Le 64 Pillole

Matematica per Farmacia

[*in fieri* - *work in progress* - continua]

Alessandro Soranzo

Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Università degli Studi di Trieste

ver. d 12 gennaio 2021

mode

"La mente non è un vaso da riempire, ma un legno da far ardere, perché si infuochi il gusto della ricerca e l'amore della verità."
Plutarco

Nota 1. SI PREGA DI AVVERTIRE L'AUTORE DI OGNI ERRORE ANCHE SE MINUSCOLO, GRAZIE!

Nota 2. Attualmente la separazione della parole in fine riga, fatta automaticamente dall'editor di testo, non corrisponde sempre alla grammatica italiana (ma in questa frase sì).

Nota 3. Questo testo fa una scelta drastica: usa entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale, per abituare lo studente, e, volendosi limitare, considererà solo occasionalmente lo standard del punto a mezza altezza. Inoltre, seguendo il N.I.S.T. (National Institute of Standards and Technology) statunitense, di solito userà lo spazietto come separatore delle terne di cifre.

Nota 4. In questo testo è usato il simbolo ≈ per indicare "circa" com'è previsto dallo standard ISO. Ma in futuro sempre di più si userà anche il simbolo ~ tradizionalmente usato in Farmacia.

Nota 5. Per le Lezioni fino alla 31 una revisione è stata fatta dal Dott. Lorenzo Girella. Però poi il testo ha subito nuove variazioni.

Legenda per gli esercizi

$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.

$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

(R) è richiesto solo il risultato.

Premessa

Questo è un testo su Statistica e altra Matematica. Soprattutto la Matematica utile per la Statistica. E, il tutto, con particolare riferimento alla Farmacia.

Il testo è ipertestuale con collegamenti interni, che funzionano su computer anche offline, e collegamenti a internet.

Grande attenzione è stata posta agli errori più comuni: prevenire è meglio che curare. Esistono errori tipici, contro i quali è utile agire attivamente. Per esempio ritenere che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, e invece è l'inversa. Questo errore consueto e altri simili sono dovuti ad ambiguità notazionali della matematica *de facto*, nello stato in cui si trova oggi scritta. Grande rilevanza è stata data a questo aspetto delle ambiguità notazionali. D'altra parte, la situazione oggi è tale, incredibilmente, che nemmeno è chiaro, quando in un testo si trova scritto

$$2{,}125$$

se si intenda quel numero, fra 2 e 3, "uno virgola centoventicinque", oppure "duemilacentoventicinque"!
Troviamo per esempio la relazione fra la nuova e la vecchia unità di misura del campo magnetico

1 T = 10.000 G su Wikipedia italiana `Link ->`
1 tesla = 10,000 gauss su Wikipedia in inglese `Link ->`

D'altra parte a cosa servirebbe sapere i più sottili teoremi del calcolo infinitesimale, se poi si permetterà ad Excel, software usatissimo nelle scienze applicate, di calcolare

$$-3\char`^2$$

in modo *erroneo* – o, volendo essere benevoli, attenendosi alla convenzione tutta sua, di quel software, opposta a quella di praticamente tutta la comunità scientifica? E' meglio avvertire di questo

lo studente.
Nella simbologia ci si è attenuti in generale allo standard ISO 80000-2:2009([1]), per esempio tan e non tang nè tg per la funzione tangente. E uno spazietto, eventualmente, come separatore delle migliaia: 2 125.

Una certa attenzione è stata rivolta a Wikipedia. Lo studente dovrebbe abituarsi a consultarla. L'idea che non sia una fonte attendibile, per gli argomenti di questo testo elementare è – in generale, ovvio – senz'altro falsa. (Per questioni "sensibili", invece, alquanto male([2]) si potrebbe dire di Wikipedia).

Ripetutamente si accenna a WolframAlpha: lo studente dovrebbe abituarsi a consultare questa potentissima intelligenza artificiale disponibile gratuitamente on-line.

Premesso che non tratteremo degli aspetti *materiali* della raccolta dati (questionari, interviste, eccetera), diciamo subito che la Statistica, così limitata, è una branca della Matematica, astratta come tutta la vera Matematica.
La Statistica verrà suddivisa in Statistica Descrittiva e Statistica Inferenziale.
In qualche modo possiamo dire che tutta la matematica che tratteremo, dai numeri alla Statistica Descrittiva, al Calcolo Infinitesimale e al Calcolo delle Probabilità, è propedeutica per la trattazione della Statistica Inferenziale.
La seconda Parte del corso riguarda le *Matematiche dell'Incertezza.*
Naturalmente, le Matematiche dell'Incertezza non fanno affermazioni incerte, bensì fanno affermazioni certe su fatti incerti, per esempio che conviene scommettere (alla pari) che un dado darà un numero primo piuttosto che un numero quadrato. Nelle

[1]Si veda per esempio `https://ja.wikipedia.org/wiki/ISO_80000-2`
[2]Parrebbe che molte pagine siano praticamente "blindate" da gruppi variamente ideologizzati – anche su questioni di Medicina. E si veda questo `Link->`

Matematiche della certezza, prima Parte del corso, è compresa la Statistica Descrittiva, che costituisce il Capitolo IV, e nelle *Matematiche dell'Incertezza* è compresa la Statistica Inferenziale, Capitolo XII, che in qualche modo rappresenta l'apice della trattazione.

Il testo è *in fieri* / work in progress.

Valori numerici fondamentali

Alla fine di questo corso ci si aspetta che lo studente conosca a memoria questi numeri:

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.33333333333...$ (periodico; valore esatto) $\approx 0.333 \approx 0.33$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (sezione aurea)

$\pi \approx 3.14$ (pi greco)

$e \approx 2.718$ (Numero di Nepero o di Eulero)

$\lg 2 \approx 0.3$ (logaritmo decimale di 2, cioè $\log_{10} 2$)

$\lg e \approx 0.4343$ (logaritmo decimale di e, cioè $\log_{10} e$)

$\phi_{0.975} \approx 1.96$ (un quantile normale)

≈ 19.68 un quantile del chi quadrato a 11 gradi di libertà

delle tavole del chi quadrato, variamente denotato dai vari Autori

1 Prerequisiti

1.1 Prerequisiti basici, da ritenersi notissimi

• I numeri primi: 2 (sì anche 2, ma non 1), 3, 5, 7, 11, 13, 17...
• L'algebra dei numeri e con le variabili, per esempio $\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ e $\frac{x^2+1}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{(x^2+1)^2}$.
• 1 d = 24 h cioè 1 giorno ha 24 ore, da 0 a 24 o 2 volte da 0 a 12
• 1 h = 60' cioè 1 ora ha 60 minuti
• 1 s = 60" cioè 1 minuto ha 60 secondi
• Le operazioni con le ore: per esempio 3.5 h (cioè 3 ore e mezza) dopo le 23 sono le 2:30 (di notte).
• 1 anno (standard) ha 365 giorni, 1 anno bisestile ha 366 giorni
• Il comune dado ha 6 facce numerate da 1 a 6
• Elementi basici di geometria euclidea piana: punto, retta, semiretta, segmento, piano, semipiano, triangolo, triangolo rettangolo, triangolo equilatero, rettangolo, quadrato, cerchio, semicerchio, perimetro, area...
E in particolare:
⋆ Il triangolo di base b e altezza h ha area $\frac{1}{2}\, b\, h$.
⋆ Il quadrato di lato a ha perimetro $4\,a$ e area a^2
⋆ Il rettangolo di lati a e b ha perimetro $2\,a + 2\,b$ e area $a \cdot b$
⋆ Il cerchio di raggio r ha ciconferenza $2\,\pi\,r$ e area $\pi\,r^2$, e $\pi \approx 3.14$
⋆ Il parallelepipedo di lati a, b, c ha volume abc, e allora il cubo l^3
⋆ Il cilindro retto ha volume $area\_di\_base \cdot altezza$
⋆ La sfera di raggio r ha volume $\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

1.2 Retta, cerchio e altre figure

Consideremo *concetti primitivi* il *punto* e anche:
la *retta*, che viene divisa in 2 *semirette* da 1 punto *origine*;
la *retta orientata*, dove i punti si *precedono* o *seguono* fra loro;
il *piano (euclideo)*; che una retta *origine* divide in 2 *semipiani*;
il *segmento* di *estremi* 2 punti e *lunghezza* la loro distanza;
per semplicitị trattazione, anche la *curva*.

Dati un punto P e numero $r > 0$, l'insieme dei punti che hanno distanza r da C si chiama *circolo* – da altri detto *cerchio* – di centro C e raggio r. Si noti che è in un certo senso "vuoto": il centro non appartiene al circolo. In questa trattazione chiameremo *cerchio* l'insieme dei punti che hanno distanza $\leq r$ da C (cioè il "cerchio pieno" per così dire). Un segmento nel cerchio lungo $2r$ è un *diametro* . Un diametro divide il cerchio in 2 *semicerchi.* Due semirette diverse con stessa origine P dividono il piano in 2 *angoli* di *vertice* P. Se essi sono uguali si dicono *piatti.* Se uno è "minore" dell'altro quello minore si dice *convesso* e l'altro *concavo.* Due rette <u>del piano</u> con intersezione vuota le diremo *parallele.* Se l'intersezione ha esattamente 1 punto si dicono *incidenti.* Se l'intersezione coincide con le rette stesse, si tratta di 2 rette *coincidenti* (talvolta dette *parallele coincidenti*): in effetti è 1 sola retta considerata 2 volte. Due rette incidenti possono formare 4 angoli uguali che si dicono *retti*, e in quel caso le rette si dicono *ortogonali* o *perpendicolari.* Angoli "minori" di un angolo retto si chiamano *acuti* e angoli "maggiori" di un angolo retto e "minori" di un angolo piatto si dicono *ottusi.*
L'intersezione di un angolo di vertice P con un circolo di centro P è un *arco di circolo*, di cui si suppone nota come concetto primitivo la nozione di *lunghezza.* Il rapporto fra lunghezza di semicircolo e il raggio si denota con π e vale ≈ 3.14.
Si dice *figura* ogni insieme di punti: segmenti, rette, semirette, circoli, cerchi, semicerchi, sempiani, angoli...

1.3 Alcune altre nozioni sulle figure piane

Una figura si dice *limitata* se esiste un cerchio che la contiene (per esempio i segmenti), altrimenti *illimitata* (per esempio le rette).
Una figura si dice *convessa* se contiene ogni segmento con estremi in quella figura (per esempio il cerchio), altrimenti non convessa.
L'unione di 2 segmenti AB e BC (da altri denotati $[AB]$ e $[BC]$) non *allineati*, con un estremo B in comune si chiama *linea spezzata*

di 2 *lati* AB e BC e *vertice* B, e in modo analogo è definita quella di più *lati*. Non facciamo i dettagli, come pure per le seguenti intuitive denominazioni:

linea spezzata *chiusa*, o altrimenti *aperta*;
linea spezzata *intrecciata*, o altrimenti non intrecciata;
lati *consecutivi*;
lunghezza della linea spezzata.

Supponiamo noto il fatto (non banale da dimostrare) che una linea spezzata chiusa non intrecciata divide il piano in 2 parti. Quella limitata si chiama *poligono (semplice)* (o *non intrecciato*), coi lati e i vertici della linea spezzata, e *perimetro* la sua lunghezza. Il poligono si dice *equilatero* se ha i lati uguali ed *equiangolo* se ha gli angoli uguali, e *regolare* se è equilatero ed equiangolo.
I poligoni con 3 lati si chiamano *triangoli* e quelli con 4 *quadrilateri*. Un quadrilatero si chiama *rombo* se è equilatero, *parallelogramma* se ha i lati a 2 a 2 paralleli, *rettangolo* se ha i lati a 2 a 2 perpendicolari, *quadrato* se è equilatero equiangolo.
Il prodotto $b \cdot h$ delle lunghezze di 2 lati consecutivi di un rettangolo si chiama *area*. Ciò genera immediatamente il concetto di area di un parallelogramma, e per dimezzamento quello di area di un triangolo, $\frac{b \cdot h}{2}$, che a sua volta genera il concetto di area per ogni poligono, e con *passaggio al limite* (concetto non banale) l'area di ogni figura *sufficientemente regolare*, in particolare il cerchio, che si dimostra avere area πr^2. I punti, i segmenti, le linee spezzate, i circoli e gli archi di circolo, e perfino le rette hanno area 0. Non esiste (oppure è *infinita*) l'area di piano, semipiani e angoli.

1.4 Congruenza e similitudine

Se per 2 figure F ed F' esiste una funzione biiettiva $f : F \to F'$ che conserva le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *congruenti* e si possono immaginare come *sovrapponibili*; ma si faccia attenzione che l'azione della sovrappo-

sizione può necessitare di passare momentaneamente nello *spazio* in cui è contenuto il piano – può in effetti non bastare un movimento di strisciamento sul piano – come per i grafemi d e b. Tutte le rette sono congruenti, e anche le semirette e i semipiani.
Se F ed F' sono il piano euclideo stesso, f si chiama *isometria*.
Se per 2 figure F ed F' esistono un numero $\alpha > 0$ e una funzione biiettiva $g : F \to F'$ che moltiplica per α le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti ovvero precisamente

$$\overline{f(P)\, f(Q)} = \alpha \cdot \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *simili*. Tutti i segmenti sono simili, e anche i circoli, i cerchi, i quadrati e i triangoli equilateri.
Si dimostra che se un triangolo ha gli angoli uguali a quelli di un altro, essi sono simili. Allora dette a, b, c le misure dei lati del primo, e a', b', c' quelle del secondo, vale la (doppia) proporzione

$$a : a' = b : b' = c : c' \qquad \textit{ossia} \;\; \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \,.$$

1.5 Teorema di Pitagora

Un triangolo con un angolo retto si chiama *triangolo rettangolo*; *ipotenusa* il suo lato maggiore e *cateti* gli altri. Dette nell'ordine i, c_1 e c_2 le lunghezze di quei lati, vale:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2 \qquad \textit{Teorema di Pitagora}$$

* Complementi *

Teoremi di Euclide. Un triangolo con un angolo retto si chiama *triangolo rettangolo*; *ipotenusa* il suo lato maggiore e *cateti* gli altri. Dette nell'ordine i, c_1 e c_2 le lunghezze di quei lati, h quella della distanza dell'ipotenusa dal vertice *opposto* (cioè h è la lunghezza dell'*altezza relativa all'ipotenusa*), e p_1 e p_2 le lunghezze delle *proiezioni dei cateti sull'ipotenusa* (nell'ordine), valgono:

$$c_1^2 = h \cdot p_1, \quad c_2^2 = h \cdot p_2 \qquad \textit{Primo Teorema di Euclide}$$

$$p_1 : h = h : p_2 \qquad \textit{Secondo Teorema di Euclide.}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ $\star$
Se un millilitro ovvero centimetro cubo d'acqua corrisponde a 20 gocce, e supponendo sferica una goccia, trovarne il diametro.
L'unità d misura, cm, deve essere scritta esplicitamente nel risultato.
(In Farmacia e Medicina si ritiene in generale che 1 millilitro d'acqua corrisponda a 20 gocce. **Non c'è alcuna garanzia che ciò sia un fatto sempre vero, che siano sempre esattamente 20, ma di questo non ci occupiamo.** Con sostanze diverse dall'acqua distillata il numero 20 può cambiare molto ma non ce ne occupiamo. E naturalmente nel campo gravitazionale la forma non sarà esattamente sferica ma non ce ne occupiamo).

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

Il volume di 1 goccia è $\frac{1}{20}$ di centimetro cubo, cioè 0,05 cm^3 ovvero ml, e ricordando il volume della sfera abbiamo l'equazione nell'incognito raggio r

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{20} \qquad \Big/ \cdot \frac{3}{4\pi}$$

dove r è in cm, e $\frac{1}{20} = 0{,}05$ in cm^3, ma facciamo i calcoli senza unità di misura

$$r^3 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{20} \qquad \Big/ \sqrt[3]{}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{80\pi}}$$

e moltiplicando per 2 per avere il diametro invece del raggio

$$\boxed{2 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{3}{80\pi}} \text{ cm}}$$

e l'esercizio sarebbe finito.

Tuttavia possiamo esprimere meglio la soluzione trovata, facendo "entrare" il 2 sotto la radice cubica, con l'uguaglianza $2 = \sqrt[3]{8}$, e 8 si semplifica con 80,

$$\boxed{\sqrt[3]{\tfrac{3}{10\pi}} \text{ cm}}$$

Nota. Numericamente sono ≈ 0.46 cm, circa mezzo centimetro di diametro.

