valore\ di\ x}$`]` per avere $\Phi(x)$,

`InverseCDF[NormalDistribution[0,1],`$_{valore\ di\ \alpha}$`]` per avere ϕ_α;

(3) con molti software di manipolazione matematica, fra cui Maxima e Mathematica$^{(R)}$;

(4) magari a memoria per alcuni pochi valori speciali, in particolare senz'altro l'ovvio $\phi_0 = \frac{1}{2}$ e

$$\boxed{\phi_{0.975} \approx 1.96} \tag{51}$$

e magari tutti questi:

x	$\Phi(x) = P(X \leq x)$	
0	0.5	il primo è ovvio per simmeteria
≈ 1.64	≈ 0.95	e il terzo vogliamo ricordarlo:
≈ 1.96	≈ 0.975	$\phi_{\mathbf{0.975}} \approx \mathbf{1.96}$ ovvero $\Phi(1.96) \approx 0.975$
≈ 2.58	≈ 0.995	e come sopra scriveremo gli altri.
$(+\infty)$	(1)	Quest'ultimo vale solo come limite.
ϕ_α	α	

(e si faccia attenzione che questi non sono i valori di $P(|X| < x)$);

(5) con apposite formule di approssimazione[67]

(6) con le apposite tavole numeriche, che si trovano su internet cercando *normal table* o (e sono essenzialmente le stesse) *normal quantile table*.

Nota. Sia le tavole numeriche che, di solito, le formule di approssimazione danno (approssimano)

$\Phi(x)$ solo per $x \geq 0$

ϕ_α solo per $\alpha \geq 0.5$

e per i valori di $x < 0$ e $\alpha < 0.5$ si usano le formula di simmetria

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)} \tag{52}$$

$$\boxed{\phi_{1-\alpha} = -\phi_\alpha} \tag{53}$$

(che seguono dalla parità della densità normale standard).

[67] Per esempio quella di Shah (1985) di un esercizio seguente, oppure la più precisa (A. Soranzo, E. Epure – 2014) `http://m-hikari.com/ams/ams-2014/ams-85-88-2014/epureAMS85-88-2014.pdf`

$$\forall x \geq 0 \qquad \Phi(x) \approx 2\hat{}(-22\hat{}(1 - 41\hat{}(x/10)))$$

che ha errore assoluto $|\varepsilon(x)| < 0.00013$ per ogni $x \geq 0$, e la sua inversa (che si ottiene subito ricavando x, che è ϕ_α)

$$\forall \alpha \in \; [0, 0.5[\qquad \phi_\alpha \approx \frac{10}{\log 41} \log\Big(1 - \frac{\log((-\log\alpha)/\log 2)}{\log 22}\Big)$$

(che ha errori assoluto e relativo rispettivamente $|\varepsilon(\alpha)| < 5 \cdot 10^{-3}$ $\forall\alpha \in [0.5, 9925]$, $|\varepsilon_r(\alpha)| < 1\%$ $\forall\alpha \in [0.5, 0.99908]$);

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\approx$ $^{\%}$ Per una variabile aleatoria normale standard X calcolare

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8)$$

usando questa classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\, 0 \leq x \leq 2.2 \\ \\ 0.99 & se\, 2.2 < x < 2.6 \\ \\ 1 & se\, x \geq 2.6 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO è

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8) = P(X \leq 0.8) - P(X < -1.2) =$$

trattandosi di densità continua le probabilità con $<$ e $\leq$ sono uguali

$$= P(X \leq 0.8) - P(X \leq -1.2) =$$

per definizione di $\Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \Phi(-1.2) =$$

e con la forumla di simmetria $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \big(1 - \Phi(1.2)\big) =$$

$$= \Phi(0.8) - 1 + \Phi(1.2) =$$

e con l'approssimazione data

$$\approx \frac{0.8\,(4.4-0.8)}{10} + 0.5 - 1 + \Big(\frac{1.2\,(4.4-1.2)}{10} + 0.5\Big) =$$
$$= 0.788 - 1 + 0.884$$

e in definitiva (recuperando il simbolo $\approx$ da più sopra)

$$\boxed{\approx 0.672 = 67.2\%}$$

52.1 Variabile aleatoria log-normale

Se X è una variabile aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$ allora $Y := \mathrm{e}^X$ si dice *log-normale* di parametri μ e σ^2, che però non sono rispettivamente media e varianza della nuova variabile aleatoria.
Inversamente, se Y è log-normale di parametri di parametri μ e σ^2, allora $X := \ln Y$ è $N(\mu, \sigma^2)$.
Consideriamo ora solo il caso $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$:

$$\forall x > 0 \qquad F_{\mathrm{e}^X}(x) = P(\mathrm{e}^X \le x) = P(X \le \ln x) = F_X(\ln x)$$

e per i non positivi, considerando i 2 casi disgiunti $x = 0$ e $x < 0$

$$\forall x \le 0 \qquad F_{\mathrm{e}^X}(x) = P(\mathrm{e}^X \le x) = P(\mathrm{e}^X = x) + P(\mathrm{e}^X < x) = 0 + 0$$

e in definitiva

$$F_Y(x) = F_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \le 0 \end{cases}.$$

Derivando troviamo la densità log-normale di parametri $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, ricordando che $\Phi'(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, e naturalmente (derivata della funzione composta) deriviamo anche ln:

$$\forall x > 0 \qquad f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \phi(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

trovandosi in definitiva

$$f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \le 0 \end{cases} \tag{54}$$

e con μ e σ^2 generici la

densità *Lognormal*(μ, σ^2)
log-normale di parametri μ e σ^2

$$f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, x}\, e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \le 0 \end{cases} \tag{55}$$

(Secondo alcuni Autori i parametri della *Lognormal*(μ, σ^2) sono μ e σ, secondo altri[68] sono μ e σ^2, e in questa trattazione seguiamo

[68] Si confrontino per esempio le Wikipedie italiana e in inglese.

questo secondo standard, ma si faccia attenzione in particolare usando i vari software).

I 3 valori coincidenti per la normale standard, media moda e mediana, $E(X) = Mod(X) = \phi_{0.5}$, hanno 3 destini diversi: per la log-normale $Y := \mathrm{e}^X$ la mediana è e^μ, con $\mu = E(X)$:

$$P(Y \leq \mathrm{e}^\mu) = P(\mathrm{e}^X \leq \mathrm{e}^\mu) = P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \text{ per simmetria}$$

ma media e moda hanno diverse espressioni.

Esercizio. Si faccia lo studio di funzione di (55). Quanto vale la funzione di ripartizione in -1, 0, $\mathrm{e}^{1.64}$, $\mathrm{e}^{2.58}$, 100?

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

53 Legge dei Grandi Numeri

53.1 Inquadramento euristico della situazione

Supponiamo di lanciare una moneta equilibrata un numero grandissimo di volte, e continuiamo a farlo, conteggiando il numero di teste e il numero di croci. Alcuni ingenui credono che i 2 numeri tendano a diventare sempre più simili, ma questo è falso: è impensabile che lanciando un milione di volte la moneta siano venute esattamente 500mila teste e 500mila croci, o 500 001 o anche 500 002 o simili. Anzi si potrebbe dimostrare che la differenza fra teste e croci tenderà in generale ad essere sempre più grande, non più piccola! Invece quello che tende a succedere è che le proporzioni di teste e di croci tenderanno ad uguagliarsi, tendendo entrambe ad $\frac{1}{2}$. Quello che possiamo effettivamente aspettarci dopo un milione di lanci è una situazione di questo tipo:

teste: 500 000 $\pm$ qualche centinaio: $\#teste = 500\,000 + r := n_0$
croci: 500 000 $\mp$ qualche centinaio: $\#croci = 500\,000 - r := n_1$
r: qualche centinaio in positivo o in negativo, p.es. 424 o -723
frazione di teste: $\frac{500\,000+r}{1\,000\,000} = \frac{1}{2} + \frac{r}{1\,000\,000} \approx 0.5$
frazione di croci: $\frac{500\,000-r}{1\,000\,000} = \frac{1}{2} - \frac{r}{1\,000\,000} \approx 0.5.$

Le *proporzioni empiriche* tendono ad uguagliarsi, non le quantità!
Questo diventerà ancora più evidente al crescere del numero di lanci, cioè l'approssimazione a 0.5 varrà con sempre più decimali, salvo casi sfortunatissimi, comunque sempre possibili.
Similmente avviene per qualunque p_1 fra 0 e 1 che sia la probabilità della testa della moneta (che se $p_1 \neq 0.5$ è non regolare): detto n il numero di lanci, e associato l'1 alla testa e 0 alla croce,
proporzione empirica di teste $\bar{p}_{n,1} = \frac{\#teste}{n} \to p_1$
proporzione empirica di croci $\bar{p}_{n,0} = \frac{\#croci}{n} \to p_0 := 1 - p_1$.
Similmente per un dado avremo 6 limiti $p_1,...,p_6$, cioè le proporzioni empiriche dei risultati tenderanno alle probabilità *vere*

dei vari risultati, per esempio, per un dado regolare, sempre $\frac{1}{6}$:

$$\forall\, k \in \{1, ..., m\} \quad \bar{p}_{k,n} \to p_k = P(X = k) \tag{56}$$

e per il dado $m = 6$, e per una moneta invece $k \in \{0, 1\}$.
Questo tendere però non è quello deterministico, dei limiti delle successioni della matematica: seppure – come si può dimostrare – ha probabilità 0, rimane comunque possibile (!) che un dado *regolare* dia sempre 5, proprio *per sempre*, e allora in quel caso

$$\bar{p}_{5,n} = \frac{\#\, \textit{uscite del } 5}{n} = \frac{n}{n} \equiv 1 \not\to \frac{1}{6} = P(X = 5) = p_5.$$

(Si noti però che questo evento possibile ha probabilità 0).

Esercizio. Ipotizzare e graficare le $\bar{p}_{k,n}$ per $n = 100$, $k = 1, ..., 6$.

53.2 Limite in probabilità e Legge dei Grandi Numeri

In quanto detto, resta non definito cosa si intende per il "tendere" ai numeri p_k, e si è ben detto che ci possono essere casi sfortunatissimi. Si tratta di un tendere probabilistico, non deterministico com'è quello dei limiti delle funzioni reali di variabile reale. Esso è precisato e inquadrato dal concetto di *convergenza in probabilità* di una successione di variabili aleatorie X_n, che definiamo senza insistervi particolarmente. Si immagini la X_n di cui parliamo come la proporzione empirica $\bar{p}_{1,n}$ di teste dopo n lanci, che, sì, è una variabile aleatoria, "prima" di fare i lanci. Il limite della convergenza in probabilità di una successione di variabili aleatorie è esso stesso in generale una variabile aleatoria; solo che nell'esempio prima considerato è la variabile aleatoria discreta

$$X := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = p$$

che vale 0.5 con probabilità 1. (Variabile aleatoria *costante*). Ma in generale il limite X di una convergenza in probabilità è proprio una variabile aleatoria con una funzione di ripartizione non banale, ed è una variabile aleatoria discreta o continua.

Definizione. Diremo che X_n converge in probabilità a X

$$X_n \to^P X \text{ se } \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \eta) = 0 \quad \forall\, \eta > 0 \tag{57}$$

(o indifferentemente con $> \eta$). (Ha un valore teorico, in questa trattazione elementare la useremo solo una volta fra poco: ci basta conoscerla e capirla).

Legge dei Grandi Numeri. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di ugual legge con speranza matematica μ e varianza σ^2. Allora per la *media empirica*

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$\text{è} \quad \forall\, \eta > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \eta) = 0$$

ovvero equivalentemente, **nelle ipotesi dette** (poco stringenti)

nelle ipotesi sopradette (poco stringenti)

$$\bar{X}_n \to^P \mu$$

ovvero:
la media empirica, sperimentale, (α)
tende (in probabilità)
alla media "vera",
la speranza matematica

Detto altrimenti: *sperabilmente* (qua è il senso probabilistico) troveremo *circa* la speranza matematica di una v.a. di densità sconosciuta – com'è in generale in Statistica, e nella pratica – facendo la media di *molti* valori tratti (indipendentemente, ovvio) da quella v.a. (Il senso del limite è nelle parole "circa" e "molti").

Con $X_h := 1$ per testa e 0 altrimenti per $h = 1, ..., n$, si riottiene il primo caso considerato, con $\bar{X}_n$ la proporzione empirica

$\bar{p}_{1,n}$.
Per una moneta regolare la frazione di teste tende in probabilità a $\frac{1}{2}$.
Per un dado regolare la frazione di risultati 3 tende in probabilità a $\frac{1}{6}$.

Possiamo fare i calcoli *esattamente*. La probabilità di k teste è

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

e ipotizzando una moneta regolare ($p = 1/2$, $p^k(1-p)^{n-k} = 2^{-n}$)

$$p_k = \binom{n}{k} 2^{-n}$$

e in particolare la probabilità i fare tante teste quante croci, che è 0 se n è dispari, per n pari è

$$\binom{n}{n/2} 2^{-n}$$

Con n piccolo è possibile fare facilmente il calcolo esatto, per esempio per $n := 6$ la probabilità è $\frac{5}{16}$ e per $n := 20$

$$\binom{20}{10} 2^{-20} \approx 0.176197 \quad \text{circa 1 su 6.}$$

L'esatto pareggio allora è alquanto improbabile[69] già con $n = 6$.

---

[69] La (58) con $n := 20$ ci dà

$$10 - 2\sqrt{5} \leq X \leq 10 + 2\sqrt{5}$$

cioè

$$5.527... \leq \textit{numero di teste} \leq 14.472...$$

ovvero

$$\textit{numero di teste} = 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9 \vee 10 \vee 11 \vee 12 \vee 13 \vee 14$$

e questo evento ha probabilità

$$p_6 + ... + p_{14} = 2^{-20}\left(\binom{20}{6} + ... + \binom{20}{14}\right) =$$

$$= \frac{125647}{131072} \approx 0.959 = 95.9\%.$$

Consideriamo n lanci di moneta con probabilità $\frac{1}{2}$ di fare testa. Con la Disuguaglianza di Chebyshev si trova[(70)] che con probabilità almeno del 75% il numero di teste verifica

$$\frac{n}{2} - \sqrt{n} \leq X \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}. \tag{58}$$

Allora con un milione di lanci, almeno al 75% il numero di teste sta fra 499 000 e 501 000.
Nella prossima Lezione vedremo che in effetti quella probabilità è $> 95.4\%$, molto di più.
Si noti che effettivamente $\frac{501\,000}{1\,000\,000} \approx 0.5$, e similmente con 499 000.
Detto in altri termini

$$\frac{\frac{n}{2} \pm \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{2} \quad per \quad n \gg .$$

Ripetiamo che **si potrebbe dimostrare che la differenza fra teste e croci tenderà in generale ad essere sempre più**

Prima si era detto *almeno* 75%, ora si trova *esattamente* 0.95.... (Ma questo calcolo per $n := 1\,000\,000$ è improbo).

[70] Per lo studente interessato:

$$P(|X - E(X)| > c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \qquad \forall\, c$$

equivale, con l'evento complementare, a

$$P(|X - E(X)| \leq c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2}.$$

Se X è il contatore di teste (successi) in n lanci, allora $X \sim B(n,k)$. Essendo per la $B(n,k)$ la varianza $np(1-p)$ e la speranza matematica np, con la moneta regolare $n/4$ e $n/2$ rispettivamente,

$$P(|X - n/2| \leq c) \geq 1 - \frac{n/4}{c^2}$$

e fissando $c := 2\sigma = 2\sqrt{VarB(n,k)} = 2\sqrt{n/4} = \sqrt{n}$

$$P(|X - n/2| \leq \sqrt{n}) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}$$

cioè

$$P\Big((\Big|X - \frac{n}{2}\Big| \leq \sqrt{n}\Big) \geq \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

e ricordando che $|f(x)| \leq g(x)$ equivale a $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ si trova la (58).

grande, non più piccola! Eppure, la proporzione tende al 50%. (Tende “in probabilità”, ora sappiamo).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (56), (57), (α) oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

$$\boxed{\begin{gathered} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ P(|X-\mu| \leq \sigma) \approx 68.3\% \\ P(|X-\mu| \leq 2\,\sigma) \approx 95.4\% \\ P(|X-\mu| \leq 3\,\sigma) \approx 99.7\% \\ P(|X-\mu| \leq 1.96\,\sigma) \approx 0.95 = 95\% \end{gathered}}$$

dove la quarta è una lieve modificazione della seconda per avere con più precisione 95%. Si faccia un disegno.