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
≈ Si consideri una pillola ipotetica ma comunque di apparenza alquanto normale – non viene qua seguito alcuno standard legale o industriale – il cui volume interno abbia la forma di un cilindro di diametro 0,4 cm e lunghezza 1,2 cm completato con due semisfere.
Calcolatone il volume, lo si riduca di $^1\!/_4$.
Si ricordi che cilindri e prismi hanno volume $area\,di\,base \times altezza$ qualunque forma abbia la base.

SVOLGIMENTO
Chiaramente qua è stato seguito lo standard della virgola decimale.
Prima di tutto osserviamo che nel testo viene dapprima chiamata *lunghezza* del cilindro quella che di solito in geometria elementare, e in particolare nella formula, viene chiamata *altezza* del cilindro: abituiamoci a tale ambiguità.
Ricordiamo la formule dell'area del cerchio e del volume della sfera in funzione dei raggi:

$$\pi\, r^2 \qquad \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

La base del cilindro è un cerchio di raggio pari alla metà del diametro

$$r = 0{,}2\,\text{cm}$$

e quello è anche il raggio delle semisfere.
Avendosi 2 semisfere, calcoleremo il volume di 1 sfera e lo sommeremo al volume del cilindro, la cui area di base è $\pi\, r^2$, facendo i calcoli dapprima senza unità di misura:

$$V_{sfera\,unione\,delle\,2\,semisfere} + V_{cilindro} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 + \pi\, r^2\, h =$$

$$\approx \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^3 + 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1{,}2 \approx 0{,}184213$$

@

che ora riduciamo *di* $^1\!/_4$, come richiesto, con la formula
@@
$x \mapsto x - \frac{1}{4}\,x$ (da tenere ben distinta dalla $x \mapsto \frac{1}{4}\,x$ corrispondente a "ridurre *a* $^1\!/_4$")

$$\approx 0{,}184213 - \frac{0{,}184213}{4} \approx 0{,}13816$$

e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{0{,}138\ \text{cm}^3}$$

(Si tratta di 138 mm^3, molto approssimativamente $\frac{1}{7}$ di centimetro cubo ovvero millilitro).

NOTA. Le scritture frazionarie come $^1\!/_4$ e $\frac{1}{7}$ vengono escluse dalla *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano:

> evitare l'uso delle frazioni (ad esempio, $^1\!/_2$ compressa ovvero "metà compressa" puè essere frainteso con 1 o 2 compresse) e sostituire, ove possibile, il farmaco con altra forma farmaceutica avente il dosaggio necessario

ma esse continueranno a trovarsi in un'infinità di testi, anche di Farmacia.

Indice delle 2 Parti, delle 4 Sezioni e dei 12 Capitoli

Segue l'Indice delle 64 lezioni.

Indice delle 64 Lezioni

PARTE A — MATEMATICHE DELLA CERTEZZA

Sezione A1 – Matematiche elementari

Sezione A2 – Calcolo infinitesimale

PARTE B — MATEMATICHE DELL'INCERTEZZA

Sezione B1 – Calcolo delle probabilità

Indice delle Lezioni e Paragrafi

Contents

"Non c'è niente di più pratico di una buona teoria", cit.

Nota sugli esercizi

Legenda. Per esprimere i risultati degli esercizi valgono questi simboli:
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato

PARTE A — MATEMATICHE DELLA CERTEZZA

Sezione A1 – Matematiche Elementari

I – Insiemistica e logica

2 I numeri

2.1 Perché numeri, se ci interessano farmaci?

"Se non misuri le cose non puoi migliorarle" Lord Kelvin (quello della scala termometrica assoluta).

Citazione completa, da https://it.wikiquote.org/wiki/William_Thomson:

> Io spesso dico che quando tu puoi misurare ciò di cui parli, ed esprimerlo in numeri, sai qualcosa di esso; ma quando non lo puoi misurare, ed esprimerlo in numeri, la tua conoscenza è di tipo povero ed insoddisfacente; può essere

> l'inizio di conoscenza, ma sei a mala pena avanzato, nei tuoi pensieri, allo stadio di "scienza", di qualunque cosa si tratti.

(Alla fine di questa trattazione, vedremo che misurarle non basta più, bisogna sottoporre i numeri ad analisi statistica).

Detto molto approssimativamente, la Medicina moderna e con essa la Farmacia, tende sempre più a ridurre

la Medicina a Biologia
la Biologia a Biochimica
la Biochimica a Chimica
la Chimica a Fisica
la Fisica a Matematica.

(*Scientismo*).
Da ciò seguono molti successi. E pure insuccessi, anche perché ad ogni "riduzione" si fa un'approssimazione, più precisamente si sostituisce una realtà con un suo *modello*, inevitabilmente approssimato. Nondimeno, appare chiarissimo che i modelli matematici riaffiorano costantemente in tutte le sopraelencate Scienze Applicate, *e in tutte le altre*. In qualche modo, come osservava Galilei nel Seicento, il linguaggio della Natura appare effettivamente "scritto" in termini matematici.

Citazione completa, da https://it.wikiquote.org/wiki/Galileo_Galilei:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

E già Pitagora 25 o 26 secoli fa:

"Ogni cosa si adatta al numero"

Detto grezzamente, i numero saltano fuori dappertutto.

2.2 Alcuni usi dei numeri in Farmacia

Ecco alcuni usi dei numeri in Farmacia:

• gestione economica della Famacia
• gestione logistica della Farmacia
• dosare sostanze
• esprimere parametri corporei, come la temperatura o la glicemia
• confrontare performance di diversi farmaci
che si potrà fare dopo la cosa seguente:
• riassumere molti dati in pochi numeri densi di significatività.

2.3 Gli insiemi numerici

Supponiamo noti:
• $\mathbb{N}$: i numeri naturali: 0, 1, 2...
• $\mathbb{Z}$: i numeri interi: sono di 3 tipi:
∘ i numeri naturali diversi da 0, detti *interi positivi*: 1, 2, 3...
∘ i loro *opposti*, detti *interi negativi*: -1, -2, -3...
∘ lo 0.
• $\mathbb{Q}$: i numeri razionali: sono di 2 tipi, riconoscibili dalla loro scrittura decimale (ma la distinzione è poco significativa perché dipende dalla base 10 scelta per la scrittura dei numeri):
∘ i numeri decimali limitati, come $2\,018$ e -2.018
∘ i numeri decimali illimitati periodici, come $0.\overline{142\,857} = \frac{1}{7}$,
ed eventualmente con *antiperiodo*: $0.08\overline{3} = \frac{1}{12}$
→ entrambi i tipi ammettono una scrittura sotto forma di frazione: $\frac{2018}{1}$, $-\frac{2018}{1000}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{12}$, rispettivamente
• $\mathbb{R}$: i numeri reali: sono di 2 tipi:
∘ i razionali, qua sopra esposti
∘ gli irrazionali: la loro scrittura decimale è un numero decimale illimitato non periodico, come

$$\sqrt{2} = 1.4142... \approx 1.41 \qquad \pi \approx 3.14$$

(Esistono poi i numero complessi $\mathbb{C}$ che non tratteremo, e pure altri insiemi "numerici").

2.4 Sulla natura dei numeri

Qualunque approccio si usi nella trattazione dei numeri, qualcosa deve essere ritenuto noto a priori.
Allora per praticità qua sopra si è ritenuto noto praticamente *tutto*.
Per chi non si accontentasse, diamo qualche cenno sulla natura dei numeri – comunque poi non di grandissima utiltà in Farmacia.

Il numero 2 è quel qualcosa che hanno in comune

l'insieme delle orecchie di ogni gatto normale

l'insieme delle ali di ogni piccione normale

l'insieme degli elettroni di ogni atomo di elio

l'insieme dei protoni di ogni atomo di elio
eccetera eccetera, ogni insieme... di *due* elementi.

Similmente con ogni altro *numero naturale*.

I numeri interi possono essere costruiti in un modo complicato con coppie di numeri naturali, oppure in un modo più triviale... anteponendovi un simbolino, il *meno*. (Sì, funziona).

I numeri razionali nascono dalle frazioni, che di fatto sono coppie ordinate di numeri interi, dicendo equivalenti $\frac{2}{3}$ e, per esempio, $\frac{4}{6}$, mediante una formula (formula del prodotto incrociato), e similmente per tutte le altre frazioni.

La generazione poi dei numeri reali è alquanto più complessa, ma conviene vederli come punti di una retta orientata – supposto noto il concetto.

2.5 Numeri e loro notazione

Una cosa è un numero, e un'altra è la sua notazione.
Esempio: 4 rappresentazioni esatte di un numero:

$$\frac{2}{64} \quad = \frac{1}{32} \quad = 0.03125 \quad = 3.125\%$$

e 6 sue rappresentazioni approssimate:

$$\approx 0.0313 \quad \approx 0.31 \quad \approx 0.03$$

$$\approx 3.13\% \quad \approx 3.1\% \quad \approx 3\%$$

Esempio meno banale:

$$\sqrt{9-\sqrt{32}} \qquad 2\sqrt{2}-1 \qquad 1.8284...$$

sono lo stesso numero in 3 rappresentazioni diverse. Una semplice calcolatrice porta la prima o la seconda forma nella terza.
(Un difficile calcolo porta la prima forma nella seconda).

2.6 Punto e virgola decimali, e punto a mezza altezza

Nella scrittura dei numeri con le cifre decimali (numeri "arabi", di origine indiana)

0, 1, 2...9

ci sono 2 questioni:
– separare la parte intera dalle cifre decimali
– separare eventualmente le terne di cifre per facilitare la lettura.
Per risolvere le $\underline{2}$ questioni vengono *variamente usati* $\underline{4}$ simboli:
- la virgola
- il punto
- lo spazietto
- il punto a mezza altezza ·

Incredibilmente a tutt'oggi non esiste uno standard internazionale per il separatore della parte decimale.

Per esempio 1 caloria termochimica, con simbolo cal,

secondo i testi in italiano equivale a 4,184 J

secondo i testi in inglese equivale a 4.184 J.

Ebbene, si tratta di *poco più di 4* Joule.

Negli stati di lingua inglese e negli articoli scientifici internazionali in inglese di solito si usa il punto decimale, e in Italia spesso la virgola decimale.

Molti Autori che usano il punto come separatore decimale, usano la virgola come separatore delle migliaia.

Wikipedia in italiano dice che 1 tesla equivale a 10.000 gauss

Wikipedia in inglese dice che 1 tesla equivale a 10,000 gauss.
Ebbene, si tratta di *diecimila* gauss. (Sono unitàdi misura del campo magnetico, quello della risonanza magnetica).

E su calcolatrici diverse, materiali o virtuali, disponibili qua in Italia, il punto e la virgola hanno proprio quei 2 diversi significati! **Attenzione!**

Nei vari luoghi del mondo ci si può aspettare una varietà di usi.

Spesso si riesce a capire il significato del punto, o della virgola, dal contesto, e, sulla calcolatrice, provando a scrivervi numeri.

Ecco (un'approssimazione del)la radice quadrata di due milioni, come può apparire su diverse calcolatrici:

1,414.21356

1.414,21356

Usando il punto decimale si segue il miglior standard che sperabilmente si ritroverà negli articoli scientifici internazionali di Farmacia, in lingua inglese. (Ma non può qua essere garantito).
Invece in farmacia in Italia in generale si troverà quasi l'opposto:
virgola per separare la parte intera dai decimali: $\pi \approx 3{,}141$
punto per separare le migliaia: 1.250 per milleduecentocinquanta.

Giustamente la *Raccomandazione per la prevenzione degli errori in terapia conseguenti all'uso di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli* (settembre 2018) del Ministero della Salute italiano ci ricorda che

> **L'uso non standardizzato di abbreviazioni, acronimi, sigle e simboli, può indurre in errore e causare danni ai pazienti**

Senza qua voler fare *legislazione farmaceutica*, argomento articolatissimo e complessissimo, citiamo comunque da quel testo:

> usare il punto per separare i tre zeri delle migliaia o usare parole come 1 milione per favorire la corretta interpretazione (ad esempio, 1000 unità va scritto 1.000 unità, 10000 unità va scritto 10.000 unità)

Questo testo fa una scelta drastica: usa

entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale, per abituare lo studente, e, volendosi limitare, considererà solo occasionalmente lo standard del punto a mezza altezza.
Inoltre, seguendo il N.I.S.T. (National Institute of Standards and Technology) statunitense, di solito userà lo spazietto come separatore delle terne di cifre.
Per esempio per la costante di Faraday il N.I.S.T. dà

$$96\,485.332\,12\ldots\ \mathrm{C\ mol^{-1}}$$

(Che veramente parrebbe la scrittura migliore, N.d.S.).

(Altri separano con lo spazietto le cinquine di cifre.)

Ma talvolta, per abituare lo studente, si userà come separatore delle terne di cifre la virgola o il punto, stranamente usati solo prima del punto/virgola decimale.

Il punto a mezza altezza.

Su certi testi tecnico-scientifici, talvolta antiquati ma talvolta modernissimi, $3{\cdot}673$ indicherebbe quel numero minore di 4 che in italiano scriverebbero 3,673: cioè, alcuni usano il punto a mezza altezza come se fosse un punto/virgola decimale: ecco un esempio in articolo scientifico (sul cancro infantile, 2017) su rivista scientifica internazionale di alto livello, The Lancet Oncology: `Link->`

Since the 1980s, the global WSR[3] of registered cancers in children aged

[3] Age-standardised incidence rate.

0-14 years has increased from 124·0 (...) to 140·6 (...) per million person-years.

Oppure si veda su The Lancet stesso, la “rivista madre”, di altissimo livello, nel *comment* (2020) (cosa diversa da un *articolo scientifico* [*peer review*]) a questo Link->, in cui si noti pure lo spazietto separatore:

> projections suggest that even fairly short lockdown measures, combined with severe mobility disruptions and comparatively moderate food systems disruptions, result in most LMICs[4] having an estimated average 7·9% (...) decrease in GNI[5] per capita relative to pre-COVID-19 projections (...) 128 605 (...) additional deaths in children younger than 5 years during 2020

Si veda ancora questo esempio, su come scriveremo in generale:

il punto a mezzo indica la moltiplicazione→ $3 \cdot 673 = 2\,019$ ← *si noti lo spazietto*

Ripetiamo che il presente testo elementare, dovendosi limitare, userà quasi solo il punto decimale e la virgola decimale, riservando pochissimo spazio al punto a mezza altezza con funzione di punto decimale ovvero virgola decimale, lasciando in generale quel simbolo per la moltiplicazione.

2.7 Note sugli errori medici e farmaceutici

Leggiamo sul sito dell’Organizzazione Mondiale della Sanità in http://www.emro.who.int/emhj-volume-17/issue-2/article9.html

> The issue of medication prescribing errors was little discussed until (...) Barker and McConnell in the United States of America (USA) first demonstrated that medication errors occur more frequently than suspected. They estimated a rate of 16 errors per 100

[4] Low-income and middle-income countries.
[5] Gross national income.

> **doses** (...) errors by pharmacists in dispensing drugs are an important cause of medication error, and many factors have been identified. The reported rate of dispensing errors ranges from 3.8% to 12.4% [Enfasi aggiunta]

SONO PERCENTUALI MOSTRUOSE [N.d.S.], speriamo siano ben state ridotte dagli anni a cui si riferiscono quelle ricerche (1962 e 1991).

Leggiamo riportato su sito governativo statunitense in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9559708 (articolo del 1998)

> **Forty-two percent of errors were considered to put the patient at risk** for a serious or severe preventable adverse outcome. Errors in decimal point placement, mathematical calculation, or expression of dosage regimen accounted for 59.5% of dosage errors. The dosage equation was wrong in 29.5% of dosage errors. [Enfasi aggiunta]

2.8 Numeri romani

Per i numeri interi positivi esiste anche la scrittura in numeri romani. In questa trattazione elementare ci limitiamo ai primi 12, che si trovano nella numerazione dei capitoli:
1 I – 2 II – 3 III – 4 IV – 5 V – 6 VI – 7 VII – 8 VIII – 9 IX – 10 X – 11 XI – 12 XII
Per esempio un cancro al IV stadio è più grave di uno al III stadio. E si consideri l'ossido di titanio (IV) o titanio diossido (il comunissimo colorante E171 di molti farmaci e vernici per muri,

ben sospettato di tossicità[6]), e addirittura

manganese(II) oxide
manganese(II,III) oxide
manganese(III) oxide
manganese(IV) oxide
manganese(VI) oxide
manganese(VII) oxide.

(Sarebbe anche bello ricordare il simbolo ss per $\frac{1}{2}$).

In Farmacia raramente servono numeri romani maggiori di 12, per esempio
– nella numerazione dei volumi delle riviste scientifiche
– nella scrittura dell'anno delle riviste scientifiche
– nella numerazione delle pagine fra la seconda di copertina e la pagina 3 di molti libri, per esempio European Pharmacopoeia, eighth edition, volume 1, Council of Europe, Strasbourg, ISBN: 978-92-871-7525-0, online in `LINK->` (Attenzione: questa online, del 2013, non è l'ultima versione).

Per numeri maggiori di 12 si possono
– studiare le (semplici) regole della numerazione romana
– online su WolframAlpha digitare

`roman number` *numero decimale o romano da convertire*

2.9 Notazione scientifiche dei numeri

Su molte calcolatrici e testi tecnico-scientifici, `E` (ma purtroppo anche `e`) indica 10^, con esponente positivo o negativo, per esem-

[6] "Dopo aver condotto una recensione di tutte le evidenze scientifiche disponibili in merito, l'EFSA ha concluso che non sono da escludere timori circa la genotossicità delle particelle di TiO2. Sulla scorta di tali preoccupazioni in termini di genotossicità gli esperti dell'EFSA non ritengono più sicuro il biossido di titanio se usato come additivo alimentare. In altre parole per l'E171 non è possibile stabilire una dose giornaliera accettabile (DGA). (...) Nel loro ruolo di gestori dei rischi la Commissione europea e gli Stati membri rifletteranno ora sul parere fornito dell'EFSA e decideranno in merito a eventuali misure normative o consigli appropriati da dare ai consumatori. (...) L'EFSA sta vietando il biossido di titanio? No. Il compito dell'EFSA si limita alla valutazione dei rischi (...)" Si veda anche, precedente, in `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/28106049` Food-grade TiO2 impairs intestinal and systemic immune homeostasis, initiates preneoplastic lesions and promotes aberrant crypt development in the rat colon. Scientific reports (2017), 7, 40373. Bettini S, Boutet-Robinet E, Cartier C, Coméra C, Gaultier E, Dupuy J, Naud N, Taché S, Grysan P, Reguer S, Thieriet N, Rèfrègiers M, Thiaudiére D, Cravedi JP, Carriére M, Audinot JN, Pierre FH, Guzylack-Piriou L, Houdeau E.

pio
`6.022E23` $= 6.022 \cdot 10^{23} = 602\,200\,000\,000\,000\,000\,000\,000$
`1.38E-23` $= 1.38 \cdot 10^{-23} = 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,013\,8$
(Approssimazioni del Numero di Avogadro e della Costante di Boltzmann, private delle unità di misura).
Ci si aspetti di trovare scritto anche `E+23` invece di `E23`, e purtroppo anche `e+23` ed `e-23`, con facile equivoco[7] col numero e.

(Ma non si confonda questo simbolo `E` con l'uguale simbolo che alcune calcolatrici danno... in caso di errore di calcolo! Per esempio immettendo `1/0`).

Sono scritture equivalenti

`2.019E3` e anche `2.019E+3` ma si evitino `2.019e3`, `2.019e+3`
`2.019·10`^{3} e anche `2.019·10^3`
`2.019*10`^{3} e anche `2.019*10^3`
`2.019 10^3` ← scrivete così su WolframAlpha ma non altrove
`2.019×10`^{3} e anche `2.019×10^3`

e nell'ultima si badi di non confondere il *per* con una *ics*, specialmente scrivendo a mano un'equazione come

$$2.3 \times 10^3 + 5.4\, x\, 10^2 = 0$$

2.10 Varia

Nella pratica, su internet spesso si trovano scritture grezze come `2.019x10-3`, da intendendersi come `2.019E-3` = `2.019` $\times 10^{-3}$.

Si noti che in certi contesti si usa il simbolo `K` o `k` per indicare le migliaia e cioè esso significa $\cdot 1\,000$, per esempio le 2.5 `K` *views* ossia visualizzazioni della pagina web della farmacia Cuore Integerrimo, ma bisogna essere pronti a trovare con lo stesso significato anche

[7] Su testi diversi, $3\,\mathrm{e} - 2$ può indicare $3 \cdot 10^{-2} = 0.03$ oppure $3\,\mathrm{e} - 2 \approx 6.154\,85$. Su WolframAlpha si eviti del tutto la notazione con `E` ed `e` perché entrambi i simboli vengono usati *anche* per il numero e, con facile possibilità di errori; si scriva invece `6.022 10^23`.

THD, cioè *thousand*.

Si troverà anche MM e perfino mm per “milione”.

E quant’altro... – *estote parati*.

2.11 I decimali sono gratuiti – usiamoli

Nella Farmacia che arriva all’utilizzatore finale ben difficilmente si daranno più di 3 cifre significative:

37.8 °C
35%
0,5 g

con rispettivamente 3, 2 e 1 cifra significativa.

Come indicazione generalissima, cercheremo i fare i calcoli con 5 o 6 cifre significative, e di dare i risultati con 3 o 4 cifre significative. Calcoli successivi degradano via via la precisione.

L’operazione che più degrada la precisione è la sottrazione fra numeri vicini. Per esempio

$$\frac{1}{\sqrt{10} - \pi}$$

calcolato come $\frac{1}{3.16 - 3.14}$ è sbagliato del 3%, sgradevole;
calcolato come $\frac{1}{3.1623 - 3.1416}$ è sbagliato solo dello 0.07%.

Nei 2 casi gli errori assoluti sono rispettivamente 1.7 e 0.04 circa.

2.12 Cifre significative

In Matematica 0.5 e 0.50 sono uguali a $\frac{1}{2}$, e 0.50 non si scrive.

Invece nelle Scienze Applicate
0.5 rappresenta una quantità fra 0.45 e 0.55

0.50 rappresenta una quantità fra 0.495 e 0.505
Si capisce che 0.50 si ritiene conosciuto con maggior precisione.

Per esempio l'articolo scientifico Revised Estimates for the Number of Human and Bacteria Cells in the Body stima che il corpo del "reference man" abbia $3.0 \cdot 10^{13}$ cellule, e si guarda bene dall'impoverire il risultato scrivendo 3 invece di 3.0.

2019 ha 4 cifre significative
20.20 ne ha 4
2020 ha 3 o 4 cifre significative – ahimè
20.2 ne ha 3
20 ne ha 1 oppure 2 – ohibò
21 ne ha 2
0.21 ne ha 2
0.210 ne ha 3
0.021 ne ha 2
In pratica gli zeri iniziali non sono cifre significative.
Quelli finali di numeri interi – sono un mistero.
Si veda questo `LINK->`

La problematica è complessa perché in generale non si sa la precisione con cui è scritto un dato.

La terza parte di un chilogrammo sarà
0.3333 kg se 1 era da intendersi 1.000
0.333 kg se 1 era da intendersi 1.00
0.33 kg se 1 era da intendersi 1.0
0.3 kg se 1 era da intendersi proprio solo 1

Possono formarsi varie problematiche, per esempio quando si fanno conversioni di unità di misura. Per esempio a proposito del Coronavirus (2020) circola ampiamente il consiglio di tenere una distanza di 1.82 m da ogni altra persona. Addirittura in un articolo scientifico di molto precedente[8] leggiamo, su altro virus:

[8] Am J Respir Crit Care Med. 2016 Aug 1;194(3):308-16. doi: 10.1164/rccm.201509-1833OC. Evidence of Respiratory Syncytial Virus Spread by Aerosol. Time to Revisit Infection Control Strategies? Kulkarni H, Smith CM, Lee Ddo H, Hirst RA, Easton AJ, O'Callaghan C.
In `https://www.atsjournals.org/doi/pdf/10.1164/rccm.201509-1833OC`

> Adult volunteers who sat 1.82 m from an infected child did not become infected.

Di fronte a tale precisione viene il sospetto che la rivista scientifica richiedesse – com'è usuale – il Sistema Metrico Decimale, mentre la ricerca era stata fatta misurando 6 piedi, poi trasformati in 1.82 metri – non bene in effetti: corrispondono a circa 1.83 m – con *fittizia* precisione di 3 cifre significative. La "regola dei 6 piedi" si trova per esempio in questo LINK ai presrtigiosi CDC statunitensi, Centers for Disease Control and Prevention: "Close contact is defined as being within 6 feet for at least a period of (...)"

2.13 Scrittura percentuale dei numeri

Altra forma di scrittura dei numeri è la forma percentuale, che si ottiene moltiplicando il numero per 100 e posponendovi il simbolo %:

$$x \equiv 100\,x\,\% \quad \text{per esempio } \frac{3}{2} = 150\%. \text{ E ancora:}$$

$$0 = 0\% \quad 1 = 100\% \quad \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$-0.3 = -30\% \quad \frac{4}{3} = 1.\overline{3} = 133.\overline{3}\% \approx 133.3\% \quad 0.05 = 5\%$$

Non si confondano questi 3 numeri:
5%=0.05=1/20 numero classico della Statistica Inferenziale
0.5%=0.005=1/200 o 5 per mille
0.05%=0.0005=1/2000 o 0.5 per mille

Per le probabilità, che sono numeri fra 0 e 1, la scrittura percentuale è tipica, per esempio

$$P(\text{un dado regolare dà 3}) = \frac{1}{6} \approx 16.7\%.$$

Dalla scrittura percentuale si ottiene quella decimale dividendo per 100 e togliendo il simbolo %, per esempio

$$75\% = 0.75 \qquad 175\% = 1.75$$

Ma si faccia attenzione che nelle Scienze Applicate la scrittura

$$a \pm 10\%$$

non indica affatto i 2 numeri $a \pm 0.1$ (che sarebbe il significato pedissequo in Matematica) nè l'intervallo $[a - 0.1, a + 0.1]$ bensì l'intervallo $[a - 0.1\,a, a + 0.1\,a]$.
E nel caso generale, con una percentuale qualunque fra 0% e 100%,

$$a \pm t\,\% \text{ indica l'intervallo } [(1 - t\,\%)\,a, (1 + t\,\%)\,a]$$

Naturalmente invece se si tratta di 2 percentuali il significato è quello ovvio:

$$42\% \pm 5\% \text{ indica l'appartenenza all'intervallo } [37\%, 47\%]$$

2.14 Scrittura reciproca dei numeri

La scrittura reciproca dei numeri è del tutto indicata per le probabilità minori dell'1%. Per esempio
invece di probabilità 0.0005 ovvero 0.05%
si può dire 1 probabilità su 2000
decisamente più intelligibile.
Similmente 0.0001% corrisponde a 1 (probabilità) su un milione.

Si fa così: divido 0.0001 per 100 e ottengo 0.000001 senza %:

$$0.0001\% = 0.000001$$

e poi calcolo il reciproco con 1: trovando il milione detto.

Tuttavia può presentarsi una problematica praticamente insolubile al livello di questa trattazione elementare:

0.000 7% corrisponderebbe a (circa) 1 (probabilità) su 142 857 ma questo potrebbe far pensare ad una conoscenza del dato originario con una precisione che in realtà non si aveva, proprio come se si fosse avuto 0.000 700 000%, con 6 cifre significative. Diciamo, senza veramente risolvere il problema, "circa 1 (probabilità) su 140mila", come potrebbe trovarsi scritto su un testo divulgativo.

In Farmacia. Se l'utilizzatore finale, il cliente o paziente, legge il contenuto di magnesio per grammo in questi tipici integratori alimentari

Magnesio Citrato 0,160 g
Magnesio Cloruro 0,120 g
Magnesio Gluconato 0,058 g
Magnesio Orotato 0,077 g

potrebbe trovarsi in difficoltà a capire la situazione:

quanto magnesio effettivamente c'è nel prodotto?

Con la scrittura reciproca la situazione può risultare più chiara:

Magnesio Citrato circa 1 parte su 6
Magnesio Cloruro circa 1 parte su 8
Magnesio Gluconato circa 1 parte su 17
Magnesio Orotato circa 1 parte su 13

Questi numeri si calcolano con il passaggio al reciproco: 1:0,160=6,25.

Se una sostanza è pura al 99.5%, il contaminante – chiamiamolo così solo adesso con linguaggio comune seppure tecnicamente impreciso – è lo 0.5%, cioè 1 parte su 200 – decisamente più chiaro.

2.15 Note sulle percentuali prossime al 100%

Se un tale ha una quota di proprietà di una farmacia del 98%, o del 99%, per lui non cambia quasi niente in termini di guadagni. Per il comproprietario cambia tutto: nel secondo caso guadagna la metà, 1% invece di 2%.

Se una malattia ha *tasso di sopravvivenza* 99% e un'altra 99.9%, la prima ha una *letalità* decupla della seconda.

In questi casi gli arrotondamenti possono essere molto dannosi.

2.16 Altro

Altre cose interessanti, per le quali il lettore interessato troverà molti altri dettagli nella sezione di Complementi:
• simboli pericolosamente simili, come lo zero e la o; e come la i maiuscola e la elle minuscola di I-doped BiOCl, l'ossicloruro di bismuto drogato con iodio;
• la pericolosità delle ricette scritte male a mano:

> Doctors' sloppy handwriting kills more than 7,000 people annually.

(negli USA, 2006);
• la sconcertante confusionarietà delle parole "bilione" e "trilione", attualmente entrambi tradotte con "trillion" da Wordreference: 2 parole da evitare come la peste scrivendo in italiano, però, in Chimica, senza alcuna ambiguità:
ppm = parts per million = parti per milione
ppb = parts per billion = parti per miliardo[9]
• il fantasmagorico microgrammo, da alcuni indicato con $\mu\, g$, da altri con mcg, e da altri con ug...
mentre la predetta Raccomandazione ministeriale esige la parola *microgrammi* completa;
• e altro ancora.

2.17 Bottom line

Bene Lord Kelvin ha individuato l'*utilità* delle misure numeriche per il progresso delle Scienze, avendo peraltro già Galilei e Pitagora individuato l'universalità – in qualche modo *ontologica* – dei numeri nella realtà. Un'altra affermazione del pur ottimo Lord Kelvin, è che il futuro non è degli aeroplani ma delle mongolfiere: "non ho la minima molecola di fede nella navigazione aerea diversa da quella aerostatica"*Link–>*. Non per dire male dell'ottimo

[9] Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera: "This notation is not part of the International System of Units (SI) system and its meaning is ambiguous."

scienziato, ma per iniziare questo testo indirizzando lo studente verso lo spirito critico, che già le problematiche della semplice scrittura dei numeri dovrebbero avergli ispirato.

* Complementi *

2.18 Complementi – Simboli simili

Nella scrittura a mano, ma anche in molti font digitali su carta o su schermo o display (di calcolatrice o macchina diagnostica), è facile confondere – vieppiù se non si vede tanto bene – alcuni simboli, con possibili errori, in particolare:

• numeri:

∅ Θ 8 zero barrato, zero barrato, otto

• numeri e lettere:

0 O zero, o maiuscola; altro font: `0, O`

`6, b` sei, bi minuscola

`5 s S` cinque, esse minuscola, esse maiuscola

`q g 9`, in certi font, con aggravamento per testo sottolineato.

1 l I uno, elle minuscola, i maiuscola; altro font: `1 l I`

Per esempio solo una conoscenza della Chimica permette di riconoscere (ed eventualmente ricopiare correttamente al computer) le due lettere i maiuscola ed elle minuscola in “I-doped BiOCl”[(10)]– qua a stento distinguibili ma talvolta proprio uguali sui browser. Se il testo ambiguo è in formato digitale, si può risolvere l’enigma in https://www.iorl.org/

Paradossalmente appare che su internet i software automatici, evidentemente leggendo male con un OCR (o forse male imbeccati da un umano)

Acido Ialuronico

come se fosse con la elle minuscola invece che con una i maiuscola, hanno inventato un inesistente

Acido Laluronico:

[10] Si tratta dell’ossicloruro di bismuto drogato con iodio.

E qua sorridiamo ma se ci fosse da reperire in magazzino, per un malato grave, un farmaco male archiviato – e ormai praticamente irreperibile – sarebbe grave.

2.19 Complementi – Scrittura a mano

Sull'ulteriore problema della pessima calligrafia dei medici che scrivono le ricette mediche si veda "Poor handwriting remains a significant problem in medicine" del Journal of the Royal Society of Medicine, riportato su sito governativo statunitense: Link->

Citiamo anche dal Time, http://content.time.com/time/health/article/0,8599,1578074,00.html

> Doctors' sloppy handwriting kills more than 7,000 people annually. It's a shocking statistic, and, according to a July 2006 report from the National Academies of Science's Institute of Medicine (IOM), preventable medication mistakes also injure more than 1.5 million Americans annually. Many such errors result from unclear abbreviations and dosage indications and

illegible writing

(Enfasi aggiunta).
Con l'informatizzazione del sistema sanitario e farmaceutico è verosimile che quel dato (7000 morti/anno negli USA) diminuisca, e similmente in Italia.
E certo, se dei medici si ostinano a scrivere ,5 per 0,5 "risparmiando" uno zero, anche l'informatizzazione potrebbe non bastare. Tale scrittura è esplicitamente vietata dalla predetta Raccomandazione (settembre 2018) del Mistero della Salute italiano.