Per una normale standard diventano (semplificando i decimali)

$$\boxed{\begin{array}{rll} \text{Normale standard} & & X \sim N(0,1) \\ P(-1 \leq X \leq 1) & \approx 68\% & \\ P(-1.96 \leq X \leq 1.96) & \approx 95\% & (\text{o spesso } -2 \leq X \leq 2) \\ P(-3 \leq X \leq 3) & \approx 99.7\% & \end{array}}$$

54 Approssimazione Normale

Oltre alla convergenza in probabilità esistono altri tipi di convergenza per successioni di variabili aleatorie e in questa trattazione se ne considererà una che ora vediamo.

Definizione. Diremo che X_n **converge in legge** a X

$$X_n \to^L X \text{ se } \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \tag{59}$$

(con ovvio significato dei simboli) per ogni punto x in cui $F_X(x)$ è continua. (Ha un valore teorico, non la useremo realmente in questa trattazione elementare: ci basta conoscerla e capirla).

In sostanza la convergenza in legge corrisponde alla convergenza delle f.r. di X_n alla f.r. di X.

Teorema Limite Centrale. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti (discrete o continue) di ugual legge con speranza matematica μ e varianza σ^2. Allora la standardizzazione della somma delle prime n tende in legge ad una normale standard. Ciò si esprime in base alla (59) con una formula[71] non semplicissima di valore teorico. Da un punto di vista più applicativo, per le variabili aleatorie ora considerate vale allora l'

Approssimazione Normale

$$\boxed{P\Big(X_1 + ... + X_n \leq x\Big) \approx \Phi\Big(\tfrac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big)} \tag{60}$$

qua sopra e qua sotto le condizioni da sapere

e tradizionalmente questa approssimazione si ritiene sufficientemente buona per $n \geq 30$ (secondo altri Autori $n \geq 50$) in questi

[71] Per il lettore interessato questa è la formula:

$$\exists\, X \sim N(0,1) \qquad S_n^* := \frac{X_1 + ... + X_n - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \to^L X$$

casi:

 * se le $X_k \sim B(m,p)$ con $n\,p \geq 5$ e $n\,(1-p) \geq 5$

 * per tutte le altre distribuzioni degli esercizi scolastici e anche di questa trattazione, e spessissimo anche della pratica.

Osservazione. Allora, la forma a campana e in particolare la variabile aleatoria normale standard è una sorta di "attrattore" per le variabili aleatorie, perchè anche se ne sono alquanto diverse, la loro somma standardizzata, a certe condizioni sopra dette, tende proprio alla $N(0,1)$, in legge.

Teorema. La convergenza in probabilità implica quella in legge.

Esempio. Calcoleremo la probabilità di ottenere più di 28 teste in 50 lanci di moneta equilibrata.
I risultati X_k hanno legge $B(1, \frac{1}{2})$, con speranza matematica $\mu = \frac{1}{2}$ e varianza $\sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, allora $\sigma = \frac{1}{2}$, e allora

$$P\Big(X_1 + ... + X_{50} > 28\Big) = 1 - P\Big(X_1 + ... + X_{50} \leq 28\Big) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\Big(\frac{28 - 50 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{50}}\Big) \approx 1 - \Phi(0.849) \approx 1 - 0.802 \approx 0.2 = 20\%.$$

La classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\; 0 \leq x \leq 2.2 \\ 0.99 & se\; 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\; x \geq 2.6 \end{cases}$$

in 0.849 darebbe 0.801 invece del più preciso 0.802 che troviamo con Wolframalpha. Ma per il risultato finale ragionevolmente espresso da 20% non cambia nulla.

ESERCIZIO$_\mu$

Calcolare con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con 1 000 000 di lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra 499 000 e 501 000 compresi.

SVOLGIMENTO

Per il contatore di teste

$$X_1 + .. + X_{1\,000\,000}$$

cerchiamo

$$\begin{aligned} q &= P(499\,000 \le X \le 501\,000) = \\ &= P(X \le 501\,000) - P(X < 499\,000) = \\ &= P(X \le 501\,000) - P(X \le 498\,999) \end{aligned} \tag{61}$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di 1 000 000 di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$\begin{aligned} &P(X_1 + ... + X_{1\,000\,000} \le x) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 1\,000\,000\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{x - 500\,000}{500}\right) \end{aligned}$$

e applicandola alla (62) la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} q &= \Phi\left(\frac{501\,000 - 500\,000}{500}\right) - \Phi\left(\frac{498\,999 - 500\,000}{500}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{1\,000}{500}\right) - \Phi\left(\frac{-1\,001}{500}\right) \approx \\ &\approx \Phi(2) - \Phi(-2) = \end{aligned}$$

e con la formula di simmetria

$$\Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_{0.975} \approx 1.96 \approx 2$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 = 0.95 = 95\%$$

ESERCIZIO$_\mu$
Calcolare con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con $n \geq 100$ di lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra $\frac{n}{2}-\sqrt{n}$ e $\frac{n}{2}+\sqrt{n}$ compresi. (Per semplicità di calcolo si ipotizzi n quadrato perfetto).

SVOLGIMENTO
Per il contatore di teste

$$X_1 + .. + X_n$$

cerchiamo

$$\begin{aligned} q = P(n/2 - \sqrt{n} \leq X \leq n/2 + \sqrt{n}) = \\ = P(X \leq n/2 + \sqrt{n}) - P(X \leq n/2 - \sqrt{n} - 1) \end{aligned} \tag{62}$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di n di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$P(X_1 + ... + X_n \leq x) \approx$$

$$\approx \Phi\Big(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Phi\Big(\frac{x - n\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= \Phi\Big(\frac{x - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big)$$

e applicandola alla (62) la probabilità cercata è

$$q = \Phi\Big(\frac{n/2 + \sqrt{n} - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{n/2 - \sqrt{n} - 1 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{-\sqrt{n} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi\left(-2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$

per la formula di simmetria

$$= \Phi(2) - 1 + \Phi\left(2 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \star$$

ed eliminando senza qua voler approfondire il minuscolo $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$= \Phi(2) - 1 + \Phi(2) =$$

$$= 2\,\Phi(2) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_{0.975} \approx 1.96 \approx 2$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 = 0.95 = 95\%$$

Volendo fare il calcolo con più precisione, riprendendo da $\star$ (usando la $f(x+h) \approx f(x) + h\, f'(x)$ valida per piccolo h)

$$\star \quad = \Phi(2) - 1 + \Phi(2) + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$= 2\,\Phi(2) - 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$= 0.95 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

che è più del 95%.

ESERCIZIO$_{\mu}$

Calcolare con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con $n \geq 100$ di lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra $\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}$ e $\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}$ compresi. (Per semplicità di calcolo si ipotizzi n quadrato perfetto pari).

SVOLGIMENTO

Per il contatore di teste

$$X_1 + .. + X_n$$

cerchiamo

$$q = P(n/2 - \sqrt{n}/2 \leq X \leq n/2 + \sqrt{n}/2) =$$

$$= P(X \leq n/2 + \sqrt{n}/2) - P(X \leq n/2 - \sqrt{n}/2 - 1) \qquad (63)$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di n di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$P(X_1 + ... + X_n \leq x) \approx$$

$$\approx \Phi\Big(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Phi\Big(\frac{x - n\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= \Phi\Big(\frac{x - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big)$$

e applicandola alla (63) la probabilità cercata è

$$q = \Phi\Big(\frac{n/2 + \sqrt{n}/2 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{n/2 - \sqrt{n}/2 - 1 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= \Phi\Big(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{n} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$

per la formula di simmetria

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$

ed eliminando senza qua voler approfondire il minuscolo $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(1) =$$

$$= 2\,\Phi(1) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_1 \approx 0.84$

$$\approx 2 \cdot 0.84 - 1 = 0.68 = 68\%$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (59), (60), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

B1 – ESERCIZI SUL CALCOLO DELLE PROBABILITà

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il testa con 5 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 5 volte il testa con 6 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 5 volte il croce con 7 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il numero 2 con 5 lanci di un dado regolare a 4 facce?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 1 volta il numero 3 con 7 lanci di un dado regolare a 4 facce?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il numero 2 con 5 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte il numero 1 con 8 lanci di un dado regolaree?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 7 volte il numero 7 con 8 lanci di un dado regolare a 8 facce?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 6 volte un numero primo con 7 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 6 volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero primo con 6 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero primo con 10 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero quadrato di volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero quadrato con 6 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero triangolare di volte testa con 9 lanci di una moneta regolare?

55 Introduzione alla Statistica Inferenziale

IL PRIMO COMPITO DELLA STATISTICA INFERENZIALE: DISTINGUERE FRA VARIAZIONI SIGNIFICATIVE E NON SIGNIFICATIVE: Lezioni (55), (59), (61.1), (61.2), (62), (63).

Vedremo anche altre 2 cose: gli stimatori, Lezione (56), e gli intervalli di fiducia, Lezioni (57), (58).

La probabilità che il contatore X_n di teste in n lanci di moneta regolare assuma un valore

$$\frac{n}{2} - \sqrt{n} \leq X_n \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}$$

(che con la Disuguaglianza di Chebyshev si può dimostrare esser $> 75\%$) con calcoli non banali si può dimostrar essere $> 95.4\%$ per ogni $n \geq 4$, cioè

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| \leq \sqrt{n}\right) > 95.4\% \qquad \forall\, n > 4. \tag{64}$$

Questo ci permette di fare una prima puntatina nella statistica della della Farmacia.

Supponiamo di avere una popolazione di monete regolari, e consideriamo malattia la loro regolarità, cioè il fare testa con probabilità $\frac{1}{2}$.
Ne prendiamo un bel campione per fare un test terapeutico, diciamo 10 000. (Il numero di soggetti ragionevole da considerare è questione statistica non banale; qua scegliamo 10 000).
Le curiamo con una goccia di farmaco (per esempio una goccia di colla al centro dalla parte della testa) e ci chiediamo se la cura ha funzionato, cioè se adesso sono più propense a fare testa, oppure croce, non sappiamo, comunque tutte ugualmente nella stessa direzione si suppone. Cioè ci chiediamo se le abbiamo curate dalla loro regolarità.
Lanciamo le 10 000 monete 1 volta ciascuna ottenendo 10 000

risultati indipendenti e diciamo $X_{10\,000}$ il numero di teste.
Noi vorremmo che questo numero sia molto diverso 5 000, cioè la metà di 10 000.
Supponiamo di ottenere 5 100: possiamo essere soddisfatti?
(5100 è proprio $n + \sqrt{n}$).
Sì perchè se le monete erano ancora regolari c'era meno del 4.6% di probabilità (100% − 95.4%) che venisse un risultato così estremo, lontano dalla metà. (Siamo soddisfatti ma di poco, se veniva 5 200 o magari 6 000 era molto meglio).
La soglia ordinaria di *significatività* della Statistica è il 5%.
Se ne otteniamo 5 050 non siamo soddisfatti: una tale deviazione è ben compatibile con la regolarità.
Questa è solo un'idea iniziale: nella pratica scientifica seria, bisogna fissare la soglia prima di fare l'esperimento.

Si noti però che in generale nella Farmacia in generale con un farmaco si vuole sbilanciare un parametro in una fissata direzione, (si pensi alla glicemia troppo alta o alla sideremia troppo bassa), non semplicemente smuoverlo in una direzione qualunque.
Questo complicherà le cose. Per intanto abbiamo capito essenzialmente cosa vuol dire distinguere variazioni significative da variazioni non significative: queste ultime *potrebbero ben essere* (qui sta il 95%) *fluttuazioni casuali.*

Con l'approssimazione normale si può dimostrare che, purchè n sia sufficientemente grande, lo sbilanciamento di teste rispetto alla metà in una direzione o nell'altra

$$\left| X_n - \frac{n}{2} \right|$$

con probabilità $\approx 68.3\%$ è $< \frac{1}{2}\sqrt{n}$,
con probabilità $\approx 27\%$ sta fra $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ e $\sqrt{n}$,
con probabilità $\approx 4.6\%$ è $> \sqrt{n}$

Riscriviamo l'ultima:

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| > \sqrt{n}\right) \approx 4.6\% \qquad \forall\, n \; molto\; grande \tag{65}$$

strettamente imparentata alla (64) perchè 4.6 è 100-95.4.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (64), (65), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

56 Stimatori e stimatori non distorti

56.1 Parametri e stimatori; stimatori non distorti

Supponiamo che fra poco avremo le altezze di $n := 100$ persone, prese a caso dai 60milioni di italiani, e allora l'altezza di un italiano a caso è una variabile aleatoria X, e gli n numeri che stiamo per avere sono essi stessi variabili aleatorie X_1,...,X_n, e dopo che li avremo saranno numeri $x_1, ..., x_n$, detti *determinazioni* della variabile aleatoria. Chiameremo anche *campione aleatorio* le variabili aleatorie X_1,...,X_n e *campione* i numeri $x_1, ..., x_n$, ma non ci formalizzeremo su questa distinzione. La Statistica Descrittiva ci ha dato definizioni di media e varianza di quei numeri $x_1, ..., x_n$. Nel Calcolo delle Probabilità abbiamo definito la media ovvero speranza matematica e la varianza della variabile aleatoria X, ma qual è la relazione fra le 2 medie e le 2 varianze? Ottenere da n numeri una *stima* di un *parametro* incognito di una v.a. ovvero della sua legge, è un *problema di stima.* Ogni funzione

$$h(X_1, ..., X_n)$$

di un campione aleatorio si dice *stimatore*, in generale stimatore di un parametro incognito u della densità della variabile aleatoria, variabile aleatoria che sappiamo esistere ma non conosceremo mai in forma esatta (legge ovvero distribuzione, cioè densità o funzione di ripartizione), ma di cui avremo n determinazioni. Scriveremo

$$\hat{v} := h(X_1, ..., X_n)$$

e diremo che $\hat{v}$ è una stima di v. Per esempio per una v.a. $\mathbb{U}[0, a]$ o $\mathbb{U}\{0, a\}$ (uniforme fra 0 e a, continua o rispettivamente discreta)

$$\hat{a} := 2\,\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \tag{66}$$

è lo *stimatore dei momenti* del parametro a.

Esistono molti criteri di bontà di uno stimatore, e noi ne consideremo uno: diremo che lo stimatore $\hat{u}$ del parametro incognito u è *non distorto* se la speranza matematica di $\hat{u}$ è u, cioè $E(\hat{u}) = u$.

56.2 Stimatori non distorti di media e varianza

La differenza basale fra la *statistica descrittiva* e la *statistica inferenziale* è che la prima opera (in generale) su numeri e la seconda su variabili aleatorie, con il che la prima ricade in quella che abbiamo chiamato *matematica della certezza* e la seconda nella *matematica dell'incertezza*.
Se abbiamo n numeri

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

nella statistica descrittiva queste sono la media e la varianza degli n numeri:

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad Var(x_1, x_2, ..., x_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 \,.$$

Se invece supponiamo che $x_1, x_2, ..., x_n$ siano *determinazioni* di una variabile aleatoria X con una certa media μ e una certa varianza σ^2 *incognite*, dalle precedenti formule possiamo immediatamente definire questi (ragionevoli) stimatori – che sono variabili aleatorie – di μ e σ^2:

$$\hat{\mu} := \bar{X} := \bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \tag{67}$$

$$W := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2 \,.$$

Si dimostra che il primo è stimatore *non distorto* della media μ, cioè $E(\bar{X}_n) = \mu$, ma il secondo non è stimatore non distorto di σ^2, cioè la sua speranza matematica è diversa dal parametro che si vuol stimare.
Si dimostra invece che (e si noti la differenza nel denominatore)

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 \ \left[:= \hat{\sigma}^2 \ {\scriptstyle \leftarrow scrittura\ rara,\ scriveremo\ S^2}\right] \tag{68}$$

è lo *stimatore non distorto della varianza*: $E(S^2) = \sigma^2$.

Riassumiamo:
Per una v.a. discreta o continua X, supponiamo di sapere che:
1) ha distribuzione di un certo tipo noto dipendente da un parametro incognito, sia esso a, per esempio $\mathbb{U}[-b, b]$ o $N(\mu, 1)$ o $N(0, \sigma^2)$ o $\Gamma(\alpha, 1)$ (dove a è rispettivamente b, μ, σ^2 e α);
2) avremo n determinazioni indipendenti x_1,...,x_n di X, che per ora, "prima" di averle, sono n variabili aleatorie X_1,...X_n.

Non sapremo mai quanto vale a ma vogliamo stimarlo con uno stimatore $\hat{a}$ coi dati x_1,...,x_n, ovvero (prima di averli) X_1,...,X_n.