In essa leggiamo anche:

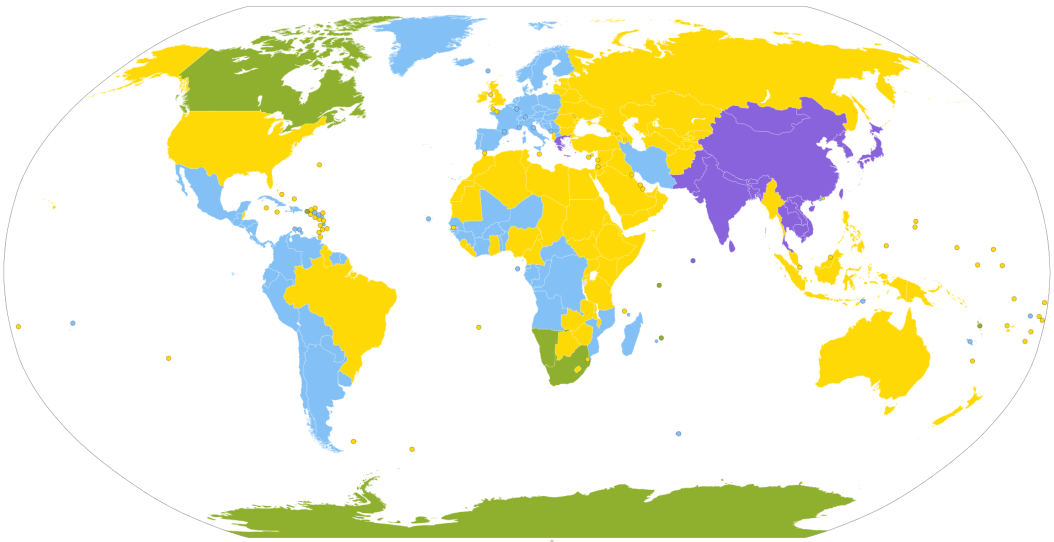
U (significato unità)
può essere erroneamente
interpretato come
"0" (zero)
causando un sovradosaggio
di 10 volte
ad esempio, 4U può essere
interpretato come 40

Si noti che negli U.S.A. non usano la scrittura italiana, a mano, del numero sette col taglietto orizzontale.

Se i problemi della scrittura a mano sono in diminuzione, invece con l'incombente anglicizzazione del linguaggio, può presentarsi un nuovo problema, con la lettura al telefono dei nomi dei farmaci. (La parola *ypsilon*, per fare un esempio, appare avere 8 pronunce: Link->).

2.20 Complementi – Falsi amici, e pure confusionari

La questione di bilione e billion (10^9 o 10^{12}?), trilione e trillion (10^{12} o 10^{18}?), è talmente ingarbugliata, con variazioni di significato non solo nello spazio ma addirittura nel tempo, che qua oltre ad osservare che attualmente (2021) WordReference online traduce entrambe le parole italiane “bilione” e “trilione” con *trillion* in inglese, ci limitiamo a linkare Wikipedia, l'enciclopedia libera, LINK->, e a... diffidare quando si leggono quei termini.



Nella figura di https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Scala_lunga_e_scala_corta.svg, nelle zone in azzurro – in teoria, ma si diffidi – il bilione (nelle sue varianti linguistiche) è 10^{12}, in quelle in giallo 10^9.

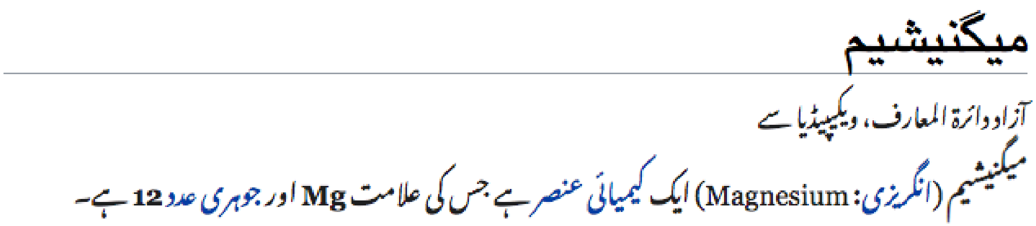
Si evitino come la peste le parole “bilione” e “trilione” scrivendo in italiano.

2.21 Note finali sulla scrittura dei numeri

Praticamente in tutto il mondo per scrivere i numeri si usano le “cifre arabe”

$$0, 1, 2 \ldots 9$$

e questa è una buona notizia. Anche gli arabi, che scrivono da destra a sinistra, scrivono i numeri nel verso “nostro”, cioè 243 significa 243 anche in un testo in arabo – buono a sapersi, per un farmacista che si troverà a operare in una missione più o meno di pace in una zona di lingua, o anche solo scrittura alfabetica, araba.



میگنیشیم

آزاد دائرۃ المعارف، ویکیپیڈیا سے

میگنیشیم (انگریزی: Magnesium) ایک کیمیائی عنصر ہے جس کی علامت Mg اور جوہری عدد 12 ہے۔

Sreenshot (5 ottobre 2021) da Wikipedia in urdu, lingua (non araba) scritta con alfabeto arabo.

Superato questo livello minimo di unitarietà, la difformità nella scrittura dei numeri, in questo inizio di XXI secolo, è *sconcertante*.

Un testo italiano sarà sufficientemente scientifico perché il numero 2.718 sia minore di 3, o è di livello così divulgativo che quel numero è... un migliaio di volte più grande?

Veramente, nella pratica, c'è da aspettarsi un po' di tutto: attenzione!

L'intelligenza artificiale online WolframAlpha – di cui in generale si può dire più che bene – usa il simbolo E sia per il numero e, sia per la notazione scientifica dei numeri, con serie possibilità di errori per l'utente:

WolframAplha interpreta l'input 3 E6 come $3 \times 6 \times \mathrm{e}$ cioè $18\,\mathrm{e} \approx 48.93$

WolframAlpha interpreta l'input 3E6 come $3 \cdot 10^6$ cioè $3\,000\,000$

(WolframAlpha interpreta l'input 2E6 come Groton Municipal Airport; è un eccesso di intelligenza e di interpretazione, si direbbe...)

Non vogliamo qua estendere più di tanto il discorso, ma si noti che se dai *dati grezzi* risulta che un farmaco è stato somministrato dall'11/3 al 12/8, calcoliamo che è stato somministrato

155 giorni se è avvenuto in Italia: dall'11 marzo al 12 agosto

(compresi)

36 giorni se è avvenuto negli Stati Uniti: dal 3 novembre all'8 dicembre (compresi).

Altre problematicità sorgono dalle unità di misura, e qua accenniamo soltanto alla seguente.

Il fantasmagorico microgrammo. Da alcuni indicato con $\mu\, g$, da altri con mcg, e da altri con ug...
La predetta Raccomandazione ministeriale esige la parola *microgrammi* completa.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> The microgram is typically abbreviated "mcg" in pharmaceutical and nutritional supplement labelling, to avoid confusion, since the μ prefix is not always well recognized outside of technical disciplines (...) In the United Kingdom, because serious medication errors have been made from the confusion between milligrams and micrograms when micrograms has been abbreviated, the recommendation given in the Scottish Palliative Care Guidelines is that doses of less than one milligram must be expressed in micrograms and that the word microgram must be written in full [Enfasi aggiunta]

Ma attenzione ai testi antichi, perché, ci avverte la stessa pagina di Wikipedia,

> The expression "mcg" is also the symbol for an obsolete CGS unit of measure known as the "millicentigram",

> which is equal to 10 μg

Ancora, la stessa pagina ci avverte in nota che

> The practice of using the abbreviation "mcg" rather than the SI symbol "μg" was formally mandated in the US for medical practitioners in 2004 by the Joint Commission on Accreditation of Healthcare Organizations (JCAHO) in their "Do Not Use" List: Abbreviations, Acronyms, and Symbols because "μg" and "mg" when handwritten can be confused with one another, resulting in a thousand-fold overdosing (or underdosing).

ESERCIZI SULLA LEZIONE 1

ES. 1$_{\mu 2021}$ $*$ Prendiamo come valori medi 5 litri di sangue in una persona e 5 milioni di globuli rossi al millimetro cubo. Quanti sono in tutto i globuli rossi in una persona? Si ricordi che 1 litro equivale a un cubo di lato 100 mm. Si esprima il risultato nella notazione scientifica con 2 cifre significative $n.m \times 10^k$ oppure $n.m\,\mathrm{E}\,k$.

SVOLGIMENTO
Ricordando il volume del cubo

$$volume = lato^3$$

per il litro abbiamo l'equivalenza

$$1\ \mathrm{L} = (100\ \mathrm{mm})^3$$

cioè

$$1\ \mathrm{L} = 10^6\ \mathrm{mm}^3$$

allora

$$5\ \mathrm{L} = 5 \times 10^6\ \mathrm{mm}^3$$

e considerando che ci sono 5 milioni di globuli rossi in ogni millimetro cubo

$$NumeroGlobuliRossi = (5 \times 10^6) \times (5 \times 10^6) = 25 \times 10^{12} =$$

$$\boxed{2.5 \times 10^{13}}$$

ovvero

$$\boxed{2.5\,\mathrm{E}\,13}$$

Nota 1. Se volessimo esprimere il risultato a parole, entriamo in un guazzabuglio di equivoci. A rigore sono 25 bilioni, ovvero, in inglese, *25 trillions*, ma di fatto alcuni anche in italiano direbbero "trilioni", con grande confusione; attualmente WordReference online traduce sia "bilione" che "trilione" con *trillion*; in inglese invece *billion* ha l'unico significato di "miliardo". Ma "trilione", per Treccani online, è 10^{18}.
Si evitino come la peste le parole "bilione" e "trilione".
Nota 2. Il numero di tutte le cellule del corpo umano è probabilmente di poco maggiore, secondo alcuni $\approx 3.0\,\mathrm{E}\,13$: buona parte delle cellule del corpo umano sono globuli rossi. Si veda `https://journals.plos.org/plosbiology/article?`

id=10.1371/journal.pbio.1002533#pbio.1002533.ref001 in cui si legge anche “We estimate the total number of bacteria in the 70 kg ”reference man” to be $3.8 \cdot 10^{13}$.” Un po’ di più.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

≈ Il punto e la virgola sono entrambi usati da alcuni come separatore delle migliaia, e da altri come separatore della parte intera dalle cifre decimali, ma spesso si riesce a capire quale dei significati ha il punto, o la virgola, dal contesto. Si considerino questi dati relativi a particelle ovvero corpuscoli, da considerare semplificatamente dischetti piani:

	PARTICELLE A	PARTICELLE B	PARTICELLE C
Diametro (nm)	987	12,140	92,500
Vita media (h)	14.5	56	122

Si ipotizzi una particella della stessa forma, che abbia un diametro ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C. Qual è l’area di questa particella, in nm^2 (che sono i nanometri quadrati)? Si esprima la soluzione usando lo spazietto per separare le migliaia e il punto decimale se ci sono decimali.

SVOLGIMENTO

La presenza del dato 14.5 ci indica che il punto non è usato come separatore delle migliaia ma come punto decimale; e invece la virgola è usata come separatore delle migliaia, in particolare nel diametro delle particelle C:

$$d = 92\,500\,nm$$

(qua meglio trascritto con lo spazietto invece della confondente virgola come spaziatore delle migliaia; ma purtroppo i testi tecnici e scientifici continuano a presentare queste problematiche e bisogna abituarsi ad affrontarle; per esempio si veda la tabella in
https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/).

Ora però dobbiamo occuparci dell’ipotetica particella col diametro d' ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C

$$d' = d - \frac{1}{5}d = \frac{4}{5}d = \frac{4}{5}92\,500\,nm =$$

$$= \frac{4 \cdot 92\,500}{5}nm = 74\,000\,nm$$

e allora raggio (la metà)

$$r = 37\,000\,nm$$

e ricordando che l’area del cerchio è πr^2 e che $\pi \approx 3.14$

$$\approx 4\,298\,660\,000\,nm^2$$

ma in effetti la precisione è illusoria, infatti con $\pi \approx 3.14$ intendiamo precisamente

$$3.135 \leq \pi < 3.145$$

e allora per l'area $A = \pi\, r^2$ vale

$$4\,291\,815\,000 \leq A < 4\,305\,505\,000$$

e allora come risultato preferiremo dare piuttosto

$$\boxed{\approx 4\,300\,000\,000\,nm^2}$$

(Eviteremo per adesso scritture come 4.3E9 o l'equivalente $4.3 \cdot 10^9$, e 4.30E9 o l'equivalente $4.30 \cdot 10^9$, e 4.300E9 o l'equivalente $4.300 \cdot 10^9$, eccetera, che dal punto di vista matematico rappresentano lo stesso numero ma nelle scienze applicate corrispondono a diversi livelli di precisione ovvero di *cifre significative*).
Usando un'approssimazione di π molto più precisa otterremmo

$$\approx 4\,300\,840\,342.764\,nm^2$$

con precisione sostanzialmente inutile (e pure fuorviante, perché *verosimilmente* il dato 92 500 è esso stesso un'approssimazione).
(Ma in generale per π usiamo la semplice approssimazione 3.14).

Come indicazione generalissima, cercheremo i fare i calcoli con 5 o 6 cifre significative, e di dare i risultati con 3 o 4 cifre significative.
(92 500 ha 3 cifre significative se non si specifica che ne ha 4 o 5).

3 Logica delle proposizioni

(Contro)esempi stupefacenti ci indicano che le affermazioni matematiche vanno dimostrate, non basta fare un “mostra e dimostra” come i Peanuts[11]. (Ma in generale qua non faremo dimostrazioni).

Le illusioni ottiche ci indicano che è inappropriato usare solo figure per fare dimostrazioni.

Le ambiguità linguistiche ci indicano che è inappropriato usare solo testo libero del linguaggio comune per fare dimostrazioni.

La varietà delle lingue ci induce a cercare un **preciso linguaggio matematico simbolico** che prescinda dalle lingue.

Tutto ciò viene fatto ad un livello molto profondo in Matematica ma in questo testo elementare considereremo solo qualche modesto elemento.

Prima di tutto consideriamo il simbolo = da intendersi nel senso “è lo stesso elemento”. (Due rette perpendicolari r e s sono senz’altro *uguali* nel senso del linguaggio comune ma dal punto di vista matematico sono *diverse*: $r \neq s$, non è la stessa retta). Per esempio $area_\Delta = \frac{1}{2}\, b\, h$.
In generale scriveremo 3 varianti del simbolo di uguaglianza:

$:=$ nelle definizioni, per esempio $f(x) := x^2$,

$\equiv$ nelle identità, per esempio $(x+1)^2 \equiv x^2 + 2\,x + 1$.

$\stackrel{EQ}{=}$ nelle equazioni, per esempio
$(x+1)^2 \stackrel{EQ}{=} x^2 + 5\,x + 1$, equazione con (unica) *soluzione* $x = 0$.

[11] Per esempio $n^2 + n + 41$ dà un numero primo per $n = 0, 1, 2, \ldots, 38, 39$ ma non per $n = 40$. E si consideri la tragica disillusione del tacchino induttivista.

Supporemo concetto primitivo (noto) le *proposizioni*. Esempi:

2 è pari

3 è pari (non è molto vero ma non importa, è proposizione)

X ha il diabete

Y è iperteso

Introdurremo alcuni simboli logici rigorosi.

Indicheremo con $\Rightarrow$ l'*allora*, ovvero meglio *implica*:
per esempio
$1009 \cdot 2 = 2018 \Rightarrow$ 2018 è pari.
Indicheremo con $\Leftarrow$ il *perché*:
per esempio
2018 è pari $\Leftarrow 1009 \cdot 2 = 2018$
Si noti che p$\Rightarrow$q si può scrivere q$\Leftarrow$p.

Indicheremo con $\Leftrightarrow$ il *se e solo se*
Per esempio:
X triangolo:
equiangolo $\Leftrightarrow$ equilatero

Supponiamo noti il *vero* e il *falso*.
Li denoteremo V e F ma internazionalmente possono trovarsi indicati T e F e in vari altri modi.

Una **congettura (indimostrata)** è un'affermazione che non è dimostrata vera e non è dimostrata falsa. (Ma è creduta vera da qualche persona significativa, sennò non ne parleremmo).