La teoria degli stimatori dei momenti è ricca e interessante[72] ma nella nostra trattazione elementare ci limitiamo molto.

[72] Per lo studente interessato, qualche dettaglio.

Stimatore dei momenti col momento primo Lo stimatore $\hat{a}$ *dei momenti, col momento primo*, attribuisce al parametro a quel valore che farebbe avere alla densità $f_a(x)$ come media, ovvero speranza matematica ovvero momento primo, il valore che è proprio la media di X_1,...X_n.

Esempio 1. Per una densità $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 noto (ora $a := \mu$)

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n).$$

Esempio 2. Per una densità esponenziale di parametro λ (ora $a := \lambda$) è

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} =^{EQ} \bar{X}_n$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} := \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n} .$$

Esempio 3. Per una densità $\Gamma(\alpha, \lambda)$ con α noto (ora $a := \lambda$) è

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} =^{EQ} \bar{X}_n$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} := \frac{\alpha}{\bar{X}_n} = \frac{n\,\alpha}{X_1 + ... + X_n} .$$

Esempio 4. Per una densità uniforme $\mathbb{U}[-u, u]$ è

$$E(X) = \frac{u - u}{2} = 0$$

56.3 Stimatori di massima verosimiglianza

Lo stimatore $\hat{a}$ *di massima verosimiglianza* “cerca di essere” quello che renderebbe massimamente probabile l’uscita di x_1,...,x_n, se a valesse $\hat{a}$. Il metodo per trovarlo non è semplicissimo.
Ci limitiamo a dare la formula dello stimatore di massima verosimi-

---

che non dipende dal parametro incognito $a = u$: il metodo dei momenti col solo momento primo non si può applicare.

Metodo di calcolo dello stimatore dei momenti 1) Si calcola la speranza matematica di $f_a(x)$ come funzione di a;
2) se dipende da a la si uguaglia a $\bar{X}_n$, media di X_1,...,X_n;
3) si risolve (se possibile) l’equazione in a;
Quella soluzione trovata, in termini di X_1,...,X_n è lo stimatore dei momenti, inteso come funzione (ed è una variabile aleatoria), per esempio

$$\hat{a} := \frac{n}{X_1 + ... + X_n}$$

e in termini di x_1,...,x_n è lo stimatore dei momenti inteso come valore dello stimatore, nel caso specifico di un campione x_1,...,x_n considerato, per esempio

$$\hat{a} := \frac{n}{x_1 + ... + x_n}$$

e quando a x_1,...,x_n si sostituiscano i loro valori, è un numero, per esempio

$$\hat{a} := \frac{3}{8+7+5} = \frac{3}{20} = 0.15.$$

4) Se $E(X)$ non dipende dal parametro incognito a, si usi allora il momento secondo uguagliandolo alla media quadratica.

Esempio 4 bis. Per una densità uniforme $\mathbb{U}[-u, u]$ è

$$E(X) = \frac{u-u}{2} = 0$$

che non dipende dal parametro incognito $a = u$. Con il momento secondo $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f_a(x) \, dx$, ora che la densità è $\frac{1}{2\,u}$ fra $-u$ e u,

$$E(X^2) = \int_{-u}^{u} \frac{x^2}{2\,u}\,dx = \left[\frac{x^3}{6\,u}\right]_{-u}^{u} = \frac{u^3}{6\,u} - \frac{-u^3}{6\,u} = \frac{u^3}{3\,u} =$$

$$= \frac{u^2}{3} =^{EQ} \frac{1}{n}(X_1^2 + ... + X_n^2) \quad \leftarrow \textit{media quadratica}$$

$$\rightarrow \quad \hat{u} := \sqrt{\frac{3\,(X_1^2 + ... + X_n^2)}{n}}\,.$$

A un livello superiore si considerano parametri 2-dimensionali, come $a := (\mu, \sigma^2)$, ottenendosi un sistema di equazioni.

glianza del parametro λ della legge esponenziale:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n} \,. \tag{69}$$

(Che non è non distorto). [73]

[73] Per lo studente interessato, ecco i dettagli sugli stimatori di massima verosimiglianza. Lo stimatore $\hat{a}$ *di massima verosimiglianza* "cerca di essere" quello che renderebbe massimamente probabile l'uscita di x_1,...,x_n, se a valesse $\hat{a}$. Se per esempio avremo una sola determinazione di $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 noto, ovviamente stimeremo $\hat{a} := \hat{\mu} := X_1$. (Si disegni la campana gaussiana col massimo in μ).
Naturalmente, trattandosi di una densità continua, se $\mu = x_1$, la probabilità di quella particolare uscita x_1 è 0 comunque, come per qualunque altro valore e con qualunque valore del parametro μ, ma è chiaro che $\mu := x_1$ "cerca di essere" quello che renderebbe massimamente probabile l'uscita x_1 perchè almeno con quel valore di μ la densità ha un massimo in x_1.
Meno evidente è $\hat{\mu}$ se $n \geq 2$, ma si dimostra che è la media campionaria $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ perchè la densità congiunta, prodotto delle densità $f_\mu(x)$ per l'indipendenza, calcolata in x_1,...,x_n,

$$f_\mu(x_1) \cdot ... \cdot f_\mu(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot ... \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ha un punto di massimo in $\bar{X}$ perchè lo ha il suo ln

$$n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} - \Big(\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2} + ... + \frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

come si vede derivando rispetto al parametro, in questo caso μ,

$$0 - \Big(\frac{x_1-\mu}{\sigma^2} + ... + \frac{x_n-\mu}{\sigma^2}\Big)$$

e uguagliando a 0: $n\,\mu = x_1 + ... + x_n \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) = \bar{X}_n$.

Massima verosimiglianza: il metodo generale Generalizzeremo come segue il procedimento visto nell'esempio.
In questa trattazione elementare, prenderemo come stimatore di massima verosimiglianza $\hat{a}$ (di un parametro incognito a di una densità $f_a(x)$ per il resto nota) lo zero, se esiste unico (ad un livello superiore si considera il caso di non unicità) della derivata rispetto ad a del logaritmo naturale

$$\ln f_a(x_1) + ... + \ln f_a(x_n)$$

della funzione di verosimiglianza

$$f_a(x_1) \cdot ... \cdot f_a(x_n).$$

Procederemo allora con questi passaggi:
1) calcolo di $f_a(x_1) \cdot ... \cdot f_a(x_n)$ lasciando indicati x_1,...,x_n (cioè considerandoli variabili reali e non costanti numeriche);
2) calcolo del logaritmo naturale della predetta funzione;
3) derivazione della predetta funzione rispetto al parametro a;
4) uguagliamento a 0 della predetta funzione;
5) risoluzione dell'equazione.

Quello zero trovato, in termini di X_1,...,X_n è lo stimatore di massima verosimiglianza inteso come funzione (ed è una variabile aleatoria), per esempio

$$\hat{a} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$$

e in termini di x_1,...,x_n è lo stimatore di massima verosimiglianza inteso come valore dello stimatore, nel caso specifico di un campione x_1,...,x_n considerato, per esempio

$$\hat{a} := \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$$

e quando a x_1,...,x_n si sostituiscano i loro valori, è un numero, per esempio

$$\hat{a} := \frac{1}{3}(8 + 7 + 5) = \frac{20}{3} \approx 6.67.$$

Ad un livello superiore, si considerano anche parametri 2-dimensionali, per esempio $a := (\mu, \sigma^2)$. (Là sono incogniti sia μ che σ^2).

Esempio: parametro λ dell'esponenziale Ora il parametro incognito è $a := \lambda$ e la densità

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x} & \textit{se } x \geq 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} .$$

La parte della definizione per $x < 0$ non è rilevante e similmente avviene per tutti i casi di interesse pratico in cui la densità è nulla per $x < 0$. (E per tutti i casi di questa trattazione elementare).

1) calcolo di $f_a(x_1) \cdot ... \cdot f_a(x_n)$ lasciando indicati x_1,...,x_n:

$$\forall\, x_1, ..., x_n \geq 0 \qquad f_\lambda(x_1) \cdot ... \cdot f_\lambda(x_n) = \lambda\, e^{-\lambda\, x_1} \cdot ... \cdot \lambda\, e^{-\lambda\, x_n} =$$

$$= \lambda^n\, e^{-\lambda\,(x_1 + ... + x_n)}$$

2) Calcolo del logaritmo naturale della predetta funzione:

$$n \ln \lambda - \lambda\,(x_1 + ... + x_n)$$

3) derivazione della predetta funzione rispetto al parametro λ:

$$\frac{n}{\lambda} - (x_1 + ... + x_n)$$

4) uguagliamento a 0 della predetta funzione:

$$\frac{n}{\lambda} - (x_1 + ... + x_n) =^{EQ} 0$$

5) risoluzione dell'equazione:

$$\lambda = \frac{n}{x_1 + ... + x_n} .$$

Infine, lo stimatore del parametro λ della legge esponenziale risulta

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

dove si è riconosciuto il reciproco della media campionaria $\bar{X}_n$.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (66), (67), (68), (69), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

Naturalmente bisogna conoscere anche le formule di media e varianza, riportate in questa Lezione, che sono state già illustrate in Statistica Descrittiva.

57 Intervalli di fiducia e caso di μ di $N(\mu, \sigma^2)$

57.1 Introduzione agli intervalli di fiducia

Se X è una variabile aleatoria normale $N(\mu, \sigma^2)$ con μ incognito, e ne avremo un campione aleatorio X_1,...,X_n (variabili aleatorie indipendenti tutte con la stessa legge $N(\mu, \sigma^2)$) oppure ne abbiamo delle determinazioni (numeri) x_1,...,x_1, possiamo stimare μ con la media campionaria $\hat{\mu} := \bar{X}_n$ e allora numericamente $\hat{\mu} = \bar{x}_n$. Potrebbe essere per esempio $\bar{x}_n \approx 2.019$ sia se $n = 1$ sia se $n = 100$: la *stima puntuale* ottenuta non distingue i due casi mentre è chiaro che nel secondo caso il valore 2.019 è molto più "sicuro" se non nella sua esattezza (che comunque ha probabilità 0) almeno nella sua vicinanza al valore vero.

Questo della media aritmetica è il modo antico di fare nella Statistica, anche Medica.
Invece il modo moderno è quello di dare un intervallo di valori in cui *sperabilmente* sta il valore vero, come ora mostreremo.

La *stima intervallare* è costituita da 2 stimatori $\hat{u}$ e $\hat{v}$ tali che il parametro incognito, sia ora esso a (per esempio μ di $N(\mu, \sigma^2)$) sia nell'*intervallo aleatorio* $[\hat{u}, \hat{v}]$ con probabilità $\geq 95\%$

$$P(a \in [\hat{u}, \hat{v}]) \geq 95\% \qquad \text{e secondo altri Autori } =$$

fino a che $\hat{u}$ e $\hat{v}$ sono variabili aleatorie dipendenti da X_1,...,X_n, cioè <u>prima</u> di venire determinate coi dati numerici x_1,...,x_n: dopo, il parametro a o sta o non sta nell'intervallo determinato, e sarebbe arduo anche solo definire in che senso si potrebbe attribuire una probabilità a quel fatto; si potrebbe farlo solo con la concezione soggettiva della probabilità ma con essa si può proporre *qualunque* valore di probabilità. (È un po' come chiedersi che probabilità ha 2019 di essere primo: o è primo o non lo è, non c'è una grande questione probabilistica). La questione è sottile e di fatto diffusissima è la credenza erronea che a stia nell'intervallo di confidenza con probabilità 95%, o più in generale $(1-\alpha)100\%$. L'articolo scientifico riportato in questo link-> su sito governativo statunitense (associato al PubMed)

> provide an explanatory list of 25 misinterpretations of P values, confidence intervals, and power.

Fissati i valori x_1,...,x_n e conseguentemente i valori di $\hat{u}$ e $\hat{v}$ non si parla più di probabilità ma di *(livello di) confidenza*, p.es. 95%.

Scriveremo per esempio

$$a \in [1.9, 2.1] \quad \alpha = 0.05$$

ma altri Autori scriveranno diversamente e variamente, per esempio

$$\text{C.I.}_{95} = 1.9 - 2.1$$

dove C.I. sta per *confidence interval* e 95 sta per 95% ovvero $\alpha = 0.05$.

Tutto questo si estende mutando la soglia 95% in qualunque altro *livello* $1-\alpha$, e normalmente si usano anche 90% e 99%, e si estende a qualunque parametro incognito di una densità per il resto nota.

Il complemento α di $1-\alpha$ si chiama *(livello di) significatività*, e in generale è $5\% = 0.05$ o $10\% = 0.1$ o $1\% = 0.01$.

Purtroppo α e $1-\alpha$ vengono scambiati fra loro nei vari testi.

57.2 Intervalli di fiducia per μ per campioni gaussiani

Precisiamo dapprima che *intervallo di fiducia* e *intervallo di confidenza* sono sinonimi.

In questo paragrafo considereremo, per una $N(\mu, \sigma^2)$:
• la stima intervallare di μ essendo noto σ^2;

• la stima intervallare di μ essendo ignota anche σ^2.

Tutte le formule di questo paragrafo valgono per campioni gaussiani e (approssimatamente) anche per campioni non gaussiani se la numerosità è $n \geq 30$ e la densità non è "troppo" asimmetrica.

Per μ con σ^2 <u>nota</u>, intervallo di fiducia bilatero centrato al livello (di confidenza) $1 - \alpha$, dove α è "piccolo", come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1 - \alpha$, "grande"):

$$\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad (\alpha = ...) \tag{70}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha = ...)$$

(si specifichi α se noto) e in particolare ricordiamo il valore $\phi_{0.975} \approx 1.96$ da cui l'intervallo classico con livello di confidenza del 95%, cioè $\alpha = 0.05$,

$$\left[\bar{X}_n - 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (\alpha = 0.05) \tag{71}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

Come sopra, per μ con σ^2 <u>non nota</u>, caso più verosimile:

$$\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] \quad (\alpha = ...) \tag{72}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad (\alpha = ...)$$

(si specifichi α se noto) con i quantili di Student e la radice quadrata S_n dello stimatore S_n^2 della varianza.

Si noti che esistono infiniti intervalli bilateri allo stesso livello, non centrati in $\bar{X}_n$, e 2 unilateri; ne mostreremo solo 1 unilatero.

Per μ, un intervallo <u>unilatero</u> al livello di confidenza $1-\alpha$:

$$\Big] -\infty,\ \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha}(n-1)\Big]. \quad \textit{(Qua ovviamente } \sigma^2 \textit{ non nota).} \tag{73}$$

(Si specifichi α se noto).

La quantità $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ che ricorre nelle precedenti formule ha un nome:

$$\textit{errore standard} := \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{74}$$

e potrebbe trovarsi abbreviato *se*, dall'inglese.

Note sui quantili. I valori dei quantili di Student si trovano sulle tavole, cartacee o sulla rete, di non immediata lettura purtroppo, e vengono calcolati da molti software.
Per grandi valori di n, i quantili di Student possono in pratica sostituirsi coi quantili normali, le cui tavole sono di più facile lettura. Questa sostituzione diventa possibile perchè per grandi valori di n lo stimatore S_n^2 tende a σ^2, cosicchè di fatto la varianza diventa "sperabilmente nota" e (circa) uguale a S_n^2.
Non faremo mai quest'approssimazione incerta, preferendogli la formula (72), ma ci si aspetti di trovarla nei testi scientifici, in particolare l'incerta formula per il classico 95%

$$\bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

che eviteremo per grandi n ed eviteremo come la peste per piccoli n. Certo per $n > 120$ l'approssimazione 1.96 non è cattiva; ecco alcuni quantili di Student per $\alpha = 0.05$ ovvero $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$:

30 2.042
40 2.021
60 2.000
120 1.980
∞ 1.960

ed eccolo, infine al limite, l'1.96.

D'altra parte, è inutile cercare qua il pelo nell'uovo, quando poi nella pratica l'1.96 stesso viene approssimato spesso con 2, da cui la classica formulazione *pratica*, che troviamo su Wikipedia (in inglese) alla voce Confidence interval:

plus or minus twice the standard error

cioè

$$95\%\ \text{C.I.:} \quad \bar{X}_n \pm 2\,\frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{75}$$

di largo uso *pratico*, ma la eviteremo, preferendogli la formula (72). Ma può essere utile per semplici stime a mente.