Esempio. Congettura di Glodbach (Eulero e Goldbach, 1742)
ogni numero pari è somma di 2 numeri primi.

Connettivi logici. Vediamo 4 *connettivi logici*: *non*, *et*, *vel*, *aut*. (Il primo a rigore è un operatore logico *unario*).

Tavola di verità del *non* ovvero ¬ ovvero ˜ ovvero NOT

p $\neg p$ scritto anche $\tilde{p}$ o semplicemente *non* p
V F
F V

Per esempio $p :=$"3 è pari" ha il *valore di verità* F, $\tilde{p}$ invece V.
$\tilde{p}$ potremo scriverla "non 3 è pari" o meglio "3 non è pari" e in ogni caso è equivalente alla "3 è dispari".

Continuiamo con l'*et* ovvero ∧ ovvero AND che significa *e*:
"A gennaio sosterrò Matematica e Fisica."
(Se farò solo 1 o 0 di essi mi accuseranno di falsità).
Tavola di verità dell'*et*:

p q p *et* q ... proposizione *composta*
V V V
V F F
F V F
F F F

Continuiamo col *vel* ovvero ∨ ovvero OR che significa *o* ovvero *oppure*:
"A gennaio sosterrò Matematica o Fisica."
(Se sosterrò entrambi nessuno mi accuserà di falsità).
Questa è la tavola di verità del *vel*:

P q $p \vee q$
V V V
V F V
F V V
F F F

Purtroppo sia il *vel* che l'*et* talvolta vengono resi con una virgola, e *sperabilmente* si capisce il senso dal contesto:

• $\{(x, y)|\, x \geq 0, y \geq 0\}$ qua vale $\wedge$: è il I quadrante, l'insieme dei punti con sia l'ascissa che l'ordinata ≥ 0;

- $\{(x, y) | x = \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ qua vale $\vee$ cioè $x = \sqrt{2} \vee x = \sqrt{3}$: sono 2 rette verticali, è ovvio che si richiede che x sia o $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$, mica può avere sia l'uno che l'altro valore.

Il *vel* è molto diverso dall'*aut*, l'*o esclusivo*, in italiano (linguaggio comune) ugualmente espresso con *o* oppure *oppure* come il *vel*: "Mi fidanzerò con con Asdrubala o Berenice."
Questa è la tavola di verità dell'*aut*:

p	q	p *aut* q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

In Excel in italiano, i 4 connettivi sono NON, E, O, XOR.

L'ambiguità notazionale è notevole per tutti gli operatori logici: per l'*aut* Wikipedia in inglese alla voce *Exclusive or* dà 10 simboli.

Esempio 1. In questo testo (non più presente nell'ottobre 2021 ma non importa) dei prestigiosi CDC statunitensi, Centers for Disease Control and Prevention, troviamo un uso tecnico dell'et, scritto AND, e del vel, scritto OR, per la definizione dei criteri clinici di diagnosi del covid:

Clinical Criteria
At least two of the following symptoms: fever (measured or subjective), chills, rigors, myalgia, headache, sore throat, new olfactory and taste disorder(s)

OR

At least one of the following symptoms: cough, shortness of breath, or difficulty breathing

OR

Severe respiratory illness with at least one of the following:

- Clinical or radiographic evidence of pneumonia, **OR**
- Acute respiratory distress syndrome (ARDS).

AND

No alternative more likely diagnosis

Esempio 2. In questo testo della prestigiosa FDA statunitense, Food and Drug Administration, il *vel* è sottinteso, ed è ovvio che si tratti di un *vel* e non di un *et* o altro:

> An adverse event is any undesirable experience associated with the use of a medical product in a patient. The event is serious and should be reported to FDA when the patient outcome is:
> **Death**
> (...)
> **Life-threatening**
> (...)
> **Hospitalization (initial or prolonged)**
> (...)
> **Disability or Permanent Damage**
> (...)
> (seguono altri casi).

Si dice *tautologia* una proposizione sempre vera.
Esempio: $p \vee \neg p$

Si dice *contraddizione* una proposizione sempre falsa.
Esempio: $p \wedge \neg p$

Proposizioni *equivalenti*: hanno la stessa tavola di verità.
Esempio: (p aut q) ≡ (p et non q) vel (q et non p)

Nota sulla Logica

Lo studio della Logica vorrebbe insegnarci a ragionare correttamente. È impressionante l'illogicità usata abitualmente dalle persone che hanno studiato poco – ma ancor più colpisce quella usata da persone di alto grado nelle istituzioni, che hanno responsabilità sulla vita di tutti.

Gli esempi sarebbero innumerevoli.

Leggiamo il giorno 15 giugno 2020 sul sito del Ministero della Salute italiano([12])

> Mangiare tante arance e limoni previene il contagio perché la vitamina C ha azione protettiva nei confronti del nuovo coronavirus
> Falso
> Non ci sono evidenze scientifiche che provino un'azione della vitamina C sul virus

Ma allora è congettura indimostrata, e quindi forse è falso ma forse è vero, oppure è certamente falso come sopra affermato?
Attualmente - 5 ottobre 2021 - il testo è risulta modificato, adesso è molto articolato.

[12] http://www.salute.gov.it/portale/malattieInfettive/dettaglioNotizieMalattieInfettive.jsp?lingua=italiano&id=4276 letto il 15 giugno 2020.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 2

ESERCIZIO$_{\mu 2018\, modificato}$
Una certa condizione patologica X, è diagnosticata se:
c'è il sintomo A
e
c'è il sintomo B oppure (vel) il sintomo C
oppure (vel)
c'è il sintomo D ma non il sintomo A.
Cioè, indicando la negazione con la tilde, con ovvio significato dei simboli,

$$(a \wedge (b \vee c)) \vee (d \wedge \tilde{a}).$$

Indicando con V e F il *vero* e il $falso$, si conduca di passaggio in passaggio il calcolo relativo ad un paziente che ha i soli sintomi A, C, D, concludendo la diagnosi.
(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).
SVOLGIMENTO
Si ha
sintomo A presente: a è vera, V
sintomo B non presente: b è falsa, F
sintomo C presente: c è vera, V
sintomo D presente: d è vera, V
e si calcola

$$(V \wedge (F \vee V)) \vee (V \wedge \tilde{V})$$

$$(V \wedge V) \vee (V \wedge F)$$

$$V \vee F$$

$$V$$

e in conclusione abbiamo la diagnosi

$$\boxed{\text{La condizione patologica } X \text{ è presente}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ Una certa terapia verrà supportata da un governo se (e solo se)
è molto efficace e costa molto
OPPURE se

è solo abbastanza efficace e non costa molto.
(Supponendo in qualche modo determinati i significati precisi dei termini).
Con ovvio significato dei simboli

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg\, q).$$

Nel caso specifico di una terapia che sia solo abbastanza efficace e costi molto si attribuiscano i valori di verità V o F a p, q, r, e si valuti di passaggio in passaggio fino al risultato finale il valore di verità dell'espressione soprascritta, concludendo se la terapia verrà supportata o no.
(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).

SVOLGIMENTO

Si hanno queste 3 proposizioni, coi loro valori di verità nel caso specifico:

F p =“la terapia è molto efficace”
V q =“la terapia costa molto”
V r =“la terapia è solo abbastanza efficace”

Si ha quindi successivamente

$$(F \wedge V) \vee (V \wedge \neg V)$$

$$F \vee (V \wedge F)$$

$$F \vee F$$

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ (falso)} \\ \\ \text{La terapia non verrà supportata} \end{array}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ *

Supponiamo che dal Ministero arrivi alle Farmacie una circolare che impone di inviargli una segnalazione se arriva un cliente con

tosse O nelle ultime 48 ore febbre oltre 38,5°C
E
naso che cola O non vaccinato.

Riconosciuto fra questi 4 il calcolo logico da fare

$$(p \vee q) \wedge (\neg(r \vee s))$$

$$(p \wedge q) \vee (\neg(r \wedge s))$$

$$(p \vee q) \wedge (r \vee \neg s)$$

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg s)$$

lo si svolga, indicando con V il valore di verità vero, con F quello falso, con ? quello sconosciuto, fino a determinare se la segnalazione va inviata per un cliente con tosse, naso che cola, vaccinato.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale.
Chiaramente la terza espressione esprime le condizioni poste.
In effetti non sappiamo se il cliente ha avuto febbre oltre 38,5°C nelle ultime 48 ore o no e allora indichiamo con ? il valore di verità di q:

V $p :=$"ha la tosse"
? $q :=$"ha avuto febbre oltre 38,5°C
V $r :=$"ha il naso che cola"
V $s :=$"è vaccinato".

Si ha successivamente

$$(V \vee ?) \wedge (V \vee \neg V)$$

Sia $V \vee V$ che $V \vee F$ danno V, vero,

$$V \wedge (V \vee F)$$

$$V \wedge V$$

$$V$$

$$\boxed{\text{La segnalazione va inviata}}$$

4 Prime nozioni sugli insiemi

L'insiemistica dà una concettualizzazione univoca([13]) per rappresentare un'infinità di situazioni della realtà, e permette una modellizzazione in grado di rendere chiare relazioni fra enti vari – persone, malattie, farmaci, soldi, di tutto – che sarebbero semplicemente *invisibili* nell'elencazione bruta di, poniamo, 60milioni di casi.

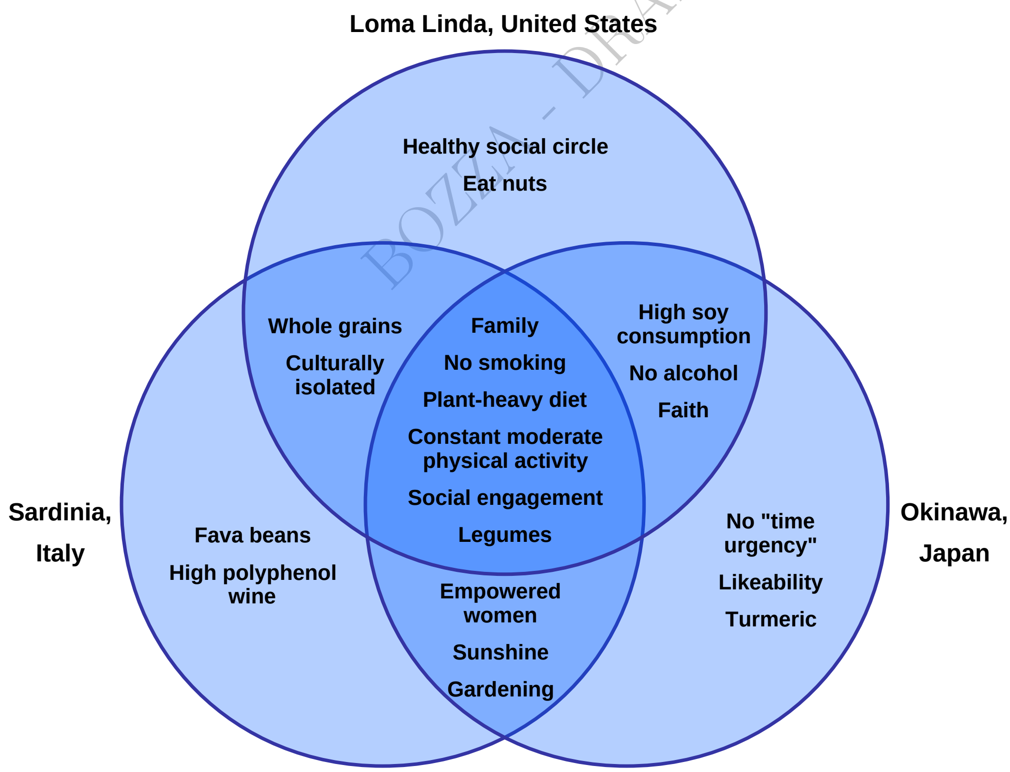


Figure 1: Abitudini in 3 zone del mondo con aspettativa di vita ritenuta molto elevata. By The RedBurn, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3_blue_zones_venn_diagram.svg

[13]Salvo le attualmente purtroppo numerose ambiguità notazionali, ma questa è altra questione, ora di minor importanza.

4.1 Nozioni di insieme, elementi e appartenenza

In questa trattazione elementare, la nozione di *insieme* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*. Possiamo dire che un insieme è, in qualche modo, una *raccolta* di elementi, o *classe* (di elementi). Ma anche la nozione di *elemento* è supposta nota, ovvero è data come *concetto primitivo*, e anche la nozione di *appartenenza* di un elemento ad un insieme.
Agli insiemi *di solito* si dà nome una lettera latina maiuscola, come A e X, ma per alcuni insiemi si usano grafie particolari, per esempio l'insieme dei numeri naturali viene denotato con $\mathbb{N}$.
L'*appartenenza* (concetto primitivo) di un elemento ad un insieme si indica col simbolo $\in$, per esempio con $3 \in I\!N$, e la sua negazione con $\notin$: $-3 \notin I\!N$. Anche, scriveremo equivalentemente prima $\mathbb{N}$ e poi 3, col simbolo $\in$ scritto specularmente, e similmente per $\notin$.
Come *variabili* atte a rappresentare un elemento indeterminato di un insieme, *di solito* si usano lettere latine minuscole: a, x...
È ovvio che un insieme si può considerare assegnato se è univocamente *chiaro*[(14)] se un elemento vi appartiene o no, per esempio le persone *simpatiche* non costituiscono un insieme. Quelle *sane*, o *povere*, o *diabetiche*, o *ipertese*, sì, se si suppone che da qualche parte siano stati ben definiti quegli attributi.
Un insieme può essere determinato *per elencazione* (*principio di estensione*) elencandone gli elementi fra parentesi graffe, per esempio $\{3, 5, 8\}$, eventualmente con puntini di sospensione per indicare elementi non trascritti ma che si suppone il lettore possa capire quali sono, per esempio $\{0, 1, 2, 3...\}$, l'insieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali*.
Tipici insiemi sono i *singoletti*, come $\{x\}$, $\{diabete\}$, $\{0\}$, eccetera, con un solo elemento.
Gli insiemi si possono anche rappresentare (*principio di astrazione*) con la *proprietà caratteristica*, cioè *caratterizzante*, degli elementi,

[14] La questione della menzionata *chiarezza* non è banale, ma qui non la approfondiremo; si noti comunque che, per esempio, i divisori di $1+2018^{2019}$ costituiscono un insieme, nonostante possa essere improbo stabilire se qualche determinato numero vi appartenga.

per esempio $\{x \in I\!N | x\, pari\}$, che magari talvolta scriveremo solo $\{pari\}$, che però potrebbe lasciarci nel dubbio, se non è chiaro dal contesto, che si intendesse $\{x \in \mathbb{Z} | x\, pari\}$, comprendendo per esempio -8. Il simbolo | si legge "tale che" e altre volte si scrive : o t.c..
Naturalmente gli insiemi poi possono rappresentarsi graficamente con ovali racchiudenti i loro elementi (*diagrammi di Eulero-Venn*). Si provi a rappresentare con un rettangolo l'umanità, si *ripartisca* in *poveri*, *benestanti* e *ricchi*, e con un ovale nel rettangolo si rappresentino i *malati* – sempre supponendo definite la qualità.

4.2 Uguaglianza; insieme vuoto; inclusione

Due insiemi si dicono uguali se hanno gli stessi elementi. Anche se hanno diverse definizioni, per esempio

$$X := \{divisori\, di\, 6\} = \{1, 2, 3, 6\} =$$
$$= Y := \{numeri\, di\, 3\, lettere\, in\, italiano\}$$

Esiste un unico insiemo privo di elementi, l'*insieme vuoto*, denotato a stampa $\varnothing$ o, scrivendo a mano, qualcosa come ϕ.

Se ogni elemento di X appartiene a Y si dice che X è *contenuto* in Y:

$$X \subseteq Y \qquad \text{(equivalente a } Y \supseteq X\text{, contiene)}$$

Esempi.

{titolari tessera fedeltà farmacia} ⊆ {aventi diritto allo sconto}
{invalidi} ⊆ {aventi diritto allo sconto} ⊆ {umanità}

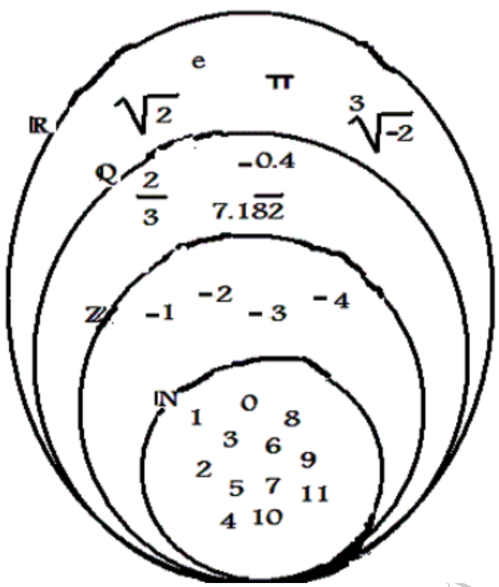
Si rappresentino i diagrammi di Eulero-Venn (facendo attenzione che ci possono essere invalidi titolari di tessera fedeltà).