Tavole (stampabili) dei quantili normali, di Student e del chi quadrato (e altre) si trovano per esempio a questo `link->`

Ecco un esempio di intervallo di fiducia tratto da un articolo scientifico riportato su PMC, sito governativo statunitense:

> The seroprevalence of latent toxoplasmosis in subjects involved in traffic accidents (N = 146) and in the general population living in the same area (N = 446) was compared [...] subjects with latent toxoplasmosis had a 2.65 (C.I.$_{95}$= 1.76-4.01) times higher risk of an accident than the toxoplasmosis-negative subjects.

(Si noti che la *stima puntuale* 2.65 non è al centro dell'intervallo $[1.76, 4.01]$, che è bilatero ma non centrato).

ESCERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\approx$ Conoscendo la varianza 3.2 di una variabile aleatoria normale si determini l'intervallo di fiducia bilatero consueto della media al livello 95% relativamente a questo campione

-1.32 3.78 1.58 1.55 3.96 0.85 4.78 3.74 3.25 0.99

esprimendolo in entrambe le forme usuali: $a \pm b$, e anche $[u, v]$.

Svolgimento.

La media degli $n = 10$ dati é 2.316.

Consideriamo la classica formula dell'intervallo di fiducia al 95% ovvero 5%

$$\mu = \bar{X}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

per la quale ora troviamo $2.316 \pm 1.96 \frac{\sqrt{3.2}}{\sqrt{10}}$ e a conti fatti

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.316 \pm 1.109 \quad (\alpha = 0.05) \\ \\ \mu \in \left[1.207, 3.425\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

ovvero, con sole 3 cifre significative come nei dati originali,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.32 \pm 1.11 \quad (\alpha = 0.05) \\ \\ \mu \in \left[1.21, 3.42\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

(Si potrebbe obiettare che un corretto arrotondamento a 3 cifre significative di 3.425 é 3.43 e non 3.42; questo é vero ma il 3.425 era giá esso stesso un arrotondamento, di 3.4247..., e arrotondando a 3 cifre significative quest'ultimo, che é il vero valore, si ottiene appunto 3.42).

(I valori erano stati ottenuti simulando $N(2.4, 3.2)$).

ESERCIZIO. (Salvo la contestualizzazione è tratto dal libro di Paolo Baldi citato).
$*$ Per il campione gaussiano di varianza 3.61 (che potrebbe essere costituito per esempio dai pesi in grammi di animali da laboratorio di una certa fissata età o di semi o frutti di interesse fitoterapico, se per essi è supposta nota la varianza in base a ricerche precedenti)

7.63 12.22 8.74 7.95 13.43 8.15 9.22 8.14 7.04 9.56

si determini l'intervallo di fiducia consueto (bilatero, centrato) con $\alpha = 0.05$, nella forma $[a, b]$.

SVOLGIMENTO

Essendo nota e perfino dichiarata la varianza, è da intendersi che l'*intervallo di fiducia consueto (bilatero, centrato)* sia l'intervallo di fiducia consueto (bilatero, centrato) per la media.
Ricordando la sua formula

$$\bar{X}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (\alpha = 0.05)$$

ora con $n = 10$ e $\sigma^2 = 3.61$ e allora $\sigma = 1.9$ si ha

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{1.9}{\sqrt{10}} \approx 1.178$$

e la media

$$\bar{X}_{10} = \frac{1}{10}(x_1 + ... + x_{10}) = 9.208$$

e in definitiva si trova l'intervallo di fiducia 9.208 ± 1.178 ($\alpha = 0.05$) o piuttosto, senza decimali qua veramente poco significativi, 9.21 ± 1.18, e qualcuno direbbe perfino 9.2 ± 1.2, che scritto nella forma $[a, b]$ richiesta è infine

$$\boxed{[8.03, 10.39] \qquad (\alpha = 0.05)}$$

e in effetti anche validamente

$$\boxed{[8, 10.4] \qquad (\alpha = 0.05)}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (70), (71), (72), (74), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
In particolare, con le (73), (75), bisognerebbe saper operare se vengono fornite.

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Per una v.a. $\mathbb{U}[0, a]$ o $\mathbb{U}\{0, a\}$ (uniforme fra 0 e a, continua o discreta)

$$\hat{a} := 2\,\frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

è lo *stimatore dei momenti* del parametro a.

In Medicina e Farmacia, gli errori di I e II specie si presentano anche nella considerazione dei test diagnostici.

In ambito medico alcuni considerano

ipotesi nulla: la malattia è presente

altri

ipotesi nulla: malattia non presente.

Con riferimento al secondo modo di impostare la questione, si ha allora questo schema:

	sano	malato
positivo	falso positivo: errore di I specie *male respingo ipotesi vera*	vero positivo: ottimo: trovato!
negativo	vero negativo bene ma perso tempo	falso negativo: errore di II specie (condizione non rilevata)

In quest'ottica, il peggio sarebbe curare un sano, il falso positivo a un test diagnostico, a rischio di danneggiarlo: era già sano! PRIMUM NON NOCERE.

58 Intervalli di fiducia per la varianza

Per σ^2 con μ <u>non nota</u>, (un) intervallo di fiducia <u>bilatero</u> al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è "piccolo", come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, "grande"):

$$\left[\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\,S_n^2\,,\ \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\,S_n^2\right]. \quad \text{\scriptsize (\textit{Non centrato in } } S_n^2\text{\scriptsize)}. \tag{76}$$

Come sopra, un intervallo <u>unilatero</u>:

$$\left[0\,,\ \frac{n-1}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\,S_n^2\right]. \tag{77}$$

Nota 1. Le 2 formule soprastanti valgono per campioni gaussiani e (approssimatamente) anche per campioni non gaussiani se la numerosità è $n \geq 30$ e la densità non è "troppo" asimmetrica.

Nota 2. I quantili del chi quadrato, oltre a venire calcolati (approssimatamente) da molti software, si trovano (approssimati) per alcuni tipici valori di α e piccoli valori di n su apposite tavole numeriche, e poi vale (teorema) l'approssimazione

$$\forall\, n \geq 30 \qquad \chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}\Big(\phi_\alpha + \sqrt{2\,n-1}\Big)^2. \tag{78}$$

Nota 3. Si possono considerare anche intervalli di fiducia per altri parametri e altri tipi di variabili aleatorie, per esempio↑ per p di $B(1,p)$.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria la formula (76), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
In particolare, con le (77), (78) bisognerebbe saper operare se vengono fornite.

XII— Test statistici

59 I Test Statistici

Dalle determinazioni $x_1,...,x_n$ di un campione aleatorio $X_1,...,X_n$ tratto da una v.a. X di densità nota salvo un suo parametro a, vogliamo rispondere con “sì” o “no” , con “ragionevole certezza statistica” ovviamente, a una domanda sul parametro incognito. La domanda potrebbe essere per esempio $\mu > 0$, oppure $p = \frac{1}{2}$, che nella realtà sensibile può significare per esempio la regolarità di una moneta, modellizzata con una v.a. $B(1, p)$.
Il test statistico si preordina – prima di avere i dati i mano ovvero prima di fare un esperimento nella realtà sensibile – formulando un’ipotesi statistica, indicata con H o H_0, *ipotesi nulla*, e una ipotesi *alternativa*, indicata con A o rispettivamente H_1, per esempio

$$H : p = \frac{1}{2} \qquad A : p \neq \frac{1}{2}\,.$$

Anticipiamo che l’ipotesi nulla H va identificata in generale col caso che si spera che non sia. (“Vogliamo A!”).
Un esempio minimo potrebbe essere così: lanceremo 5 volte la moneta e rifiuteremo l’ipotesi di regolarità se viene testa 0 o 5 volte, perchè se la moneta è regolare quei risultati hanno complessivamente probabilità 1/16, un po’ pochino. (In realtà la statistica usuale viene fatta “a 1/20”, cioè al 5 ovvero 95%). L’insieme $\{0, 5\}$ è la *regione critica* ovvero di rigetto dell’ipotesi (nulla). La regione critica di solito viene espressa come un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ in cui una certa funzione del campione aleatorio può cadere (e allora rifiutiamo H) o non cadere. In questi termini, potremmo porre la regione critica $\{0, 5\}$ e verificare se vi cade $X_1 + ... + X_5$ o più usualmente porre $D := \{0, 1\}$ e verificare se vi cade $\bar{X}_5$. In casi più significativi di questo microscopico esempio la regione critica di solito ha una forma del tipo $x > x_0$ (test unilatero) oppure $x < x_1 \vee x > x_2$ (test bilatero).
Vediamo un altro esempio. Sia U la variabile aleatoria che è la glicemia di un soggetto qualunque di un campione di 20 soggetti (persone iperglicemiche) e V la glicemia dopo la somministrazione

di un certo farmaco. Ci potrebbe interessare se mediamente la glicemia diminuisce con quel farmaco cioè se la media (parametro incognito) della variabile aleatoria $X := U - V$ è > 0.
Si formula l'ipotesi nulla: il farmaco non riduce la glicemia (in realtà spero che riduca la glicemia: ipotesi alternativa). Misuriamo la glicemia nei 20 soggetti (campione, o più precisamente determinazione $u_1, \ldots, u_{20}$ di un campione aleatorio $U_1, \ldots, U_{20}$). Diamo ai 20 soggetti il farmaco. Misuriamo di nuovo la glicemia dei 20 soggetti ottenendo così 20 determinazioni $v_1, \ldots, v_{20}$ della variabile aleatoria V. Facciamo 20 sottrazioni ottenendo 20 determinazioni $x_1, \ldots, x_{20}$ della variabile aleatoria X, differenza *prima-dopo*. Della variabile aleatoria X vogliamo sapere se la media (speranza matematica) è > 0. L'idea ingenua è fare la media aritmetica dei 20 numeri e concludere che se è > 0 il farmaco ha diminuito la glicemia. Se fosse così in questo e analoghi casi, la statistica inferenziale non servirebbe, ma non è così: quella verifica non dice di per sè sostanzialmente nulla perchè non distingue l'effetto del farmaco dalle inevitabili fluttuazioni casuali di X, che, non per niente, è da considerarsi una variabile *aleatoria*. (Non possiamo certo aspettarci un effetto *deterministico* del farmaco, che *sempre* riduca la glicemia). È invece necessario applicare un opportuno test statistico, cioè di fatto applicheremo una non banale formula che ci potrà dire, nel caso che la media aritmetica degli x_i sia > 0, che quell'effetto con ragionevole plausibilità non è casuale. Se invece la media aritmetica viene negatitiva l'esperimento è andato male e la statistica non ci aiuta ulteriormente. Alla fine rifiutiamo o non rifiutiamo l'ipotesi nulla. Speriamo di rifiutarla. Queste sono l'ipotesi nulla e l'alternativa nell'esempio considerato:

$$H : \mu \leq 0$$

$$A : \mu > 0.$$

Alcuni dicono "accettare" l'ipotesi nulla ma il modo corretto di vedere le cose è "non rifiutarla". Non abbiamo dimostrato che è vera: semplicemente non siamo riusciti a dimostrarla *verosimilmente falsa*.

Media degli X_i, differenza prima-dopo

Statistica ingenua:

La glicemia mediamente non è diminuita; il farmaco non funziona	La glicemia è diminuita; il farmaco funziona

0

Statistica inferenziale:

Non rifiutiamo l'ipotesi che la glicemia sia uguale o aumentata ovvero $\mu \leq 0$	Rifiutiamo l'ipotesi che la glicemia sia uguale o aumentata ovvero $\mu \leq 0$

0	*soglia*	È plausibile che il farmaco funzioni.

Insomma X deve essere ben < 0, non solo < 0, per escludere con ragionevole verosimiglianza la fluttuazione casuale.

Quanto < 0, lo dicono apposite formule che vedremo, che fanno uso dei quantili, di Student in questo caso.

I quantili si trovano e soprattutto si trovavano su tavole numeriche, che permettevano di ottenere la "ragionevolezza al 95%" o ancor meglio al 99%, e anche con altri *livelli di confidenza* tipici. Diciamo subito che nella pratica si trova scritto indifferentemente "al 99%" o "all'1%" con lo stesso significato, e similmente con 95 e 5, eccetera: purtroppo c'è un'ambiguità terminologica.
Da adesso in questo paragrafo facciamo rifermento al valore "piccolo": non 0.95 ma 0.05, non 0.99 ma 0.01, eccetera.
Oggi quei quantili vengono calcolati da numerosi software. L'uso di questi software ha permesso nei tempi moderni un passo ulteriore: trovare proprio la soglia discriminante, l'ultimo valore per il

quale si passa dal non rifiutare al rifiutare l'ipotesi nulla, e questo valore soglia può ben essere diverso da 0.05 o 0.01, per esempio può essere 0.046, ed è il p-value.
Questo 0.046 è proprio il p-value dei 10 000 lanci di moneta con 5 100 teste prima considerato, come si potrebbe calcolare col computer: rifiutiamo l'ipotesi (nulla) di regolarità (per poco). Ma al livello dell'1%, ovvero al 99% secondo altri Autori, non possiamo rifiutarla. (Stiamo cercando di fare un'affermazione troppo categorica ma l'esperimento non ce lo consente; ce lo consentirebbe se fossero venute molte più teste.).

L'ideale è trovare un p-value piccolissimo, magari $< 10^{-6}$, ma almeno ≤ 0.05.

Definizione. Formalmente il p-value è definito come la probabilità di ottenere un valore uguale o più estremo di quello ottenuto, nell'ipotesi che sia vera l'*ipotesi nulla*.

In casi semplici il p-value può essere calcolato a mano, per esempio con i 5 lanci di moneta prima considerati, per rifiutare l'ipotesi (nulla) della regolarità, il risultato T,T,T,T,T ha p-value $1/16 = 0.0625$ e l'ipotesi non viene rifiutata al livello del 5% ovvero 0.05 ovvero del 95% ovvero 0.95. Il valore $\frac{1}{16}$ viene da

$$= P(T,T,T,T,T \vee C,C,C,C,C) =$$

$$= P(T,T,T,T,T) + P(C,C,C,C,C) =$$

probabilità di 5 successi o 0 successi, casi ugualmente estremi, e di più estremi di quanto ottenuto non ce n'è, con $B(5, \frac{1}{2})$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}\,.$$

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Lo stimatore $\hat{a}$ *di massima verosimiglianza* "cerca di essere" quello che renderebbe massimamente probabile l'uscita di x_1,...,x_n, se a valesse $\hat{a}$. Il metodo per trovarlo non è semplicissimo.
Ci limitiamo a dare la formula dello stimatore di massima verosimiglianza del parametro λ della legge esponenziale:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n}.$$

Passeggiate aleatorie.
Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, versione inglese alla voce "Random walk", in italiano *passeggiata aleatoria"*:

> A random walk is a mathematical object, known as a stochastic or random process, that describes a path that consists of a succession of random steps on some mathematical space such as the integers. An elementary example of a random walk is the random walk on the integer number line, $\mathbb{Z}$, which starts at 0 and at each step moves +1 or −1 with equal probability. Other examples include the path traced by a molecule as it travels in a liquid or a gas, the search path of a foraging animal, the price of a fluctuating stock and the financial status of a gambler can all be approximated by random walk models, even though they may not be truly random in reality.
> (...) If a and b are positive integers, then the expected number of steps until a one-dimensional simple random walk starting at 0 first hits b or $-a$ is ab.

Cioè detto X il numero di passi fino al raggiungimento di b o $-a$,

$$E(X) = a \cdot b.$$

`Link->` figura. Su queste basi ipotizziamo ora un “parametro vitale complessivo”, che non riusciamo in questo esempio semplificato a specificare nei dettagli, ma che comunque non deve superare il valore soglia 7, nè scendere sotto il valore soglia -7, variando di anno in anno nell’individuo, salendo o scendendo di 1 con uguale probabilità 50%. In base a quanto sopra detto, con $a = b = 8$, la speranza matematica della vita è 64 anni, cioè $8 \cdot 8$. Ma se ora (come in un videogioco si danno le vite supplementari) supponiamo che la prima volta che una soglia (8 o -8) viene raggiunta, un farmaco modifica di 1 o -1 il parametro vitale nella direzione giusta, ecco che al nostro ipotetico soggetto la Farmacia regala altri anni di vita!