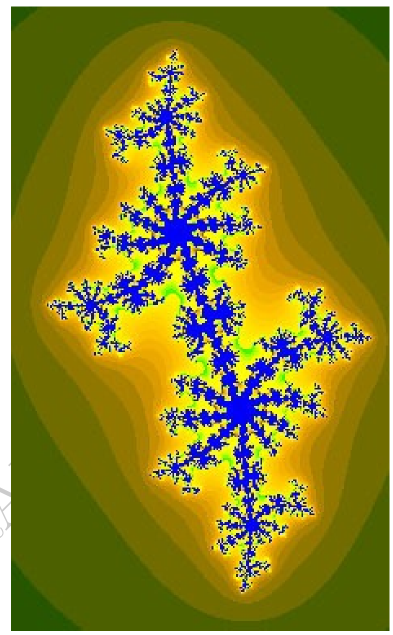
4.3 Gli insiemi numerici

È

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

e ovviamente $\subsetneq$ indica l'inclusione che esclude l'uguaglianza: per esempio $\mathbb{Q}$ è *incluso propriamente* in $\mathbb{R}$.





Un *soprainsieme* proprio di $\mathbb{R}$ è l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi*, dei quali non ci occuperemo: $\mathbb{C} \supsetneq \mathbb{R}$. In $\mathbb{C}$ si formano facilmente "grafici" di spettacolare bellezza, i *frattali*, come l'Insieme di Julia in figura.

Estensione. Il seguente diagramma è molto chiaro ed esplicativo ma non corrisponde esattamente alle definizioni che abbiamo dato: United Kingdom ha sia i 2 elementi Great Britain e Northern Ireland, che i 4 elementi England, Wales, Scotland, Northern Ireland.

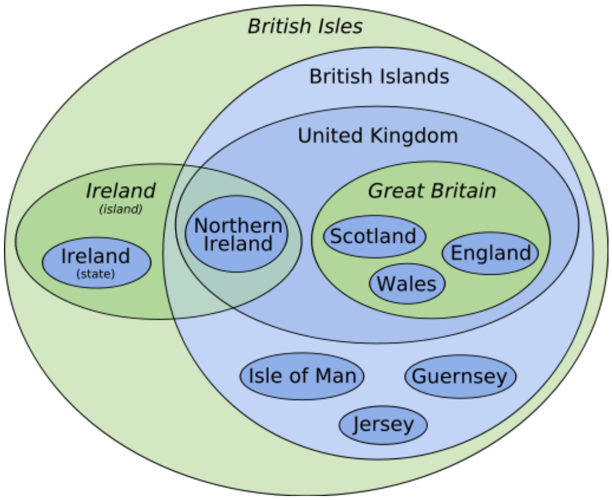


Figure 2: In azzurro determinazioni giuridiche, in verde determinazioni geografiche.

4.4 Cardinalità, insiemi finiti e infiniti

In questa trattazione elementare la *cardinalità* di un insieme finito è il numero dei suoi elementi.
La cardinalità è indicata con $\#E$ (e da altri con $\mathrm{card}E$ o $|E|$).
Per esempio $\#\{a,b,c\} = 3$.
Supponiamo noti i concetti di insieme finito e insieme infinito.

4.5 Insieme delle parti

L'insieme delle parti $\mathscr{P}(A)$ di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A. (Compresi ovviamente l'insieme vuoto e A stesso). In simboli

$$\mathscr{P}(A) := \{X : X \subseteq A\} .$$

L'insieme delle parti di A si chiama anche *insieme potenza* di A.
Trattazione elementare valida per i soli insiemi finiti.
Per esempio se $A := \{a,b,c\}$ allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} .$$

Se un insieme ha n elementi allora (teorema) il suo insieme delle parti ha 2^n elementi. Cioè, usando il simbolo # della cardinalità, qua nel significato semplice di *numero di elementi*,

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^{\#A}\,.$$

Nell'esempio $\mathscr{P}P(A)$ ha 8 elementi, cioè 2^3, perché A ha 3 elementi.
È possibile una trattazione ad un livello superiore, valida per tutti gli insiemi, finiti e infiniti.

ESERCIZIO$_\mu$
Supponiamo che ad un farmacista, cui normalmente arrivano un centinaio di persone al giorno, una volta ne arrivino un migliaio, lamentando svariati sintomi fra una mezza dozzina di sintomi. Volendo individuare l'insieme di sintomi più caratteristico della nuova situazione, per affrontarla validamente, si propone di elencare tutti i possibili sottoinsiemi di sintomi, da 2 sintomi fino a 6 sintomi. Quanti elementi avrà questa lista di liste di sintomi?

SVOLGIMENTO
I sottoinsiemi dell'insieme di 6 sintomi sono (insieme delle parti) 2^6 ma dobbiamo escludere i 6 insiemi costituiti da 1 solo sintomo e 1 insieme costituito da 0 sintomi (l'insieme vuoto) e allora in tutto

$$2^6 - 6 - 1 =$$

(che naturalmente significa $(2^6 - 6) - 1$: cioè in assenza di parentesi facciamo le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, non faremo certo prima $6 - 1$, che produrrebbe un errore, bensì prima $(2^6 - 6)$)

$$\boxed{57}$$

Ecco per completezza alcuni elementi della lista con 57 liste di sintomi, denotati con S1,...,S6:

S1 S2 ← 1^ lista
S1 S3
...
S1 S6
S2 S3
S2 S4
...
S9 S10

S1 S2 S3
S1 S2 S4
...
S1 S2 S3 S4 S5 S6 ← 57^ lista

4.6 Operazioni insiemistiche e logiche a confronto

Consideriamo gli insiemi come sottoinsiemi di un *insieme universo*, in generale chiamato U ma non necessariamente, che potrebbe essere per esempio $\mathbb{R}$, oppure {clienti della nostra farmacia}, oppure {residenti in Italia}.

Insieme complementare di 1 insieme:
$A^C := \{x \in U | x \notin A\}$ cioè $\neg(x \in A)$

Insieme intersezione di 2 insiemi:
$A \cap B := \{x \in U | x \in A \land x \in B\}$

Insieme unione di 2 insiemi:
$A \cup B := \{x \in U | x \in A \lor x \in B\}$

Insieme differenza simmetrica di 2 insiemi:
$A \Delta B := \{x \in U | x \in A \, aut \, x \in B\}$

Si hanno allora queste 4 corrispondenze fra insiemistica e logica:
^{C} $\neg$
$\cap$ $\land$
$\cup$ $\lor$
Δ *aut*
Valgono molte altre[15] corrispondenze.

---

[15] Per il lettore interessato: valgono (teorema) queste ulteriori corrispondenze fra simboli insiemistici e logici:
2 *involuzioni*:
$(A^C)^C = A$
$\neg(\neg p) = p$
4 *proprietà distributive* (corrispondentisi a coppie)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si definisce poi l'*insieme differenza* di 2 insiemi:

$A \setminus B := \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$

Due insiemi si dicono *disgiunti* se hanno intersezione vuota.
Per esempio

$\{italiani\ sani\}$ e $\{italiani\ diabetici\}$

$\{colesterolo \leq 200\}$ e $\{colesterolo > 200\}$ (sottinteso, "persone con", e l'unità di misura è pure sottintesa, e anche l'insieme universo, che potrebbe essere quello degli italiani, degli europei, degli esseri umani... dipende dal contesto considerato).

Si definisce *partizione* di un insieme una sua suddivisione in sottoinsiemi disgiunti. Quella soprascritta dei sani e dei diabetici non dà certo una partizione dell'insieme $\{italiani\}$, ma quella secondo colesterolemia sì, come pure

$\{\{sani\}, \{malati\}\}$

$\{\{poveri\}, \{benestanti\}, \{ricchi\}\}$

$\{\{bambini\}, \{adolescenti\}, \{adulti\}, \{anziani\}\}$

(al solito, supposti ben definiti i termini) tutte di evidente interesse epidemiologico.

4.7 Nota sull'insiemistica

L'insiemistica – che trattatiamo al livello minimo per gli scopi della Farmacia – è materia sottile, che raggiunge vertici di inverosimile complessità. Già migliaia di anni fa sono emersi problemi che a tutt'oggi sono studiati intensamente:

Il barbiere del villaggio, colui che rade coloro
che non si radono da sè, si rade da sè?

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2 proprietà associative, 2 Leggi di De Morgan, che il lettore interessato troverà facilmente, eccetera.

Suggerimento: si evitino insiemi che contengono se stessi come elemento:

$$\alpha \in \alpha$$

ESERCIZI SULLA LEZIONE 3

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ *
Quanti sottoinsiemi non vuoti ha l'insieme $\{\text{He, Ne, Ar, Kr, Xe, Ra, H}_2\text{O}\}$?

SVOLGIMENTO
L'insieme ha 7 elementi (ovviamente in senso matematico, non stiamo conteggiando gli 8 *elementi chimici*) e allora ha $2^7 = 128$ sottoinsiemi di cui 1 è l'insieme vuoto.

$$\boxed{127}$$

5 Altra logica e altra insiemistica

5.1 Predicati e insieme di verità

Un predicato è una sorta di proposizione ma con una o più variabili, le quali potranno essere denotate con qualunque lettera e in particolare x, y, z..., come per esempio

$$q(z) := \text{“}z \text{ è sano” (si supponga definito il concetto)}$$

$$p(z) := \text{“}z \text{ è una retta obliqua del piano cartesiano”}$$

$$r(z) := \text{“}z \text{ ha diritto allo sconto del 10\%”}$$

che di per sè non sono nè vere nè false, dipende da z. Per esempio

$$q(\text{Asdrubala}) \text{ è vera (speriamo per lei, è un caso ipotetico)}$$

$$p(\text{asse } x) \text{ è falsa}$$

$$p(\text{bisettrice del I e III quadrante}) \text{ è vera}$$

([16])

L'*insieme di verità* di un predicato è il sottoinsieme del dominio in cui il predicato è vero.([17])

---

[16] Ecco altri predicati, col loro dominio:
$x \in \mathbb{N}$, $p_1(x) :=$“x è un numero pari” ($p(-8)$ non ha senso)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_2(x) :=$“x è un numero pari” ($p(-8)$ è vera)
$x \in \mathbb{Z}$, $p_3(x) :=$“$x^2 = 2$”
$x \in \mathbb{R}^+$, $p_4(x) :=$“$x^2 = 2$” ($\mathbb{R}^+$ è l'insieme dei reali positivi)
$x \in \mathbb{R}$, $p_5(x) :=$“$x^2 = 2$”
$x \in \{\text{residenti in Italia}\}$, $q_1(x) :=$“x è sano” (si supponga definito)
$x \in \{\text{residenti in Italia}\}$, $q_2(x) :=$“x è diabetico” (come sopra)
$x, y \in \mathbb{Z}$ $t_1(x, y) :=$“x divide y”
$x, y \in \{\text{residenti in Italia}\}$ $t_2(x, y) :=$“x e y sono coniugi”

[17] Insiemi di verità relativi alla nota precedente:
insieme di verità di p_3: $\varnothing$
insieme di verità di p_4: $\{\sqrt{2}\}$
insieme di verità di p_5: $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

5.2 Quantificatori

Esistono questi 2 *quantificatori*, dal significato ovvio:
quantificatore *per ogni*, $\forall$
quantificatore *esiste*, $\exists$

Riprendendo la $q(z)$ dell'esser sano, di cui sopra, certamente

$$(\exists\, t \in \{\text{esseri umani}\})q(t)$$

cioè esiste (almeno) un sano.
Riprendendo la $r(z)$ del diritto allo sconto, di cui sopra, potrebbe darsi il caso che

$$(\forall x \in \{invalidi\})r(x)$$

cioè che ogni invalido abbia diritto allo sconto del 10%.
Naturalmente si possono considerare esempi matematici.[18]

Indicheremo con $\exists!$ l'espressione "esiste un unico".

Esempi – e controesempio.
Per ogni triangolo, equilatero implica equiangolo: teorema vero.
Per ogni triangolo, equiangolo implica equilatero: teorema vero.
Per ogni quadrilatero, equilatero implica equiangolo: teorema falso.
Non dimostreremo i 2 teoremi veri; sono poco utili in Farmacia, e la dimostrazione è addirittura inutile. Ma impariamo la logica.

[18] Qua si fa riferimento ai predicati definiti in una nota precedente.
Esempio 1:
"$(\exists x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$" (cioè "$(\exists x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione vera
Esempio 2:
"$(\forall x \in \mathbb{R})\, p_5(x)$" (cioè "$(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 = 2$) è proposizione falsa
Esempio 3:
"$(\exists x \in \mathbb{Z})\, t_1(x,y)$" (cioè "$(\exists x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y
(fra l'altro sempre vero, cioè vero $\forall y \in \mathbb{Z}$)
Esempio 4:
"$(\forall x \in \mathbb{Z})\, t_1(x,y)$" (cioè "$(\forall x \in \mathbb{Z})\, x$ divide y) è predicato in y
(fra l'altro sempre falso, cioè falso $\forall y \in \mathbb{Z}$)

Dimostriamo invece il teorema falso con un controesempio: consideriamo un rombo non quadrato, ed esso è proprio un quadrilatero equilatero (ma) non equiangolo.

Il *controesempio* è un esempio che dimostra falsità.

Col simbolo *non implica*:
Per ogni quadrilatero, equilatero $\not\Rightarrow$ equiangolo.

Esempio in Medicina, anzi in effetti in Statistica Medica:

> the scientific story of COVID-19 conflicts with the widespread view of science as a source of certainties. For the general public, if something is described by an equation, it is exact. Epidemiological modelling is a dramatic counter-example. https://www.nature.com/articles/s42254-020-0188-2.pdf

(Le affermazioni matematiche sono *assolutamente vere per l'eternità*, ma i modelli matematici – che sono equazioni – descrivono una realtà loro propria che solo parzialmente la realtà segue; l'implicazione
"il futuro dell'epidemia è descritto da una formula $\Rightarrow$ *sarà così"*
è stata rivelata falsa dal controesempio dell'epidemia del 2020.)

5.3 Regole di negazione

La negazione di
"(tutti) i paperopolesi sono onesti"
non è
"(tutti) i paperopolesi sono disonesti", no, affatto!
bensì
"esiste (almeno) un paperopolese disonesto".

Cioè, in simboli e più in generale,
$\neg((\forall x \in E)p(x)) = (\exists x \in E)\neg p(x)$
e vale anche l'altra negazione
$\neg((\exists x \in E)p(x)) = (\forall x \in E)\neg p(x)$

Esempi.
Facciamo 2 negazioni usando il linguaggio naturale, scrivendo "malato" invece di "non sano" e similmente poi per le malattie "incurabili".

La negazione di
tutti gli italiani sono sani
è
esiste almeno un italiano non sano;
diciamo pure:
esiste qualche italiano malato.

La negazione di
per ogni malattia esiste una cura
è
esiste almeno una malattia tale che non esiste la cura (diciamo pure, incurabile).

(Questa è una cosa che ancora non compare nell'eserciziario ma prima o poi sarà chiesta all'esame:)

5.4 Logica in Matematica e in Farmacia

Una trattazione completa delle attuali conoscenze di Logica riempirebbe parecchi corsi universitari.
È una branca della Scienza che è studiata fin dall'antichità. Il sillogismo, in particolare, è un tipo di ragionamento dimostrativo che fu teorizzato per la prima volta da Aristotele; ecco un esempio:
(premessa maggiore) Tutti gli uomini sono mortali
(premessa minore) Tutti i greci sono uomini
(conclusione) Tutti i greci sono mortali.
Il sillogismo fu molto approfondito nel medioevo, ammettendo 256 tipi di sillogismi, di cui 4 privilegiate, dette Barbara, Celarent, Darii, Ferio.
Fin dall'antichità sono emersi paradossi logici vari, molto problematici. Nel '900 Gödel ha dimostrato una cosa per certi versi drammatica, che esistono cose vere non dimostrabili. ☹

La trattazione della Logica che si è potuta fare al livello di questo testo elementare vorrebbe insegnarci

a ragionare bene

oppure in subordine almeno

a non ragionare male. (Meglio tacere piuttosto).

La beffa del monossido di diidrogeno

Più del 90% delle migliaia di persone morte a Milano nel dicembre 2015 era entrata in contatto con quantità significative di monossido di diidrogeno nelle 24 ore precedenti la morte, ma **questa affermazione vera non implica alcuna indicazione di pericolosità del monossido di diidrogeno**.
Che infatti nessuno bandisce.([19])

Diffidare dai "ragionamenti a parole".

Non è logica ma pseudo-scienza.
L'esempio seguente è farmaceutico.

L'evitamento medicale di malattie mortali

Molti credono che evitare farmacologicamente e/o chirurgicamente una malattia che causa morte riduca la mortalità.

E dove sta scritto? È uno pseudoragionamento a parole.

Che effettivamente quella terapia riduca la mortalità andrà dimostrato scientificamente, per esempio con uno **studio prospettico randomizzato in doppio cieco.**
Non con il predetto pseudo-ragionamento, ritenuto logico, che evitare una malattia che causa morte riduca la mortalità.
Fra i vari esempi possibili si consideri il seguente, che ha suscitato clamore mediatico anche in riferimento all'attrice Angelina Jolie.

[19] Ci mancherebbe proprio: è l'acqua.

Esistono mutazioni genetiche (BRCA1 e BRCA2) che rendono *enormemente* più probabile il cancro al seno.

Asportare quasi del tutto il seno evita quasi del tutto quel cancro.

Ma si riduce la mortalità? Leggiamo in un articolo scientifico:[(20)]

> (...) bilateral risk-reducing mastectomy (BRRM) (...) During a mean follow-up of 10.3 years, 722 out of 1712 BRCA1 (...) and 406 out of 1145 BRCA2 (...) underwent BRRM. For BRCA1 mutation carriers hazard ratios were 0.40 for overall mortality (...) For BRCA2 mutation carriers (...) hazard ratio for overall mortality was 0.45

Detto semplificatamente, mortalità doppia fra le operate.

Incidentalmente, si noti che l'impossibilità nel caso specifico di fare uno studio prospettico randomizzato in doppio cieco limita addirittura intrinsecamente la possibilità di raggiungere una certezza sulla questione, se non assoluta almeno del livello di *gold standard* della Medicina e della Farmacia, che è appunto quel tipo di studio.

Ripetiamo: evitare medicalmente la malattia mortale non ha ridotto la mortalità. In quel caso l'ha raddoppiata.

Diffidare dai "ragionamenti a parole".

Non è logica ma pseudo-scienza.

Richiedere invece una dimostrazione razionale.
Per esempio nel caso di malattia prevenibile medialcalmente almeno uno studio prospettico randomizzato in

[20] Heemskerk-Gerritsen, Bernadette A M et al. "Survival after bilateral risk-reducing mastectomy in healthy BRCA1 and BRCA2 mutation carriers." Breast cancer research and treatment vol. 177,3 (2019): 723-733. doi:10.1007/s10549-019-05345-2 in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC6745043/

doppio cieco su ampio campione, che mostri se ridurre l'incidenza di una malattia eventualmente mortale prevenibile medicalmente riduca effettivamente la mortalità, e non riduca solo la mortalità per quella specifica malattia al prezzo di aumentare la mortalità per tutte le cause, *all causes mortality*. Com'era nell'esempio sopra riportato.

5.5 Prodotto cartesiano

Si chiama *prodotto cartesiano* di 2 insiemi X e Y l'insieme denotato con $X \times Y$ delle *coppie ordinate*[21] (x, y) con $x \in X$ e $y \in Y$. In simboli

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \; et \; y \in Y\}\,.$$

L'insieme X può essere finito o infinito, e così pure Y.
Se X e Y sono finiti allora (teorema[22], ovvio)

$$\#(X \times Y) = (\#X) \cdot (\#Y)$$

cioè la cardinalità del prodotto cartesiano di 2 insiemi è il prodotto delle cardinalità dei 2 insiemi. Per esempio

$$\{a, b, c\} \times \{\alpha, \beta\} = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \beta), (c, \alpha), (c, \beta)\}$$

ha $2 \cdot 3 = 6$ elementi, che sono coppie ordinate.
Similmente si definisce il prodotto cartesiano di 3 insiemi, composto dalle terne ordinate, e di n elementi, composto dalle n-uple; e si estende banalmente il soprascritto teorema sulle cardinalità.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast$ Calcolare quanti sono i diversi possibili 6-meri dei nucleotidi del RNA ovvero le sequenze ("parole") di 6 lettere dell'alfabeto

$$A, C, G, U$$

(di cui recentemente si è molto scritto riguardo la ricerca contro il cancro).

[21] Una definizione rigorosa di coppia ordinata (x, y) è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ma in questa trattazione supponiamo di per sè chiaro il concetto.

[22] Questo teorema è vero anche per insiemi infiniti ma allora la cardinalità risultante è infinita e non ha più il significato elementare qua considerato di *numero di elementi.*

SVOLGIMENTO
Relativamente alla questione medica, e in futuro eventualmente farmaceutica, si può vedere sul sito governativo statunitense PubMed l'abstract dell'articolo scientifico 6mer seed toxicity in tumor suppressive microRNAs.

Per fissare le idee (ma assolutamente non sarebbe necessario) scriviamo alcune delle sequenze/parole:
AAAAAA, AAAAAC, AAAAAG, AAAAAU,
AAAACA, AAAACC, AAAACG, AAAACU,
...
UUUUUA, UUUUUC, UUUUUG, UUUUUU.

Per calcolare il numero osserviamo che
la 1^ lettera può essere scelta in 4 modi
la 2^ lettera può essere scelta in 4 modi
...
la 6^ lettera può essere scelta in 4 modi
e allora la sequenza di 6 lettere può essere costituita in un numero di modi pari a

$$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$\boxed{4096}$$

Oppure, si potrebbe anche dire che l'insieme delle sequenze/parole è in corrispondenza biunivoca con il prodotto cartesiano

$$\{A, C, G, U\} \times \text{...(in tutto 6 volte)...} \times \{A, C, G, U\}$$

e allora ha cardinalità

$$\Big(\#\{A, C, G, U\}\Big)^6$$

concludendo come prima.
Tutte le 4096 sequenze sono elencate in `https://www.6merdb.org/`

ESERCIZIO.$_\mu$ Consideriamo una serie di cassetti in una farmacia etichettati con un codice composto da una lettera (inglese) maiuscola o da una lettera seguita da una cifra (decimale). Quanti sono i possibili cassetti etichettabili?
SVOLGIMENTO
L'insieme dei codici di 2 caratteri è in corrispondenza biunivoca col prodotto cartesiano

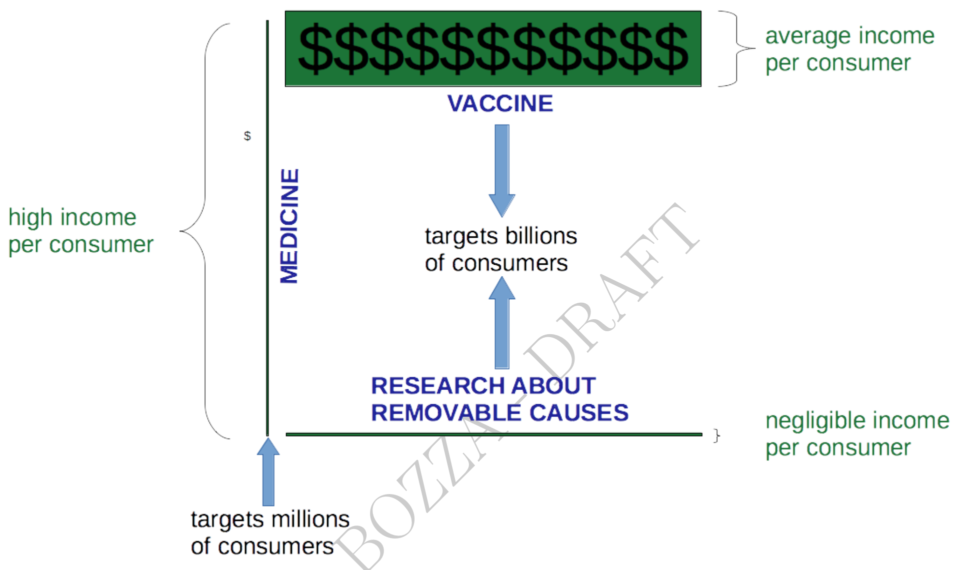
$$\{A, B, ..., Z\} \times \{0, ..., 9\}$$

che ha $26 \cdot 10 = 260$ elementi. Considerando anche i 26 codici di un carattere (lettera maiuscola)

si hanno in tutto 286 possibili cassetti

5.6 Diagrammi e grafici

Ogni rappresentazione grafica di dati la diremo *diagramma*.



Esempio di diagramma. Con simili strumenti un'azienda farmaceutica puó decidere in quali ricerche scientifiche investire per ottimizzare i guadagni. Poi, in base alla dottrina economica corrente, *la mano invisibile del mercato* dovrebbe produrre benefici per molti.

Fra i diagrammi ci sono i ben noti diagrammi a torte per le percentuali, i grafi usati per le mappe cognitive, gli istogrammi che vedremo, le carte statistiche, perfino interattive come in questo `Link -->`.

E **i *grafici* in senso matematico** così definiti:

grafico è un sottoinsieme G di $X \times Y$ tale che

$$(\forall x)\,(\exists!\, y)\,(x, y) \in G$$

(È sottinteso che $x \in X$ e $y \in Y$, e fra la quarta e la quinta parentesi è implicito un “tale che”).

Ma nelle Scienze Applicate spesso qualunque diagramma viene chiamato grafico.

Si noti che una retta è un grafico([23]) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma un circolo no, almeno non nel senso matematico sopra detto.

I matematici fanno la distinzione fra un grafico, oggetto astratto che spesso è un insieme illimitato del piano, e un disegno di un grafico, necessariamente limitato e quindi in generale incompleto ovvero parziale: nessuno può disegnare tutta una parabola, eppure il disegno di una sua parte (quasi) tutti lo chiamano (grafico della) parabola.

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

Nella Scienze Applicate e nella divulgazione scientifica avviene spesso che anche i (disegni dei) grafici in senso matematico vengano arricchiti da notazioni e disegni, diventando diagrammi di vario tipo.

[23]Ovviamente una retta verticale è un grafico di una funzione della y, precisamente una funzione costante del tipo $x = cost$.

ESERCIZI

ESERCIZIO$_\mu$ Supponiamo in via del tutto ipotetica che una certa molecola possa completarsi in un punto con uno qualunque fra gli elementi con numero atomico da 58 a 71 (lantanoidi diversi dal lantanio) e in altro punto con uno qualunque fra in primi 5 di essi. (Senza voler qua fare Farmacologia, si pensi comunque ai *farmaci chelanti*). In quanti modi può completarsi la molecola? E se aggiungiamo l'ipotesi che in ogni caso non si completa con due atomi uguali?

SVOLGIMENTO

I lantanoidi diversi dal lantanio, con numeri atomici

$$58, 59, ..., 70, 71$$

sono $71 - 57$ cioè 14.

La coppia ordinata di atomi atta a completare la molecola può costituirsi (prodotto cartesiano) in $14 \cdot 5 =$

$$\boxed{\text{a) 70 modi}}$$

Se aggiungiamo l'ipotesi che la molecola non può completarsi con due atomi uguali, dobbiamo escludere 5 casi, restandone $70 - 5$ cioè

$$\boxed{\text{b) 65 modi}}$$

II – Funzioni, Algebra e Piano Cartesiano

6 Funzioni

Una legge che ad ogni elemento di un insieme D detto *dominio* associa 1 elemento di un insieme C detto *codominio* si chiama *funzione* definita in D a valori in C:

$$f : D \to C$$

Ad ogni funzione daremo un nome, di solito di 1 lettera[(24)], per esempio f oppure y oppure a, e la *variabile indipendente*, che varia nel dominio, la indicheremo con un nome qualsiasi, di solito di 1 lettera, per esempio scriveremo

$$f(x) := x^2$$

e poi sarà per esempio $f(2y) = 4y^2$, e $f(\alpha + 1) = \alpha^2 + 2\alpha + 1$ con variabili y e poi α, mentre la f è la funzione di prima.

Al di fuori della Matematica, per esempio in Chimica e soprattutto in Informatica, è normale dare alle funzioni nomi di più lettere, per esempio pH, `STIPENDIO`, `IVA_2019`.

Esempi di funzioni non da numeri a numeri:

$$f: \text{ essere umano } \mapsto \text{ suo codice fiscale}$$

$$g: \text{codice fiscale} \mapsto \text{numero di acquisti eseguiti nella farmacia}$$

$$h: \text{codice fiscale} \mapsto \text{volume degli acquisti eseguiti nella farmacia}$$

6.1 Funzioni Numeriche

Le funzioni numeriche – in questa trattazione elementare – sono funzioni con dominio e codominio numerico: cioè a certi numeri associano certi numeri.

[24]Una funzione con nome di più lettere, anche con la variabile di più lettere, potrebbe per esempio essere $area(lato) = lato^2$, che dà l'area del quadrato in funzione del lato.

6.2 Passaggio a opposto, reciproco, e valore assoluto

• $a(x) := -x$ *passaggio all'opposto*, $x \mapsto -x$. (Definita da $\mathbb{Z}$ in poi). Questo meno non indica affatto negatività ma passaggio all'opposto, per esempio l'opposto di -3 è il positivo 3. (Si noti allora che $-x$ può essere positivo).
Da un punto di vista fisico, il tempo $-2\,h$ significa 2 ore *prima* del tempo 0 dell'inizio di un esperimento.

• $b(x) := \frac{1}{x}$ *passaggio al reciproco*, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Notazione deprecabile: x^{-1}. Definita per i numeri diversi da 0 da $\mathbb{Q}$ in poi.

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

• *Valore assoluto.* Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione

$$|x| := \begin{cases} x & se\ \ x \geq 0 \\ -x & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

che normalmente viene definita in $\mathbb{R}$, in vari modi[(25)] equivalenti.

• *Segno di un numero.* Da $\mathbb{Z}$ in poi si può definire la funzione segno

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & se\ \ x < 0 \\ 0 & se\ \ x = 0 \\ 1 & se\ \ x > 0 \end{cases}$$

[25] Ecco 4 modi in cui può essere definito il valore assoluto in $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$:

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

$$|x| := x\operatorname{sgn}(x)$$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Definizione consigliabile:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ \ x \geq 0 \\ -x & se\ \ x < 0 \end{cases}.$$

La soprastante parentesi graffa (grande) è *"selettiva dei casi"*, ma quel simbolo ha anche altri usi affini.
In $I\!R$ il valore assoluto è una *funzione elementare*, mentre nell'algebra dei numeri può considerarsi *operazione unaria*.

che normalmente però viene definita[26] in $\mathbb{R}$; per esempio è $\operatorname{sgn}(3-\pi) = -1$.

Valore assoluto e segno sono correlate dall'identità $x \equiv |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$.

Figure	su WolframAlpha `Link->`	su WolframAlpha `Link->`

6.3 Altri esempi di funzioni numeriche

Ecco alcuni esempi di funzioni definite in $\mathbb{R}$, o, volendo, suoi sottoinsiemi, e a valori in $\mathbb{R}$, definite con le 4 operazioni e altre:

$a(x) := (1-20\%)\,x = 0.8\,x$ scontare del 20% un prezzo x

$b(x) := (1+20\%)\,x = 1.2\,x$ aumentare del 20% un prezzo x

$f(x) := 3\,x$ triplicare, per esempio il dosaggio, o un prezzo

$g(x) := \frac{2}{3}\,x$ ridurre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$, per esempio un dosaggio, ovvero scontare un prezzo del 33% (circa)

$h(x) := \frac{x}{3}$ ridurre a un terzo ovvero al $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$k(x) := \frac{4}{3}\,x$ aumentre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$m(x) := 2.4\,x$ portare al 240% del valore iniziale ovvero aumentare del 140%

$r(x) := x^3$ elevare alla terza ovvero al cubo

$s(x) :=\sqrt[3]{x}$ estrarre la radice terza ovvero cubica, che vedremo

[26]Con qualche ambiguità: per alcuni non è definita in 0. In questa trattazione è definita in 0 e vi vale 0, che è lo standard ISO.

$u(x) := \sqrt{x}$ estrarre la radice quadrata, dom$u$: $x \geq 0$

Vedendo la difficoltà che hanno alcuni nel distinguere espressioni come *ridurre di un terzo* e *ridurre a un terzo* ci vorrebbe forse molta cautela nell'usarle per descrivere una variazione di posologia farmacologica (N.d.S.)

Ma pensateci bene: preferireste
che una multa venga ridotta *di* un decimo, o
che venga ridotta *a* un decimo?