60 Errori di I e II Specie

Come detto, prima di eseguire un test statistico dobbiamo formulare un'ipotesi nulla H e la complementare ipotesi alternativa A. Per esempio

$$H: \quad \mu \le 0$$
$$A: \quad \mu > 0$$

dove μ potrebbe essere la media di una variabile aleatoria X di cui disporremo di un campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$. I ruoli delle 2 ipotesi non sono interscambiabili: in linea generale come ipotesi alternativa va fissata quella che speriamo vera (e come ipotesi nulla quella che ci avrebbe fatto perdere tempo).
Tratto ovvero prodotto ovvero rilevato il campione $x_1,\ldots,x_n$, ne calcoliamo l'opportuna funzione che la statistica ci insegnerà a seconda del tipo di test, sia essa ora $g(x_1,..,x_n)$, per esempio la media $\bar{x}_n$, ci sono 4 casi relativamente alla regione critica D, a $g(x_1,..,x_n)$, e alla verità dell'ipotesi H:

1) $g(x_1,..,x_n) \in D$ ed è vera H:
male respingo ipotesi vera: errore di prima specie.
2) $g(x_1,..,x_n) \in D$ ed è vera A:
bene respingo ipotesi falsa: è il caso sperato. (α)
3) $g(x_1,..,x_n) \notin D$ ed è vera H:
non respingo ipotesi vera: ho perso tempo.
4) $g(x_1,..,x_n) \notin D$ ed è vera A:
male non respingo ipotesi falsa: errore di seconda specie.

L'errore di prima specie è considerato molto più grave.
Ad esempio per un farmaco si può mettere l'ipotesi che non curi, sperando di falsificarla con l'esperimento.
La cosa peggiore è diffondere a milioni di persone un farmaco che non cura, solo perchè in un *trial clinico* – necessariamente molto più limitato – ha dato buona prova di sè, causando appunto l'errore di prima specie – di fatto sempre possibile.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, in cui chiamano *null hypothesis H0* l'*ipotesi nulla* H_0, ma purtroppo *hypothesis* quella che in questa trattazione è chiamata *alternativa*:

> Hypothesis: "A patient's symptoms improve after treatment A more rapidly than after a placebo treatment."
>
> Null hypothesis (H0): "A patient's symptoms after treatment A are indistinguishable from a placebo."
>
> A Type I error would falsely indicate that treatment A is more effective than the placebo, whereas a Type II error would be a failure to demonstrate that treatment A is more effective than placebo even though it actually is more effective.

Stabiliamo cosa intendiamo per "il farmaco funziona".
Per esempio

aumenta la sopravvivenza a 5 anni rispetto al placebo
riduce la massa tumorale
riduce la glicemia negli iperglicemici.

I 4 casi in dettaglio sono questi.

1) e 3) è vera l'ipotesi H: il farmaco è inutile o dannoso (esempio: sopravvivenza a 5 anni uguale o diminuita).
2) e 4) è vera l'alternativa A: il farmaco è utile (esempio: sopravvivenza a 5 anni aumentata).

1) e 2) La sperimentazione dà esito buono.

1) Per caso i soggetti trattati sono vissuti a lungo e il farmaco dannoso fa bella figura e magari si diffonde: GRAVISSIMO.

2) I soggetti trattati sono vissuti a lungo grazie al farmaco che giustamente fa bella figura

3) e 4) La sperimentazione dà esito cattivo.

3) non respingo l'ipotesi che il farmaco sia inutile o dannoso;

il farmaco inutile o nocivo è stato correttamente riconosciuto tale sperabilmente non verrà commercializzato. Ho perso tempo, speravo fosse utile.

4) Per caso i soggetti trattati sono vissuti poco ma il farmaco in generale funziona: il farmaco utile viene purtroppo abbandonato. Peccato.

Gli errori di prima e seconda specie hanno un analogo molto suggestivo negli errori giudiziari. L'ipotesi nulla è l'innocenza:

	innocente	colpevole
condannato	errore di I specie	ottimo
assolto	bene (ma perso tempo)	errore di II specie

Sull'assoluzione del colpevole, errore meno grave della condanna di un innocente, vale il classico: IN DUBIO PRO REO.
(Ovviamente lo scopo dell'apparato giudiziario non è assolvere gli innocenti ma condannare i colpevoli: se facesse questo e non altro realizzerebbe il suo compito, per questo è scritto "perso tempo").

In Medicina e Farmacia, gli errori di I e II specie si presentano anche nella considerazione dei test diagnostici.

In ambito medico alcuni considerano

ipotesi nulla: la malattia è presente

altri

ipotesi nulla: malattia non presente.

Con riferimento al <u>secondo modo</u> di impostare la questione, si ha allora questo schema:

	sano	malato
positivo	falso positivo: errore di I specie *male respingo ipotesi vera*	vero positivo: ottimo: trovato!
negativo	vero negativo bene ma perso tempo	falso negativo: errore di II specie (condizione non rilevata)

In quest'ottica, il peggio sarebbe curare un sano, il falso positivo a un test diagnostico, a rischio di danneggiarlo: era già sano! PRIMUM NON NOCERE.

Nota sul parametro medico su cui si fa il test. Per un chemioterapico si può ipotizzare di testare la sopravvivenza a 5 anni (confrontando farmaco e placebo); oppure la riduzione della massa tumorale in un breve tempo; se poi in un tempo doppio il paziente muore, questo non rientra nella statistica. È ovvio che la sopravvivenza a 5 anni richiede una sperimentazione lunghissima, e costosa.

Ma per quanto di altissimo valore, anche quel solo parametro è poco, nella complessità della realtà: non si è tenuto conto della qualità della vita in seguito alla somministrazione del farmaco.

Tutt'altra questione: non si è tenuto conto neppure del costo economico: gli stessi soldi il Sistema Sanitario potrebbe spenderli con maggiore beneficio complessivo per la cura di altre malattia. (Resource Management, e in caso di sanità privata anche ROI, Return On Investment).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H e alternativa A, ad un certo livello α, la regione critica sia $[20.18, +\infty[$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 19.2, e che sia vera A. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non è possibile rispondere perchè non è specificato il quantile

SVOLGIMENTO

Lo stimatore T vale 19.2 che $\notin$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) è falsa (perchè è vera l'alternativa). Allora "male non respingo ipotesi falsa", cioè

$$\boxed{\text{Si commette un errore di seconda specie}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H, e alternativa A vera, al livello $\alpha = 0.1$, la regione critica sia $T > 734.66$ e il calcolo dello stimatore del test dia $T = g(x_1, ..., x_n) = 786.45$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non ha senso perchè α deve essere ≤ 0.05 ossia 5%.

SVOLGIMENTO

Lo stimatore cade nella regione critica, perchè $786.45 > 734.66$, e allora l'ipotesi viene respinta, ed essa è falsa perchè l'alternativa è vera. Siamo nel caso *"bene respingo ipotesi falsa"* che, come è ben noto, per i test statistici

$$\boxed{\text{Era il caso in generale sperato}}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria la formula (α) oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

61 Alcuni Test di Student

In questa Lezione α è un numero "piccolo", diciamo $< 0.2 = 20\%$, tipicamente $0.05 = 5\%$ (oppure $0.01 = 1\%$).

Diremo i test
  al livello di significatività α, o affidabilità
  al livello di confidenza $1 - \alpha$
e altri diranno, e anche noi talvolta, semplicemente,
  al livello α
  al livello $1 - \alpha$, per esempio 95%, da cui traiamo $\alpha = 0.05$.
Stando attenti non i confondono α e il suo complemento: α è piccolo.

61.1 Test di Student per la media $\leq$ e $=$

Supponiamo di avere dei numeri – per esempio parametri fisiologici, naturali o conseguenti ad una terapia – e di chiederci se la loro media è maggiore di 98, per esempio.
A questo la Statistica antica, in pratica la Statistica Descrittiva, risponde molto semplicemente: si fa la media aritmetica e si risponde "sì" se è > 98.
Invece la Statistica moderna, in pratica la Statistica Inferenziale, accetta che la media sia > 98 <u>in maniera statisticamente significativa</u>, o per meglio dire respinge l'ipotesi che sia ≤ 98, solo se la media aritmetica è <u>ben più grande</u> di 98.
Quanto più grande?
Basterà pochissimo se la numerosità è grande.
Ci vorrà molto se la variabilità è grande.
Il tutto è risolto da una formula.

Teorema. Sia X_1,...,X_n un campione gaussiano cioè $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ sono indipendenti (o anche non gaussiano se n è sufficientemente grande), sia μ_0 è un numero reale. Allora (coi soliti stimatori $\bar{X}_n$ e S_n^2 di media evarianza) si hanno questi 2 test al livello $1 - \alpha$ (e altri dicono al livello α; in ogni caso α è “piccolo”, tipicamente 0.05):

$$\begin{cases} H : \mu \leq \mu_0 \\ A : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad rifiuta\ H\ se\ \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} > t_{1-\alpha}(n-1) \quad (79)$$

$$\begin{cases} H : \mu = \mu_0 \\ A : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad rifiuta\,H\,se\ \left|\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}\right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad (80)$$

Quanto grande n, nel caso non gaussiano cioè normale? Dev'essere $n > 120$ secondo Marco Abate, nel suo classico Matematica e Statistica – Le basi per le Scienze della vita.

In pratica. Coi valori $x_1,..,x_n$ si calcola $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{S_n}$, o nel secondo caso il suo valore assoluto, e se supera il quantile si respinge l'ipotesi, altrimenti “non la si respinge”.

Esercizio del libro di Paolo Baldi già citato:

> L'altezza media delle reclute alla visita di leva del 1970 era di 169 cm; 121 reclute vengono scelte a caso nel 1980. I valori di media varianza del campione sono:
>
> $$\bar{X} = 171 \quad \leftarrow intende\ \bar{X}_n\ con\ n{:=}121$$
>
> $$S^2 = 85 \quad \leftarrow intende\ S_n^2\ con\ n{:=}121$$
>
> Si può affermare che l'altezza media delle reclute è aumentata?

(Siccome si vuole dimostrare che l'altezza è aumentata si metta come ipotesi che non è aumentata, e siccome nulla è detto sul livello del test si usi la classica soglia del 5%).

61.2 Campioni indipendenti: un Test di Student

Ecco un test di Student per le medie di 2 campioni indipendenti.
Teorema. Siano $X_1,...,X_n$ un campione aleatorio (gaussiano oppure con n sufficientemente grande) di media μ_X e varianza σ_X^2

sconosciute e $Y_1,..,Y_m$ un campione aleatorio (gaussiano oppure con m sufficientemente grande) di media μ_Y e varianza $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 =: \sigma^2$ (uguale a quella del primo campione e sconosciuta), con le X_i e le Y_i indipendenti fra loro. Siano

$$S_{tot}^2 := \frac{1}{n+m-2}\Big((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2\Big) \tag{81}$$

$$\Big[= \frac{1}{n+m-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_m)^2\Big)\Big]$$

$$T := \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_{tot}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\,. \tag{82}$$

Allora

(1) Si ha questo test (bilatero) al livello $1-\alpha$ (e altri dicono al livello α; in ogni caso α è "piccolo", tipicamente 0.05):

$$\begin{cases} H : \mu_X = \mu_Y \\ A : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases} \qquad rifiuta\ H\ se\ \ |T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \tag{83}$$

(2) (test unilatero) * RIVEDERE - INCERTO - NO 2018-19

$$T < t_{1-\alpha}(n+m-2)$$

definisce una regione critica al livello [di significatività] α per il test

$$H : \mu_X > \mu_Y \qquad A : \mu_X \leq \mu_Y\,.$$

==

Se i 2 campioni hanno uguale numerosità la (82) si semplifica:

$$T := \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}}\sqrt{n}$$

(È un facile calcolo; comunque tale semplificazione non è obbligatoria, si può usare la (82) senza semplificarla).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (79), (80), (81), (82), (83), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

62 Il Test del χ^2, quello basico

62.1 La teoria del Test del χ^2, quello basico

Il primo test del chi quadrato, dei due che considereremo, lo chiameremo semplicemente *Test del chi quadrato*.
Si riferisce a una variabile aleatoria discreta, sia essa X, con un numero finito k di valori che possiamo identificare con k numeri interi, per esempio 0,1 oppure 1,...,6; per fissare le idee diciamo 1,...,k. Nel discorso che segue si possono immaginare, per fissare le idee, $n = 2000$ lanci di un dado. Se abbiamo n determinazioni x_1,...,x_n di X, ce ne sono n_1 che valgono 1, n_2 che valgono 2,..., n_k che valgono k. Sono le *"frequenze assolute (osservate ovvero empiriche)"*. (Dividendole per n si ottengono le *"frequenze relative (osservate ovvero empiriche)"* $\bar{p}_i := \frac{n_i}{n}$, che tendenzialmente dovrebbero assomigliare alle p_i, le probabilità *"teoriche"*, e con esse si ottiene la formula alternativa che daremo in parentesi).
Il test vuole respingere l'ipotesi che la densità di X sia data dai valori $(p_1, ..., p_k)$**.** Per esempio escludere la regolarità di un dado, cioè $H : (p_1, ..., p_6) = (\frac{1}{6}, ..., \frac{1}{6})$, $A : (p_1, ..., p_6) \neq (\frac{1}{6}, ..., \frac{1}{6})$. (Naturalmente gli indici potrebbero essere 0,...,$k-1$).
Fissato *prima* di vedere i dati (come sempre si deve fare in un test statistico serio) il livello di significatività α, tipicamente 0.05, il rifiuto si ha se

$$T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\, p_i)^2}{n\, p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) \quad \left(\text{o: } n \sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{p}_i - p_i)^2}{p_i}\right) \tag{84}$$

purchè

$$n\, p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, ..., k. \tag{85}$$

Se con l'ultima classe si ha $n\, p_k < 5$, si associano le classi $k-1$ e k, e se col nuovo $\tilde{p}_{k-1} = p_{k-1} + p_k$ si ha $n\, \tilde{p}_{k-1} \geq 5$ si fa il test per la nuova v.a. a $k-1$ valori. Per esempio si considera un dado "a 5 valori": 1, 2, 3, 4, $5 \vee 6$, con frequenze assolute n_1, n_2, n_3, n_4, $n_5 + n_6$, e nell'ipotesi p_1, p_2, p_3, p_4, $p_5 + p_6$. Similmente se la prima, o più raramente un'altra probabilità, è troppo piccola, $n\,p_m < 5$, si può provare ad associare 2 classi consecutive.

Purtroppo c'è confusione nelle notazioni delle tavole numeriche. Con il serio rischio di confondere nella pratica α con $1-\alpha$ usando le tavole. Soprattutto di confondere le colonne relative a 0.95 e 0.05. (E in similmente 0.9 con 0.1, e 0.99 con 0.01).
Il quantile q_α di parametro n di solito viene denotato $\chi^2_{1-\alpha}(n)$. In una tavola numerica, si cerchi il valore ≈ 3.84, quantile di ordine $\alpha = 0.95$ relativo al parametro $n = 1$ (in certe tavole denotato r, ν...), **prima riga della tavola**, cioè fissiamo l'attenzione su $X \sim \chi^2(1)$:

se *Link1* *Link2* 3.84 è il primo valore della colonna 0.95, intendete

$P(X \leq 3.84) \approx 0.95$ che è l'α di questa trattazione: q_α, $\chi^2_{1-\alpha}(n)$;

se *Link3* 3.84 è il primo valore della colonna 0.05, intendete

$P(X \geq 3.84) \approx 0.05$ (del tutto equivalente a quella sopra) e bisogna calcolare $1-$ per avere l'α di questa trattazione.
E conseguentemente si intendano tutti i valori della tavola.

Ecco alcuni valori:

su alcune tavole →	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01
su altre tavole →	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
n					
1	0.004	0.02	2.71	<u>3.84</u>	6.63
2	0.10	0.21	4.61	5.99	9.21
3	0.35	0.58	6.25	7.81	11.34
4	0.71	1.06	7.78	9.49	13.28
5	1.14	1.61	9.24	11.07	15.09
6	1.63	2.20	10.64	12.59	16.81
7	2.17	2.83	12.02	14.07	18.48
8	2.73	3.49	13.36	15.51	20.09
9	3.32	4.17	14.68	16.92	21.67
10	3.94	4.87	15.99	18.31	23.21

62.2 Esempio di applicazione del Test del χ^2

Si lancia una moneta 3 volte, e questo lo si fa per 100 volte, ottenendo
 0 teste 31 volte
 1 testa 36 volte
 2 teste 32 volte
 3 teste 1 volta.
Eventualmente associando opportunamente due classi verificare l'ipotesi che la moneta dia testa con probabilità $\frac{1}{3}$. [...]
Esercizio. Nelle stesse ipotesi dell'esempio visto si verifichi l'ipotesi della regolarità della moneta.

● ● ●

Esempio di Wikipedia tratto dal già citato libro di P. Baldi. Con 2000 lanci di un dado con frequenze assolute osservate 388, 322, 314, 316, 344, 316, si rifiuta, al livello del 5%, ovvero del 95%, la regolarità perchè

$$T \approx 12.6 > 11.07 \approx \chi^2_{0.95}(5).$$

(Naturalmente T è T_{2000}).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (84) e (85), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

63 Test del χ^2 di indipendenza

In questa trattazione elementare, verrà considerato solo il caso più semplice, con 4 valori/dati. Fissiamo subito le idee su un esempio. Supponiamo di avere 280 monete uguali di sconosciuta probabilità di dare testa, e che a 50 di esse venga fatta meccanicamente una piccola incisione al centro sulla faccia della testa. Le monete trattate hanno tutte un'uguale sconosciuta nuova probabilità di dare testa. (Di maggiore interesse potrebbe essere il trattamento con un farmaco, e l'eventuale morte a 5 anni, ma le monete e i dadi restano modelli generali ottimali, anche perchè da essi *a priori ci aspettiamo* di default un comportamento casuale, mentre per un farmaco saremmo portati a supporre causalità – contenendo la tal molecola *dovrebbe* fare un certo effetto – eventualmente inesistenti: nella *statistica medica* dobbiamo appunto verificare se funziona, *contando i morti*, per così dire). Lanciamo una volta ciascuno delle 280 monete e contiamo le teste nelle 2 classi. Supponiamo di avere questa situazione (risultato=viene 1)

	non risultato	risultato
non trattati	188	42
trattati	43	7

Naturalmente 43+7 sono le 50 monete trattate, e 188+42 sono le rimanenti 230, non trattate. Il trattamento ha diminuito la probabilità di dare testa? Verrebbe da dire di sì perchè fra i trattati la frequenza relativa di 1 è $7/50 = 0.14$ mentre fra i non trattati è $42/230 = 0.183$ ma dobbiamo ragionevolmente escludere un effetto casuale: tale miglioramento potrebbe apparire per caso anche se a nostra insaputa il tecnico preposto non avesse affatto compiuto l'incisione dichiarata.

Abbiamo una variabile aleatoria X con 2 valori, “trattate” e “non trattate”, e una variabile aleatoria Y con 2 valori, “testa” e “croce”. Il test statistico è definito da

$$H : \text{indipendenza} \qquad A : \text{non indipendenza}$$

(vorremmo escludere l'indipendenza, cioè che l'incisione non abbia prodotto risultato).

Come in tutti gli altri test statisctici che consideriamo, si fisserà un livello di significatività α, tipicamente $0.05 = 5\%$, ovvero un livello di confidenza $1 - \alpha$, tipicamente $0.95 = 95\%$.
(Si ritiene che per correttezza scientifica ovvero deontologica, questo valore vada fissato *prima* di fare i calcoli).

Si calcolerà uno *stimatore* (ovvero *statistica*) T, dalla formula alquanto complessa, e lo si confronterà col quantile $\chi^2_{1-\alpha}(k)$ del chi quadrato con

$$\boxed{k := (m-1) \cdot (n-1) = (\#righe - 1) \times (\#colonne - 1)} \quad (86)$$

gradi di libertà, (qua 1) e se T supera il quantile

$$\boxed{T > \chi^2_{1-\alpha}(k)} \quad (87)$$

si respinge l'ipotesi, altrimenti non la si respinge (che alcuni dicono "si accetta"), al livello di significatività α ovvero di confidenza $1 - \alpha$.

L'intero calcolo può essere fatto online gratuitamente, anche per tabelle più grandi, oltrechè con vari software statistici usati nelle Scienze Applicate.

Si può evitare l'approssimazione che è intrinseca nel test del chi quadrato d'indipendenza col *Test di Fischer esatto*, che ha una formula molto più complicata che viene comunque calcolata in un'istante dai computer.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

64 Note finali sulla Statistica Inferenziale

Leggiamo in un articolo scientifico riportato su PubMed:

> "there is a good chance that statistical significance will be reached only by increasing the number of hypotheses tested in the work. The question is then: is this significant difference real or did it occur by pure chance?
>
> Actually, it is well known that if 20 tests are performed on the same data set, at least one Type 1 error (α) is to be expected. Therefore, the number of hypotheses to be tested in a certain study needs to determined in advance. If multiple hypotheses are tested, correction for multiple testing should be applied or study should be declared as exploratory."

(Il numero 20 corrisponde alla probabilità $5\% = 0.05 = \frac{1}{20}$).

* * * LEZIONE DA SISTEMARE * * *
`Link->`

65 Indice Analitico con Approfondimenti

65.1 Alcuni valori di $P(|X| < x)$ per X normale standard

x	$P(\vert X\vert < x)$
1	≈ 0.68
1.28	≈ 0.8
1.64	≈ 0.9
1.96	≈ 0.95
2	≈ 0.9544
2.58	≈ 0.99
3	≈ 0.9973

(Si noti che questi non sono i valori di $P(X \le x)$) per X normale standard, cioè $\Phi(x)$).

65.2 Algebra astratta

Nell'algebra astratta si considerano operazioni generiche definite in insiemi generici, non identificando le operazioni come somma o prodotto per esempio, nè gli insiemi come $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ per esempio. Facendo quelle scelte di specifici insiemi e specifici insiemi, si ottiene l'*algebra dei numeri*; si veda qua<-- e qua<-- . Nell'algebra astratta per esempio si possono considerare, fra le moltissime altre cose, l'operazione binaria (interna), l'elemento neutro, l'elemento assorbente, l'elemento simmetrico, la proprietà associativa, la proprietà commutativa, la proprietà commutativa. Concetti di livello superiore sono il monoide, il gruppo, l'anello, il corpo e il campo, lo spazio vettoriale.

65.3 Ambiguità notazionale del segno =

• Il segno = viene usato per indicare un'uguaglianza che sussiste fra 2 funzioni eventualmente per 1 o più valori di x, y... i quali vengono ricercati. Si ha cioè un'equazione, per esempio:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0.1 \qquad x^2 + 5x + 6 = 0 \qquad x\,y = 0\,.$$

• Il segno = viene usato per indicare un'uguaglianza fra valori di 2 funzioni che vale $\forall\, x, y...$ del loro dominio, per esempio

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x+y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2$$

cioè per un'identità (funzionale). In questo caso talvolta si usa il simbolo $\equiv$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1 \qquad (x+y)^2 \equiv x^2 + 2\,x\,y + y^2$$

• Il segno = viene usato per indicare una definizione: il termine a destra del segno di uguaglianza ha già senso nella trattazione finora svolta, e il termine a sinistra lo acquisisce in base all'espressione stessa, per esempio:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad x_{n+1} = 2\,x_n\,.$$

Talvolta in questo senso si scrive := invece di =

$$f(x) := x^2 + 1 \qquad \cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad x_{n+1} := 2\,x_n\,.$$

65.4 Ambiguità notazionale dell'esponente -1

Una delle pù gravi ambiguità notazionali è quella dell'esponente -1:

$$a^{-1}$$

indica inequivocabilmente il reciproco $\frac{1}{a}$ di a se a è un numero, ma se è una funzione – e può ben esserlo – cominciano problemi:

$$f^{-1}(x)$$

in questa trattazione significherà sempre l'inversa di $f(x)$ mentre la reciproca la denoteremo $\frac{1}{f(x)}$ e casomai, volendoci del male, $(f(x))^{-1}$. Il problema maggiore si ha quando – e concretamente ciò viene fatto spesso – in lunghi calcoli per brevità di scrittura si omette di indicare la variabile indipendente, e si scrive f intendendo $f(x)$, lasciando nell'incertezza riguardo la scrittura f^{-1}. Così all'atto pratico ci si ritrova sempre con qualcuno che pensa

che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, o il logaritmo il reciproco dell'esponenziale (invece è l'inversa).
Resta il fatto che in un testo diverso da questo, la scrittura

$$\ln^{-1}(x)$$

è ambigua, e può indicare sia $\exp(x)$ che $\frac{1}{\ln(x)}$. In questo testo solo $\exp(x)$.
Inoltre, l'esponente -1 è usato per indicare anche tutta un'altra cosa, la controimmagine, che non è un elemento ma un insieme.

65.5 Ambiguità notazionali della parentesi graffa grande

La parentesi graffa grande – di quella sola ci si occuperà qui – viene usata con almeno 3 diversi significati che vediamo con 3 esempi.
Parentesi graffa (grande) *"selettiva dei casi"*:

$$|x| := \begin{cases} x & \textit{se } x \geq 0 \\ \\ -x & \textit{se } x < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"onnicomprensiva dei casi"*:

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *dei sistemi*, con significato di *et*:

$$\begin{cases} x^2 > 9 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

è chiaro che in tutti questi significati, c'è un *et* "retrostante", ma non in modo immediato.

65.6 Ambiguità notazionale della virgola nei numeri

In Italia un numero come

$$148,128$$

spesso sarà da intendere come 148 virgola 128, poco meno di 150. In generale nella letteratura scientifica internazionale invece sarà da intendere come centoquarantottomilacentoventotto, e la virgola è scritta solo per facilitare la lettura, raggruppando le cifre a 3 a 3. Certo il dubbio ci potrebbe rimanere. Questo numero esprime il volume di Giove a meno di un fattore $10^{10} km^3$, come leggiamo su un sito internet della NASA, e la massa della Terra risulta invece 108.321: ecco che *in questo caso* non ci sono dubbi: quella che spesso in Italia denotiamo con la virgola qua la scrivono col punto.

65.7 Ambiguità notazionali per i logaritmi

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Logaritmo naturale":

> • I matematici sono soliti utilizzare la scrittura "`log(x)`" per intendere $\texttt{log}_e\texttt{(x)}$; altrimenti si è soliti specificare la base nella scrittura (es. $\texttt{log}_{10}\texttt{(x)}$ è il logaritmo in base 10 di x).
> • Ingegneri, biologi e altre professioni generalmente scrivono "`ln(x)`" o (raramente) "$\texttt{log}_e\texttt{(x)}$" per intendere il logaritmo naturale di x, mentre per "`log(x)`" sottintendono $\texttt{log}_{10}\texttt{(x)}$.
> • Nei più comuni linguaggi di programmazione, tra cui C, C++, Fortran, e BASIC, "`log`" o "`LOG`" sottintendono il logaritmo naturale.
> • Nelle calcolatrici il logaritmo naturale è "`ln`", mentre "`log`" è il logaritmo in base `10`.

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Logaritmo":

> base **10** [...] li si indica con log_{10}, o con *Log* [...] simbolo ISO *lg* [...]
> base 2 [...] li si indica con log_2, oppure con *log* quando la base a cui ci si riferisce è chiara dal contesto (simbolo ISO *lb*).

Pregiate calcolatrici denotano LOG o log il logaritmo in base 10, e LN o ln quello naturale. Si aggiunga che nei linguaggi di programmazione si usano altre scritture ancora.
Lo standard ISO 80000-2:2009 per il logaritmo decimale è lg, e per il logaritmo naturale ln.

65.8 Calcolo Combinatorio: qualche nota

Esistono un'infinità di metodi e formule nel calcolo combinatorio che non sono considerati in questa trattazione elementare. Esistono addirittura riviste scientifiche interamente dedicate alla questione, come il Journal of Combinatorics.
Nel 2017 Wikipedia elenca in https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_mathematics#Combinatorics ben 10 problemi irrisolti di calcolo combinatorio e ne esistono moltissimi altri.

65.9 Confronto fra media, mediana e moda

Su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Mode (statistics)" troviamo questo significativo esempio: 1, 2, 2, 3, 4, 7, 9; media=4, mediana=3, moda=2.

65.10 Cardinalità dell'insieme delle parti

(La definizione dell'insieme delle parti è quella solita, e l'insieme A può essere finito o infinito). La cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme A è (teorema) 2 elevato alla cardinalità di A:

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^{\#A} \,.$$

(Questo teorema è vero anche per insiemi infiniti ma allora la cardinalità risultante è infinita e non ha più il significato elementare di *numero di elementi*, e l'elevamento a potenza non è quello solito dei numeri naturali).

(Nella teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, l'esistenza dell'insieme delle parti di qualsiasi insieme è un assioma).]

65.11 Elemento assorbente

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si definisce **elemento assorbente** (rispetto all'operazione $\star$) un elemento, indichiamolo qua con α, tale che $x \star \alpha = \alpha \star x = \alpha$ per ogni x [di E]. Per esempio lo 0 per il $\cdot$, in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q, $\mathbb{R}$.

65.12 Elemento neutro

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si definisce **elemento neutro** (rispetto all'operazione $\star$) un elemento, indichiamolo qua con e, tale che $x \star e = e \star x = e$ per ogni x [di E]. Per esempio lo 0 per il $+$, e 1 per il $\cdot$, in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q, $\mathbb{R}$.

65.13 Esercizi sulle funzioni trigonometriche

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x > 0.8$$

Svolgimento
(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{\arcsin(0.8) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$0.9272... + 2k\pi < x < 2.2142... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x \leq 0.8$$

(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{-\pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi \le x \le \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$-4.0688... + 2k\pi < x < 0.9272... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si veda su Wolframalpha il grafico di $\sin x - 0.8$ fra $-\frac{3}{2}\pi$ e $\frac{\pi}{2}$: Link->. (Curva sotto lo 0 da circa -4 a circa 1; è stato rappresentato un periodo di $2\,\pi$, poi si ripete; usare altri intervlli, come $[-\pi, \pi]$ invece di $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$, potrebbe portare a più complesse espressioni della soluzione, comunque valide).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Calcolare approssimatamente $\arcsin \frac{21}{25}$ (a mano, ovvio, ma anche prendere confidenza con una calcolatrice scientifica sarà un bene).
Si cerchi poi il valore online su WolframAlpha con

`ArcSin[21/25]`

Svolgimento
Calcoliamo $21 : 25 = 0.84$ (con la divisione a mano, o meglio osservando che $\frac{21}{25} = \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{4} = 0.84$) e insomma cerchiamo un angolo, fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il cui seno sia 0.84. Ricordando (vedi (1)) che $\sin 1 \approx 0.84$ concludiamo $\arcsin \frac{21}{25} \approx 1$.
WolframAlpha con `ArcSin[21/25]` ci dà ≈ 0.997.

65.14 Esercizi sulle serie numeriche

Determinare il carattere delle serie, e ove possibile il "tipo" (a termini positivi, non negativi...), la denominazione (serie geometrica, eccetera), e se possibile la somma.

- $\arctan 0 + \arctan 1 + \arctan 2 + ... + \arctan k + ...$ ovvero $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan k$ è serie a termini non negativi. Il termine generale $a_k \to \frac{\pi}{2}$ e allora $\not\to 0$. Allora la serie diverge a $+\infty$.
- $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + ... + \frac{5}{k} + ...$ ovvero $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k}$ è serie a termini positivi. È 5 volte la serie armonica e allora diverge a $+\infty$.

• $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{3}{2^k}+...$ ovvero $\sum_{k=0}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^k$ è serie a termini positivi. è 3 volte la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ di ragione $\frac{1}{2}$ e allora converge a $\frac{3}{1-1/2}=6$.
• $-7-\frac{7}{2}-\frac{7}{3}+...-\frac{7}{k}+...$ è serie a termini negativi. È -7 volte la serie armonica e allora diverge a $-\infty$.
• $3\arctan 0-3\arctan 1+3\arctan 2+...+(-1)^k 3\arctan k+...$ è serie a termini di segno alternato. Il termine generale $\not\to 0$ perchè in valore assoluto $|a_k|\to\frac{3}{2}\pi$ e allora la serie non converge.
• $5-\frac{5}{2}+\frac{5}{3}-...+\frac{(-1)^{k+1}5}{k}+...$ è serie a termini di segno alternato, ed è 5 volte la serie di Leibniz, e allora converge a $5\ln 2$.
• • $-4+2-\frac{4}{3}-...+\frac{(-1)^k 4}{k}+...$ è serie a termini di segno alternato, ed è -4 volte la serie di Leibniz, e allora converge a $-4\ln 2$.
•• $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}...+\frac{(-1)^k}{k^2}+...$ è serie a termini di segno alternato, in valore assoluto $|a_k|=\frac{1}{k^2}$ decrescenti e infinitesimi, e allora converge. (Con somma ≈ -0.8225 secondo WolframAlpha:
`Sum[(-1)^k/k^2,{k,1,Infinity}]`).
•• $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}...+\frac{1}{k^2}+...$ è serie a termini positivi, e allora converge o diverge a $+\infty$. WolframAlpha con `Sum[1/k^2,{k,1,Infinity}]` trova $\frac{\pi^2}{6}$, ma in questa trattazione elementare non lo sappiamo.
• • $\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$ è serie a termini positivi, che non tendono a 0, e allora diverge a $+\infty$. Si considerino •••• $\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(3-\frac{1}{n}\right)$.
•••• $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{k^3}$ •••• $\sum_{k=0}^{\infty}\pi(\sin 1)^k$ •••• $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos \pi k}{4k+2}$.

65.15 Eventi indipendenti

Nella concezione assiomatica della probabilità, nella σ-algebra $\not{A}$
• 2 eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\,;$$

• n eventi $A_1\dots A_n$ si dicono a 2 a 2 indipendenti se e solo se

$$P(A_i\cap A_j)=P(A_i)P(A_j)\qquad \forall\, i,j=1,\dots,n,\ i\neq j\,;$$

• n eventi $A_1 \dots A_n$ si dicono indipendenti se e solo se

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

per ogni scelta di indici distinti $i_1, \dots, i_k$.
Queste definizioni sono fatte in modo che l'indipendenza assiomatica (insieme alla probabilità assiomatica) corrisponda bene all'indipendenza degli eventi nel linguaggio comune, riferito alla realtà sensibile.
Per esempio è $\frac{1}{18}$ la probabilità che esca il 5 al lotto sulla ruota di Venezia alla prossima estrazione, ed è $\frac{1}{6}$ la probabilità che venga 5 al prossimo lancio di un dado regolare, e la probabilità che venga 5 al lotto e 5 sul dado (eventi indipendenti) è

$$P(\{5 \; sulla \; ruota \; di \; Venezia\} \cap \{5 \; sul \; dado\}) =$$

$$= P(5 \; sulla \; ruota \; di \; Venezia) \cdot P(5 \; sul \; dado) =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108} \, .$$

Si noti che

$$P(B > 0) \wedge A, B \; indipendenti \Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

conformemente alla nozione comune di indipendenza e probabilità condizionale.

65.16 Fattoriale

Per ogni $n \in I\!N$, si dice *fattoriale* di n e si indica con $n!$ il numero $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ se $n > 0$ e 1 se $n = 0$.
Per esempio $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; e $11! = 39˙916˙800$.
Esistono estensioni della definizione ai numeri reali e perfino ai numeri complessi mediante la funzione Gamma:

$$z! := \Gamma(z - 1) \, , \quad z \neq -1, -2, -3, ...$$

Valgono le approssimazioni di Stirling

$$x! \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

e con maggiore precisione

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{12x}\right)$$

per i numeri interi o reali, purchè sufficientemente grandi – diciamo maggiori di 8 per avere un'approssimazione all'1% per la prima e maggiori di 1 per avere un'approssimazione all'1 per mille per la seconda.
Sono approssimazioni asintotiche e allora il simbolo $\approx$ può essere opportunamente sostituito da $\sim$.
Si noti la grande rapidità con cui cresce la funzione fattoriale in $I\!N$, e in $I\!R$ per $x \geq 1$. Per esempio 100! ha 158 cifre.

65.17 Funzioni iperboliche; notazioni per le derivate

Le funzioni iperboliche hanno un interesse di per sè, tendendo a ricorrere nella Fisica, ma hanno anche uno speciale interesse nel Calcolo Differenziale a causa delle derivate di alcune di esse.

	$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	*seno iperbolico*
	$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	*coseno ip.*
	$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	*tangente ip.*
sono inverse,	$\operatorname{arsinh} x := (\sinh)^{-1} x$	*arcoseno ip.*
assolutamente	$\operatorname{arcosh} x := \left(\cosh\Big\vert_{x\geq 0}\right)^{-1} x$	*arcocoseno ip.*
non reciproche	$\operatorname{artanh} x := (\tanh)^{-1} x$	*arcotangente ip.*

65.18 Funzioni, tipi di

In questa trattazione elementare consideriamo funzioni di 5 tipi:
- $\operatorname{sgn}(x)$ che vale 0 in 0 e altrove $\frac{x}{|x|}$
- $\lfloor x \rfloor$ (scritta anche $[x]$ ma non è conforme allo standard ISO) parte intera di x, che per $x \geq 0$ "taglia i decimali": $[\pi] = 3$. (Ma $\lfloor -\pi \rfloor = -4$).
- $\Gamma(x)$, la funzione gamma.
- $\Phi(x)$, funzione utile in statistica.

• ϕ_α, funzione utile in statistica.
(Queste 5 sopra non sono funzioni elementari, le prime 2 sono discontinue e le ultime 3 continue).
• Le funzioni elementari: $x^2, \sin x$... e loro somme, composizioni...

65.19 Geometria euclidea piana: elementi basici

Retta, cerchio e altre figure, e misura in radianti
Consideremo *concetti primitivi* il *punto* e anche:

la *retta*, che viene divisa in 2 *semirette* da 1 punto *origine*;
la *retta orientata*, dove i punti si *precedono* o *seguono* fra loro;
il *piano (euclideo)*; che una retta *origine* divide in 2 *semipiani*;
il *segmento* di *estremi* 2 punti e *lunghezza* la loro distanza;
per semplicitị trattazione, anche la *curva*.

Dati un punto P e numero $r > 0$, l'insieme dei punti che hanno distanza r da C si chiama *circolo* – da altri detto *cerchio* – di centro P e raggio r. Si noti che è in un certo senso "vuoto": il centro non appartiene al circolo. In questa trattazione chiameremo *cerchio* l'insieme dei punti che hanno distanza $\leq r$ da C (cioè il "cerchio pieno" per così dire). Un segmento nel cerchio lungo $2r$ è un *diametro* . Un diametro divide il cerchio in 2 *semicerchi*. Due semirette diverse con stessa origine P dividono il piano in 2 *angoli* di *vertice* P. Se essi sono uguali si dicono *piatti*. Se uno è "minore" dell'altro si dice *convesso* e l'altro *concavo*. Due rette del piano con intersezione vuota le diremo *parallele*. Se l'intersezione ha esattamente 1 punto si dicono *incidenti*. Se l'intersezione coincide con le rette stesse, si tratta di 2 rette *coincidenti* (talvolta dette *parallele coincidenti*): in effetti è 1 sola retta considerata 2 volte. Due rette incidenti possono formare 4 angoli uguali che si dicono *retti*, e le rette si dicono *ortogonali* o *perpendicolari*. Angoli "minori" di un angolo retto si chiamano *acuti* e angoli "maggiori" di un angolo retto e "minori" di un angolo piatto si dicono *ottusi*. L'intersezione di un angolo di vertice P con un circolo di centro P è un *arco di circolo*, di cui si suppone nota come concetto primitivo la nozione di *lunghezza*. Se il raggio del circolo è 1 quella lunghezza si chiama *misura in radianti* dell'angolo. La misura dell'angolo piatto (≈ 3.14) si indica con π. Si dice *figura* ogni insieme di punti: segmenti, rette, semirette, circoli, cerchi, semicerchi, sempiani, angoli...

Limitato, convesso, poligoni vari, perimetro, area

Una figura si dice *limitata* se esiste un cerchio che la contiene (per esempio i segmenti), altrimenti *illimitata* (per esempio le rette). Una figura si dice *convessa* se contiene ogni segmento con estremi in quella figura (per esempio il cerchio), altrimenti non convessa. L'unione di 2 segmenti AB e BC (da altri denotati $[AB]$ e $[BC]$) non *allineati*, con un estremo B in comune si chiama *linea spezzata* di 2 *lati* AB e BC e *vertice* B, e in modo analogo è definita quella di più *lati*. Non facciamo i dettagli, come pure per le seguenti intuitive denominazioni:

linea spezzata *chiusa*, o altrimenti *aperta*;

linea spezzata *intrecciata*, o altrimenti non intrecciata;

lati *consecutivi*;

lunghezza della linea spezzata.

Supponiamo noto il fatto (non banale da dimostrare) che una linea spezzata chiusa non intrecciata divide il piano in 2 parti. Quella limitata si chiama *poligono (semplice)* (o *non intrecciato*), coi lati e i vertici della linea spezzata, e *perimetro* la sua lunghezza. Il poligono si dice *equilatero* se ha i lati uguali ed *equiangolo* se ha gli angoli uguali, e *regolare* se è equilatero ed equiangolo.

I poligoni con 3 lati si chiamano *triangoli* e quelli con 4 *quadrilateri*. Un quadrilatero si chiama *rombo* se è equilatero, *parallelogramma* se ha i lati a 2 paralleli, *rettangolo* se ha i lati a 2 a 2 perpendicolari, *quadrato* se è equilatero equiangolo.

Il prodotto $b \cdot h$ delle lunghezze di 2 lati consecutivi di un rettangolo si chiama *area*. Ciò genera immediatamente il concetto di area di un parallelogramma, e per dimezzamento quello di area di un triangolo, $\frac{b \cdot h}{2}$, che a sua volta genera il concetto di area per ogni poligono, e con *passaggio al limite* (concetto non banale) l'area di ogni figura *sufficientemente regolare*, in particolare il cerchio, che si dimostra avere area πr^2. I punti, i segmenti, le linee spezzate, i circoli e gli archi di circolo, e perfino le rette hanno area 0. Non esiste (oppure è *infinita*) l'area di piano, semipiani e angoli.

Congruenti e simili; Teoremi di Pitagora ed Euclide

Se per 2 figure F ed F' esiste una funzione biiettiva $f : F \to F'$ che conserva le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *congruenti* e si possono immaginare come *sovrapponibili*; ma si faccia attenzione che l'azione della sovrapposizione può necessitare di passare momentaneamente nello *spazio* in cui è contenuto il piano, come per i grafemi d e b. Tutte le rette sono congruenti, e anche le semirette e i semipiani.

Se F ed F' sono il piano euclideo stesso, f si chiama *isometria*↑.

Se per 2 figure F ed F' esistono un numero $\alpha > 0$ e una funzione biiettiva $g : F \to F'$ che moltiplica per α le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti ovvero precisamente

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \alpha \cdot \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *simili*. Tutti i segmenti sono simili, e anche i circoli, i cerchi, i quadrati e i triangoli equilateri.

Si dimostra che se un triangolo ha gli angoli uguali a quelli di un altro, essi sono simili. Allora dette a, b, c le misure dei lati del primo, e a', b', c' quelle del secondo, vale la (doppia) proporzione

$$a : a' = b : b' = c : c' \qquad \textit{ossia} \;\; \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,.$$

Un triangolo con un angolo retto si chiama *triangolo rettangolo*; *ipotenusa* il suo lato maggiore e *cateti* gli altri. Dette nell'ordine i, c_1 e c_2 le lunghezze di quei lati, h quella della distanza dell'ipotenusa dal vertice *opposto* (cioè h è la lunghezza dell'*altezza relativa all'ipotenusa*), e p_1 e p_2 le lunghezze delle *proiezioni dei cateti sull'ipotenusa* (nell'ordine), valgono questi 3 teoremi classici:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2 \qquad \textit{Teorema di Pitagora}$$

$$c_1^2 = h \cdot p_1, \quad c_2^2 = h \cdot p_2 \qquad \textit{Primo Teorema di Euclide}$$

$$p_1 : h = h : p_2 \qquad \textit{Secondo Teorema di Euclide.}$$

65.20 Insiemi finiti e infiniti

Si definisce che un insieme è infinito se è in corrispondenza biunivca con un suo sottoinsieme proprio; per esempio $\mathbb{N}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri pari:

$\mathbb{N}$		$\{numeri\,pari\}$
0	$\leftrightarrow$	0
1	$\leftrightarrow$	2
2	$\leftrightarrow$	4
3	$\leftrightarrow$	6
...	$\leftrightarrow$	...

e si dice che un insieme è finito se non è infinito. (Ad un livello più elementare si dice che un insieme è infinito se non ha un numero di elementi (cardinalità) finito).
Due insiemi con la stessa cardinalità si dicono *equipotenti*, oppure *in corrispondenza biunivoca*, oppure, parlando molto semplificatamente, si potrebbe dire che hanno la stessa quantità di elementi.
Fra le proprietà della cardinalità si segnalano in particolare la cardinalità dell'unione, la cardinalità del prodotto cartesiano e la cardinalità dell'insieme delle parti.
[***Questioni più avanzate.***
La cardinalità di un insieme E, finito o infinito (comunque indicata con gli stessi simboli sopra scritti) è la classe di equivalenza di tutti gli insiemi in corrispondenza biunivoca con E.
La cardinalità (infinita) degli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, che sono tutti in corrispondenza biunivoca fra loro, viene denotata $\aleph_0$ (cioè aleph *zero). (Non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità e in particolare $\mathbb{R}$ ha cardinalità $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, cardinalità dell'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, maggiore di $\aleph_0$: ci sono più reali che naturali).*]

65.21 Integrale definito di funzione priva di primitiva

In questa trattazione elementare, l'integrale definito è stato definito tramite la funzione primitiva, e allora non esiste per funzioni prive di primitiva. Ad un livello superiore, l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ viene definito con un procedimento che sostanzialmente equivale a considerare l'area *con segno* fra l'asse x e il grafico di $f(x)$, con un'eventuale inversione di segno se $a > b$. Vediamo un esempio con una funzione, che essendo non continua nell'intervallo di integrazione, là è priva di primitiva.
Calcolare

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, dx\ .$$

Non abbiamo dato una primitiva (ovvero equivalentemente un integrale indefinito) di $\operatorname{sgn} x$, incertezza rig e in effetti si potrebbe dimostrare che non esiste, perchè solo le funzioni continue possono avere primitiva. In questo caso l'area di interesse esiste senz'altro come si vede dal disegno del grafico. Allora possiamo calcolare l'integrale così:

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, dx =_{\textit{per la Regola di Chasles}} \int_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x\, dx\ + \int_{0}^{1} \operatorname{sgn} x\, dx\ =$$

ricordando che la funzione segno vale -1 sui negativi e 1 sui positivi (e quanto fa nel singolo valore 0 non importa: l'integrale definito di qualunque funzione non cambia modificando il valore della funzione integranda in un numero finito punti)

$$= \int_{-1}^{0} (-1)\, x\, dx\ + \int_{0}^{1} 1\, dx\ = [-x]_{-1}^{0} + [x]_0^1 =$$

$$= -0 - (-1) + 1 - 0 = 2\ .$$

Si faccia un disegno riconoscendo i vari elementi in questione.

65.22 Intervallo di fiducia per la v.a. bernoulliana

Per p di $B(1,p)$, un intervallo di fiducia <u>bilatero centrato</u> al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è "piccolo", come

$0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, “grande”), è (approssimativamente) per n sufficientemente grande

$$\Big[\bar{X}_n - \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\,,\ \bar{X}_n + \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\Big]$$

$$\text{ovvero}\quad \bar{X}_n \pm \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\,.$$

65.23 Involucro convesso

Diamo un'idea di cos'è l'*involucro convesso* di n punti, oppure infiniti, del piano o dello spazio (euclidei). Consideriamo dapprima 3 punti del piano: si immagini di piantare 3 pioli nei 3 punti, e di passare una corda intorno ad essi: la zona “entro” la corda è un triangolo, involucro convesso dei 3 punti. L'involucro convesso naturalmente esiste anche per 1 o 2 o più di 3 punti, anche infiniti, per esempio una figura non convessa. Per esempio l'involucro convesso di una stella ad m punte è un poligono ad m lati. Nello spazio euclideo si dovrà immaginare non un una corda ma un tessuto.

65.24 Isometrie e congruenza in piano e spazio euclidei

Detto E il piano euclideo, o lo spazio euclideo, ogni funzione da E in E che *conserva le distanze* si chiama *isometria* o *trasformazione rigida*.
Più formalmente, una funzione

$$f : E \to E$$

essendo E il piano euclideo o lo spazio euclideo, si dice *isometria* se

$$\Big(\forall P, Q \in E\Big) \quad d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

essendo d la *distanza* (euclidea).
Due sottoinsiemi del piano (o spazio) euclideo dei quali uno sia il trasformato isometrico dell'altro si dicono *congruenti*.
Le isometrie conservano gli angoli e le aree, e nello spazio i volumi.
Da adesso consideriamo solo il piano euclideo.
Nel piano euclideo esistono 5 tipi di isometrie:

- d – l'identità o trasformazione identica
- dd – traslazioni
- dp – rotazioni
- db – le simmetrie assiali (o riflessioni)
- dq – antitraslazioni (anche dette glissosimmetrie, glissoriflessioni o simmetrie con scorrimento)

cioè date 2 figure congruenti, ciascuna si trasforma nell'altra con 1 delle 5 isometrie dette.
Tutte le isometrie del piano euclideo (compresa l'identità) o sono 1 riflessione o sono composizioni di 2 o 3 riflessioni.
Escludento le identità, si hanno i seguenti 4 casi:

```
.................Conserva l'orientazione?
.................SI'..........NO
Ha punti...SI'...rotazione.....riflessione
fissi?.....NO....traslazione...antitraslazione
```

65.25 Legge congiunta

Definizioni. Per 2 variabili aleatorie X e Y discrete o continue, si chiama **funzione di ripartizione congiunta** di X e Y ovvero del *vettore aleatorio* (X, Y) – si immagini una coppia di dadi – la

$$F_{X,Y}(x, y) := P(X \leq x \wedge Y \leq y)$$

e nel caso che X e Y siano continue (molto regolari come sempre) la derivata rispetto a y della derivata rispetto a x di quella

$$f_{X,Y}(x, y) := D_y D_x F_{X,Y}(x, y)$$

si chiama densità congiunta di X e Y.
Teorema 1. Dalla densità congiunta di X e Y continue si trova la densità di X, detta *densità marginale*, con

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy \quad \text{e analogamente per } Y.$$

Teorema 2.

$$\text{indipendenti } \Rightarrow F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \text{ (discrete o continue)}$$

$$\text{indipendenti } \Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \text{ (continue).}$$

Teorema 3. Densità della somma di 2 variabili aleatorie continue di cui sia nota la densità congiunta:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, t-x)\, dx = \text{ se indip. } \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\, dx.$$

Per esempio, si calolerà la densità della somma di 2 variabili aleatorie indipendenti uniformi su $[0, 1]$, siano esse U e V:

$$f_U(t) := f_V(t) := \begin{cases} 1 & se\ \ 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases} .$$

65.26 Mnemonici per le cifre di e

Associando ordinatamente ad ogni parola di questa frase

> *"La loquela è vincente* $\leftarrow 2, 7, 1, 8$
> *ma talvolta è migliore il silenzio,* $\leftarrow 2, 8, 1, 8, 2, 8$
> *come disse Aristocle."* $\leftarrow 4, 5, 9$

i numeri delle lunghezze delle parole, si ottengono le prime cifre significative di e: $2, 7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, 9$.
Fra le molte molte frasi analoghe, una famosa con le stesse cifre è

> *"Ai modesti o vanitosi*
> *ai violenti o timorosi*
> *do, cantando gaio ritmo,*
> *logaritmo."*

65.27 Mnemonici per le cifre di π: un *piem*

Associando ordinatamente ad ogni parola di queste frasi

> *"Non è dato a tutti ricordare il numero aureo del sommo filosofo Archimede. Certuni sostengon che si può ricordare tale numero, ma questi poi non recitano che un centone insensato."*

i numeri delle lunghezze delle parole, si ottengono le prime cifre significative di π: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, eccetera. Esistono molte frasi analoghe, anche in altre lingue.

65.28 Moda di una variabile aleatoria continua

è il valore che ha la massima densità. Semprechè ce ne sia solo uno; se ce ne sono 2 entrambi si chiamano mode e la variabile aleatoria si chiama bimodale. Non considereremo il caso in cui ce ne siano più di 2.
La moda di una variabile aleatoria X si indica con $\mathrm{Mod}(X)$.

65.29 Operazione binaria (interna)

In sostanza, è una legge che a 2 elementi di un insieme associa un elemento di quello stesso insieme, come sono per esempio la somma e la moltiplicazione nei consueti insiemi numerici. Più formalmente, se E è un insieme, si chiama operazione binaria (interna) una funzione $* : E\times E \to E$. (è una funzione definita sul prodotto cartesiano $E \times E$). Il suo valore quando viene calcolata in 2 elementi x e y si indica con $x * y$.

65.30 Permutazioni complete

Vedi dismutazioni.

65.31 Poetica osservazione malevola sulla Statistica

[...] seconno le statistiche d'adesso
risurta che te tocca un pollo all'anno:
e, se nun entra nelle spese tue,
t'entra ne la statistica lo stesso
perchè c'è un antro che ne magna due. [Trilussa]

Naturalmente il classico problema qua evidenziato viene superato dalla considerazione degli indici di dispersione ovvero variabilità.

65.32 Precedenze algebriche e parentesi

Le parentesi indichino *precedenze* diverse da quelle *implicite*, grazie alle quali per esempio abbiamo scritto $(x + y)z = xz + yz$ e non $(x + y)z = (xz) + (yz)$, perchè il $\cdot$ ha la *precedenza* sul $+$.
In una sequenza di somme e sottrazioni, come $2 + 3 - 7 - 4 + 5$, faremo i calcoli nell'ordine in cui si presentano, e per il resto ecco le precedenze da osservare in mancanza di parentesi che le modifichino, dalla più debole:

$+$ *e* $-$

$\cdot$ anche se non trascritto: $x + 3y$ è $x + (3 \cdot y)$ e non $(x + 3) \cdot y$

^ anche se non scritto esplicitamente: $2x^3$ è $2(x^3)$ e non $(2x)^3$.

Molti testi danno anche altre regole di precedenza, che permettono di stabilire se $2/x \cdot y$ è $(2/x) \cdot y$ o $2/(x \cdot y)$, ma in questa trattazione elementare rifiuteremo categoricamente scritture come $2/x\cdot$

y, e scriveremo con le parentesi $(2/x)\cdot y$ oppure $2/(x\cdot y)$ a seconda di cosa intendiamo. **Sempre meglio parentesi che incertezze.** Si possono usare quante si vogliano coppie di parentesi “annidate” una dentro l’altra

$$(...(...(...)...)...)$$

ma spesso per chiarezza si usano anche parentesi quadre e graffe:

$$\{...[...(...)...]...\}$$

Rimarchiamo lo sconcertante fatto che il software Excel, di ampio uso nelle scienze applicate, contro le convenzioni di tutta la comunità matematica, per -3^2 dà 9 invece che -9, come se fosse da intendere $(-3)^2$.

65.33 Proprietà associativa

Sia $\star$ un’operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si dice che l’operazione $\star$ verifica la **proprietà associativa** se per ogni $x, y, z \in E$ è:

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)\ .$$

Per esempio il $+$ e il $\cdot$ sono associativi in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q, $\mathbb{R}$.

65.34 Proprietà commutativa

Sia $\star$ un’operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Si dice che l’operazione $\star$ verifica la **proprietà commutativa** se per ogni $x, y \in E$ è

$$x \star y = y \star x\ .$$

Per esempio il $+$ e il $\cdot$ sono commutativi in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, Q ed $\mathbb{R}$.

65.35 Proprietà distributiva

Sia $\star$ un’operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Se $\diamond$ è un’altra operazione binaria in E, si dice che l’operazione

$\star$ verifica la **proprietà distributiva** rispetto all'operazione $\diamond$ se per ogni $x, y \in E$ è

$$x \star (y \diamond z) = (x \star y) \diamond (x \star z) \quad et \quad (y \diamond z) \star x = (y \star x) \diamond (z \star x) \, .$$

Per esempio il $\cdot$ è distributivo rispetto al $+$, in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

65.36 Rette parallele e rette sghembe

Due rette del piano con intersezione vuota le diremo *parallele*. Due rette dello spazio con intersezione vuota e *complanari* (cioè appartenenti ad uno stesso piano) le diremo *parallele*. Due rette dello spazio con intersezione vuota e (ma) non *complanari* le diremo *sghembe*.

65.37 Scarti dalla media per una v.a. normale

Una variabile aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ è in questa relazione con la sua standardizzazione $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$:

$$X = \sigma Y + \mu$$

e allora si ha

$$P(|X - \mu| \leq \delta) = P(|\sigma Y| \leq \delta) = P(\sigma |Y| \leq \delta) = P(|Y| \leq \frac{\delta}{\sigma}) =$$

e considerando l'evento complementare

$$= 1 - P(|Y| > \delta) =$$

per le proprietà del valore assoluto

$$= 1 - P\Big(Y < -\frac{\delta}{\sigma} \vee Y > \frac{\delta}{\sigma}\Big) =$$

e trattandosi di eventi disgiunti

$$= 1 - \Big(P\Big(Y < -\frac{\delta}{\sigma}\Big) + P\Big(Y > \frac{\delta}{\sigma}\Big)\Big) =$$

e per la simmetria della v.a. normale standard Y

$$= 1 - \Big(P\Big(Y > \frac{\delta}{\sigma}\Big) + P\Big(Y > \frac{\delta}{\sigma}\Big)\Big) =$$

$$= 1 - 2P\left(Y > \frac{\delta}{\sigma}\right) =$$

e passando all'evento complementare

$$= 1 - 2\left(1 - P\left(Y \le \frac{\delta}{\sigma}\right)\right) = 2P\left(Y \le \frac{\delta}{\sigma}\right) - 1 = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$$

cioè in conclusione

$$P(|X - \mu| \le \delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$$

e in particolare con con $\delta := m\,\sigma$

$$P(|X - \mu| \le m\,\sigma) = 2\,\Phi(m) - 1$$

e coi classici valori (che si trovano per esempio sulle tavole)

$$\Phi(1) \approx 0.8413$$
$$\Phi(2) \approx 0.9773$$
$$\Phi(3) \approx 0.9987$$

$$P(|X - \mu| \le \sigma) = 2\,\Phi(1) - 1 \approx 0.68.26 \approx 68.3\%$$
$$P(|X - \mu| \le 2\,\sigma) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx 0.9544 \approx 95.4\%$$
$$P(|X - \mu| \le 3\,\sigma) = 2\,\Phi(3) - 1 \approx 0.9974 \approx 99.7\%$$

e per avere con più precisione 95% si sostituisca $2\,\sigma$ con $1.96\,\sigma$:

$$P(|X - \mu| \le 1.96\,\sigma) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx 0.95 = 95\%$$

tutte e 4 valide per X normale di media μ e varianza σ^2.

65.38 Sconvolgimento

Vedi dismutazioni.

65.39 Simmetrico di un elemento

Sia $\star$ un'operazione binaria (interna) definita in un insieme E. Se $x \star y = y \star x = e$, allora x si dice **simmetrico** di y (rispetto all'operazione $\star$). (E ovviamente y è simmetrico di x). Per esempio -3 (che esiste da $\mathbb{Z}$ in poi) è simmetrico di 3 rispetto al + e

$\frac{1}{3}$ (che esiste da $\mathbb{Q}$ in poi) è simmetrico di 3 rispetto al $\cdot$.
Il simmetrico rispetto al $+$ si chiama *opposto* e il simmetrico rispetto al $\cdot$ si chiama *reciproco*.

65.40 Sottrazione

Volendo trattare la questione in termini elementari, diremo che $a+b=c$ lo scriveremo anche $c-a=b$ e pure $c-b=a$, ottenendosi così l'operazione della *sottrazione*, operazione binaria come la somma, ma al contrario di quella nè associativa nè commutativa. Per esempio $10-3=7$ e $10-7=3$, perchè $3+7=10$. L'operazione non è sempre definita in $\mathbb{N}$, non esistendo per esempio $3-10$ perchè con nessun numero naturale x è $10+x=3$.
Risolveremo la questione ampliando $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Z}$.
Anche nei successivi ampliamenti a $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{N}$, la sottrazione continuerà come in $\mathbb{Z}$ ad essere operazione binaria ovunque definita, nè associativa nè commutativa, priva di *elemento neutro*↑ (certo $x-0=x$ ma non coincide con $0-x$).
Si noti comunque che da $\mathbb{N}$ in poi vale questa proprietà distributiva

$$(x-y)\cdot z = x\cdot z - y\cdot z\ .$$

65.41 Tassa degli stolti

Nel 2015 gli italiani hanno speso 55 miliardi per beni durevoli, come automobili ed elettrodomestici, e 88 miliardi in giochi d'azzardo, cioè mediamente circa 1470 euro a testa, diventati 1600 nel 2016; in parte persi, ovvio, mica organizzano i giochi solo per farci divertire; si dice che il lotto è una *tassa per gli stolti*. Bisogna comunque dire che la cinquina del lotto è un caso particolare, gli altri premi del lotto non sono così non equi; e altri giochi sono ancor meno non equi, dando premi più equilibratamente; e in alcuni conta anche l'abilità, per esempio la schedina del calcio. Inoltre c'è da dire che coi giochi d'azzardo lo Stato raccoglie cifre enormi senza suscitare avversione: rinunciando ai giochi lo Stato

potrebbe dover esigere quei soldi forzatamente. Una cosa triste è che a pagare sono in larga misura – difficile da quantificare nei dettagli – i meno abbienti. Altra cosa triste è che per molti diventa una malattia, la ludopatia, ma questa può esistere anche indipendentemente dai giochi organizzati dallo Stato, giocando fra privati. Altra questione ancora, è che le sale slot offrono alla malavita un facile modo di riciclare il denaro sporco: incassano denaro pulito e per le vincite danno quello proveniente da illeciti, che si disperde nei mille rivi delle spese personali della gente. Tutto questo, ovviamente, fermo restando che di per sè non è immorale giocare d'azzardo, nè fra amici nè con lo Stato, e può essere una cosa sana, se esercitata con l'opportuna misura. Certo, 1600 euro l'anno a testa, danno da pensare. Si potrebbero fare anche molte altre cose con tanti soldi.
Una questione molto interessante, invece, è che i giochi d'azzardo forniscono un campo di studi per il calcolo delle probabilità, anzi ne sono perfino una delle origini storiche.

65.42 Triangolo di Tartaglia e potenza del binomio

(Evitando complesse definizioni formali, in questa trattazione elementare) il *Triangolo di Tartaglia* (o *di Pascal*, in ogni caso sostanzialmente noto ben prima di quegli Autori) è la *scrittura*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \end{array}$$

....

variamente estesa con la Formula di Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(e cioè ogni numero è la somma dei 2 soprastanti, a parte gli 1 ai margini) dove n è il numero di riga a partire dalla 0-esima e k è la posizione nella riga a partire dalla 0-esima.

Il Triangolo di Tartaglia consente il calcolo dei *coefficienti binomiali* $\binom{n}{k}$ mediante sole somme. Ciò è utile sia nel problema delle combinazioni semplici che nella *potenza del binomio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{ovvero}$$

$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... + \binom{n}{n}b^n$$

(si noti che nella seconda formula gli a e b nel secondo membro sono scambiati fra loro rispetto alla prima formula, come se là fosse scritto $a^{n-k}\, b^k$, ma è equivalente). I vari coefficienti dei monomi si trovano semplicemente sulla n-esima riga del Triangolo di Tartaglia (intendendo come 1-esima quella con due 1), per esempio (e si provi poi con la quinta potenza)

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

65.43 Trigonometria – la goniometria dei triangoli

Teorema dei seni.(74) In un triangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti α, β, γ

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Teorema del Coseno.(75) In un triangolo di lati a, b, c, con angolo γ opposto al lato di misura c

$$c^2 = a^2 + b^2 - a\,b\,\cos\gamma.$$

Ed esistono poi innumerevoli altre formule.

65.44 Valore assoluto: 4 definizioni equivalenti

Da $\mathbb{Z}$ in poi si può considerare il *valore assoluto* di un numero

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

$$|x| := x\,\mathrm{sgn}(x)$$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Definizione consigliabile:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}.$$

La soprastante parentesi graffa (grande) è *"selettiva dei casi"*, ma quel simbolo ha anche altri usi affini.

In $\mathbb{R}$ il valore assoluto è una *funzione elementare*, mentre nell'algebra dei numeri può considerarsi *operazione unaria.*

65.45 Varianza di un solo numero

Si noti che nella statistica descrittiva una lista composta da un solo numero ha (ovviamente) varianza 0 in base alle formule viste

$$\bar{x} := x_1 \qquad Var(x_1) := 0$$

---

[74] Nasir al-Din al-Tūsī, persiano, XIII sec. d.C. "He is often considered the creator of trigonometry as a mathematical discipline in its own right", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

[75] Euclide, greco, III sec. a.C., ben noto, e Jamshīd al-Kāshī, persiano, XIII sec. d.C. "Much of al-Kāshī's work was not brought to Europe, and much, even the extant work, remains unpublished in any form", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

mentre nella statistica inferenziale un campione con un solo dato non consente (ovviamente) alcuna stima sulla varianza della variabile aleatoria “retrostante”, infatti nel calcolo si avrebbe $\frac{0}{0}$:

$$\bar{X} := X_1 \qquad S^2 := \frac{(X_1 - \bar{X})^2}{0} \,.$$