6.4 Immagine, controimmagine, composta

Si definiscono 2 insiemi e 1 funzione:
• $\text{im}f : \{f(x) \in \text{codom}f | x \in \text{dom}f\}$ immagine di f
• $f^{-1}(E) := \{x \in \text{dom}f | f(x) \in E\}$ controimmagine di un sottoinsieme E di codom$f$ (ma attenzione→ alla simbologia del $^{-1}$)
• $f(g(x))$ la funzione composta: si "f-izza" la "g-izzazione" degli elementi, per esempio con $a(t) := t^2$ e $b(t) := t + 1$ si ha

$$a(b(t)) = (t+1)^2 \qquad b(a(t)) = t^2 + 1$$

6.5 Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva, inversa

Funzione **iniettiva**: "mai 2 vanno in 1". Per esempio il codice fiscale, o il codice cliente della tessera di fidelizzazione di una farmacia.
Tornando a funzioni numeriche, per esempio x^3 e 2^x ma non x^2 intesa come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarla).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

Funzione **suriettiva**: "riempie il codominio". Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

Funzione ***biiettiva***: iniettiva *et* suriettiva. Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

La funzione biiettiva dà luogo in modo ovvio alla *funzione inversa*. Per esempio $\sqrt[3]{x}$ è la funzione inversa di x^3. E viceversa.

Figure	su WolframAlpha Link->

Una funzione

$$f : D \to C$$

biunivoca si può vedere anche come *relazione* fra dominio e codominio e in quel senso si chiama ***corrispondenza biunivoca***

$$\overset{f}{D \leftrightarrow C}$$

Due insiemi in corrispondenza biunivoca fra loro possono venire identificati a livello astratto.
Esempi:
una la retta orientata $\leftrightarrow$ i numeri reali cioè $\mathbb{R}$
il piano cartesiano $\leftrightarrow$ le coppie di numeri reali ovvero $\mathbb{R}^2$
i 5034 clienti di una certa farmacia $\leftrightarrow$ i numeri di $\{1, 2, 3, ..., 5034\}$
i 26532 prodotti in vendita $\leftrightarrow$ le stringhe COD00001,...,COD26532

6.6 Crescenza e decrescenza delle funzioni numeriche

Crescenza (globale) e decrescenza (globale) su intervalli, eventualmente sull'intero dominio di una funzione.
Ci sono 4 casi di cui più importanti il 1° e il 3°.

1) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ allora f si dice crescente.
Esempi: x^3, arctan, lg, ln, exp, $\sqrt{x}$. Anche x^2 per $x \geq 0$.

2) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ allora f si dice non decrescente, o crescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono crescente).
Esempio: $\lfloor x \rfloor$.

3) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ allora f si dice decrescente.
Esempio: e^{-x}. Anche $\frac{1}{x}$ per $x > 0$. Anche x^2 per $x \leq 0$.

4) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ allora f si dice non crescente, o decrescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono decrescente).

Nota. x^2, $\sin x$ e $\cos x$ non ricadono in alcuna delle 4 categorie.

6.7 Ambiguità notazionale dell'esponente -1

Una delle pù gravi ambiguità notazionali è quella dell'esponente -1, che ha sostanzialmente 3 significati: reciproco, in-

versa, controimmagine. Attenzione!

Certamente
$$a^{-1}$$
indica inequivocabilmente il reciproco $\frac{1}{a}$ di a se a è un numero, ma se è una funzione – e può ben esserlo – cominciano problemi:
$$f^{-1}(x)$$
in questa trattazione significherà sempre l'inversa di $f(x)$ mentre la reciproca la denoteremo $\frac{1}{f(x)}$ e casomai, volendoci del male, $(f(x))^{-1}$. Il problema maggiore si ha quando – e concretamente ciò viene fatto spesso – in lunghi calcoli per brevità di scrittura si omette di indicare la variabile indipendente, e si scrive f intendendo $f(x)$, lasciando nell'incertezza riguardo la scrittura f^{-1}. Così all'atto pratico ci si ritrova sempre con qualcuno che pensa che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, o il logaritmo il reciproco dell'esponenziale (invece è l'inversa).
Resta il fatto che in un testo diverso da questo, la scrittura
$$\ln^{-1}(x)$$
è ambigua, e può indicare sia $\exp(x)$ che $\frac{1}{\ln(x)}$. In questo testo solo $\exp(x)$.

Inoltre, l'esponente -1 è usato per indicare anche tutta un'altra cosa, la controimmagine, che non è un elemento ma un insieme.

6.8 Ambiguità notazionali della parentesi graffa grande

La parentesi graffa grande viene usata con almeno 3 diversi significati.

Li illustreremo con 3 esempi.
Sempre c'è un *et* "retrostante", ma non in modo immediato.

Parentesi graffa (grande) *dei sistemi*, con significato puro e semplice di *et*:
$$\begin{cases} x^2 > 9 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"selettiva dei casi"*:
$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"onnicomprensiva dei casi"*:

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

(Nell'esempio sono affermate con scrittura compatta 3 uguaglianze).

6.9 Funzioni definite per numeri naturali: le successioni

Per la variabile indipendente spesso useremo i nomi n, m, h, k se il dominio è un insieme di numeri interi, per esempio $\mathbb{N}$. In questo caso potremmo dare a tali funzioni nomi $y(n)$ o $a(n)$ ma più spesso useremo le notazioni y_n, a_n e in ogni caso le funzioni definite su $\mathbb{N}$ (o anche su una sua semiretta e cioè per $n \geq n_0$) le chiameremo ***successioni***.

Un'infinità di dati epidemiologici si possono inquadrare come successioni, con l'indice che è l'anno, per esempio da 1861 in poi e teoricamente estendibile all'infinito almeno nell'immaginazione, e i valori a rappresentare il numero di nati, di morti, la mortalità infantile, e quant'altro:

$x_{1861} = \dots$
$x_{1862} = \dots$
$\dots$

Esempio 1. (Epidemiologico). Morti in Italia:
2011 593 000
2012 613 000 +20 000 (rispetto all'anno precedente)
2013 601 000 −12 000
2014 598 000 −3 000
2015 648 000 +50 000
2016 615 000 −33 000
2017 649 000 +34 000
2018 633 000 −16 000
2019 634 000 +1 000

2020 746 000 +112 000

Qua sopra, oltre alla successione x_{2011}, x_{2014},... (di fatto inevitabilmente troncata) del numero di morti è stata rappresentata anche la successione derivata degli incrementi annuali:

$$z_n := x_n - x_{n-1}$$

Spesso in Medicina una tale differenza viene denotata con Δ, per esempio nell'andamento di un qualche parametro di un'epidemia. Δ 24h può indicare l'incremento (eventualmente negativo) $x_{oggi} - x_{ieri}$.

Spesso sia a livello di rappresentazione grafica che a livello teorico, la successione viene sostituita con una (funzione) interpolante: detto semplificatamente, si "congiungono i puntini" ottenendo una funzione definita su una semiretta di $\mathbb{R}$ invece che su una semiretta di $\mathbb{N}$. (O su un intervallo di $\mathbb{R}$ invece che di $\mathbb{N}$).

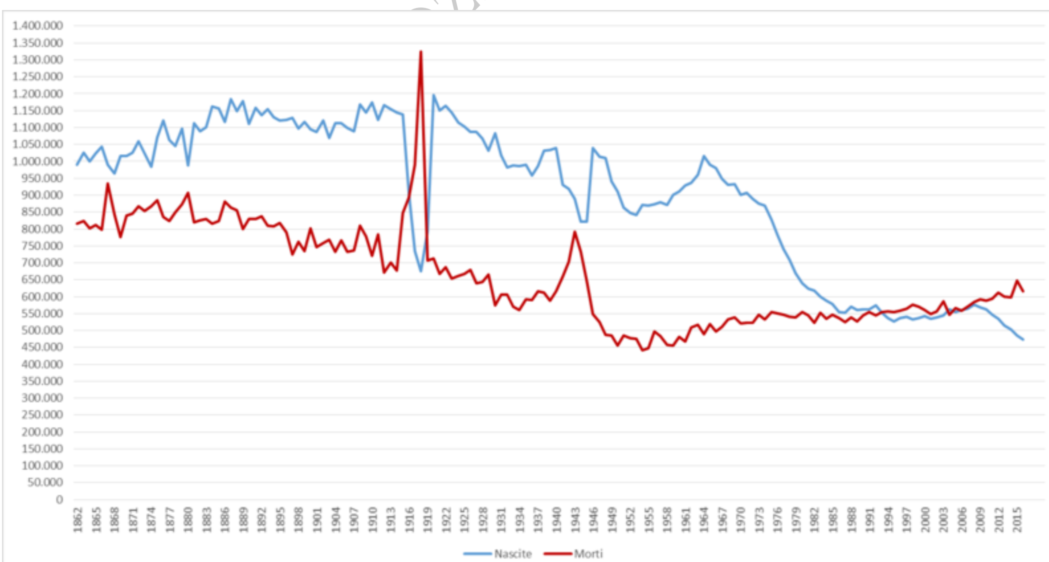


Figure 3: Nascite (blu) e morti (rosso) in Italia tra il 1862 e il 2016. Da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nascite_e_morti_in_Italia,_1862_-_2016.png

Esempio 2. Una successione che ricorre molto nella Matematica è quella dei fattoriali([27])

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040...$$

Figura | su WolframAlpha Link-> |

e si noterà che
  si passa da 1 a 2 moltiplicando per 2
  si passa da 2 a 6 moltiplicando per 3
  si passa da 6 a 24 moltiplicando per 4
e così via:

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & se \quad n > 0 \\ 1 & se \quad n = 0 \end{cases}$$

ovvero, per ricorrenza, $a_0 := 1$, $a_n := n\, a_{n-1}$ per $n > 0$.

Si noti la grande rapidità con cui cresce la succssione dei fattoriali. Addirittura 100! ha già 158 cifre.

Humor. Chi l'avrebbe mai detto che 4+2 è uguale a 3!

[27] Per ogni $n \in I\!N$, si dice *fattoriale* di n e si indica con $n!$ il numero $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ se $n > 0$ e 1 se $n = 0$.
Per esempio $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; e $11! = 39^{\cdot}916^{\cdot}800$.
Esistono estensioni della definizione ai numeri reali e perfino ai numeri complessi mediante la funzione Gamma:

$$z! := \Gamma(z-1)\,, \quad z \neq -1, -2, -3, \ldots$$

Valgono le approssimazioni di Stirling

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

e con maggiore precisione

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1 + \frac{1}{12x}\right)$$

per i numeri interi o reali, purché sufficientemente grandi – diciamo maggiori di 8 per avere un'approssimazione all'1% per la prima e maggiori di 1 per avere un'approssimazione all'1 per mille per la seconda.
Si è usato il simbolo ~ invece di ≈ perché sono approssimazioni asintotiche – questione sottile.

Esempio 2. La *successione di Fibonacci*, definita di solito([28]) *per ricorrenza*:

$$\begin{cases} a_1 := 1 \\ a_2 := 1 \\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Valori:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \ldots$$

Figura | su WolframAlpha Link-> |

Essa è in qualche modo correlata al tipo di ampliamento di una popolazione di organismi – fu studiata da Fibonacci nel medioevo per modellizzare l'accrescimento di una popolazione di conigli – ovvero anche all'espansione di un'epidemia nella fase iniziale.

Esercizio.$_\mu$ Calcolare con 5 cifre significative con la calcolatrice i primi 12 valori di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ relativi alla successione di Fibonacci.

[28] Esiste anche una definizione *in forma chiusa*:

$$\begin{cases} a_n := \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad \phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(e φ è la nota *sezione aurea*)

7 Ripasso di Algebra – I parte

Nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto generale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:

qualitativa	"bollisci *un po'* di semi per *un po'*"
numeri	"bollisci 12 semi per 1 tazza d'acqua"
operazioni (numeriche)	"57 kg × 3 mg/kg/die = 121 mg/die"
funzioni (numeriche)	"height(cm) = age(yr)×6.5 + 76(cm)*"
analisi statistica dei dati	(che vedremo molto più avanti)

(*La formula sull'altezza si riferisce a bambini cinesi in https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19573410/).

Vogliamo qua occuparci delle operazioni sui numeri, per esempio a/b, che potrebbe dare la *densità* se a è una massa e b un volume, e che diventa una funzione $f_1(a)$ o $f_2(b)$ se a o rispettivamente b è considerato variabile. (E addirittura una funzione $f_3(a, b)$ di 2 variabili se sono considerati variabili sia a che b, caso di cui ora non ci occuperemo).

7.1 Operazioni binarie (interne) dell'algebra dei numeri

Le *operazioni binarie* da 2 *operandi* producono 1 *risultato*.
Adesso ne considereremo 5:

addizione ovvero somma
sottrazione
moltiplicazione ovvero prodotto
divisione
elevamento a potenza.

Tutte hanno un'infinità di ricorrenze nelle Scienze Applicate. (Un solo esempio: la *densità*, definita con una divisione: massa/volume).

(1) $a+b$, scritto col + e anche col simbolo di sommatoria $\sum$: dati dei numeri a_3, a_4, a_5, la somma

$$a_3 + a_4 + a_5 \qquad \text{la scriveremo anche} \qquad \sum_{k=3}^{5} a_k$$

e i numeri 3 e 5 possono essere sostituiti da qualsiasi altri, e così pure l'*indice di sommatoria* k e il nome a_k della *variabile indiciata*: una forma comoda per rappresentare somme di molte variabili indiciate: $\sum_{i=n}^{m} x_i$. Per esempio
`ricavoAnnuo=` $\sum_{n=1}^{365}$ `ricavoGiornaliero(n)`

(2) $a-b$, differenza. Che funziona come sommare l'opposto, in Matematica, ma nelle Scienze Applicate è meglio considerare la sottrazione come un'operaziona e sè stante.

(3) $a\,b$ ovvero $a \cdot b$; sulle calcolatrici e nei linguaggi informatici anche $*$; lo standard ISO ammette anche la scrittura $a \times b$, che però espone alla confusione con la variabile x.

Nota. La notazione $a\,b$ purtroppo dà luogo ad un'ambiguità di scrittura: $y\,(x+1)$ denota sia una funzione y calcolata in $x+1$ che $y \cdot (x+1)$: perciò noi cercheremo di scrivere scrivere, nel caso del prodotto, $(x+1)\,y$ oppure $y \cdot (x+1)$. Inoltre la scrittura $a\,b$ può essere equivocata con una quantità di nome $a\,b$, di 2 lettere, cosa che in questa trattazione succederà raramente, ma nelle Scienze Applicate è normale usare nomi di più lettere. (Si pensi per esempio al pH della Chimica).

(4) $\frac{a}{b}$ ovvero a/b ovvero $a:b$ ovvero $\div$

(5) a^b, sulla calcolatrici `a^b` (in certa Informatica anche `a**b`).

Nota. In ambito medico e farmaceutico, talvolta per indicare la potenza
non essendo disponibile la scrittura a^b
non essendo disponibile il simbolo ^
non conoscendo il simbolo informatico ** per l'elevamento a potenza
si tralascia tutto (!) e si lascia all'intuito del lettore l'intelligenza delle formule. Per esempio la formula (di Mosteller) che approssima l'area della superficie corporea (usata per il dosaggio dei chemioterapici) da peso W e altezza H

$$\frac{1}{6}(W \cdot H)^{0.5} \qquad \textit{ovvero } \tfrac{1}{6}\sqrt{W \cdot H}$$

si trova trascritta sul sito governativo statunitense PubMed, che riporta l'abstract di un articolo scientifico, in questo modo:

1/6(WH)0.5 LINK->

(e si noti anche l'(1/6) riportato senza parentesi, con seria ambiguità).
Altro esempio, con 2 esponenti, a questo LINK->

Si noti anche che un numero tipograficamente ad esponente non sempre indica una potenza, per esempio x^0 può denotare sia la variabile x elevata alla 0 sia una variabile di nome proprio x^0.
Così per esempio nel documento sul prezzo equo delle risme di carta (nelle strutture pubbliche, compresi gli ospedali) all'indirizzo https://www.anticorruzione.it/portal/rest/jcr/repository/collaboration/Digital%20Assets/anacdocs/Attivita/Atti/Delibere/2019/2_Allegato_A_aggiornamento%20carta_2019.pdf nella formula $P_{ref}^{2019} = P_{ref}^{2018} * 1.03448$ ovviamente 2018 e 2019 fanno parte dei nomi delle variabili, non indicano potenze.

7.2 Horribilia: frazioni miste, e scrittura del marketing

Si faccia attenzione all'ambiguità della "frazione mista" o "numero misto" che si usa per esempio per i voti scolastici, come $7\frac{1}{2}$: il valore è $7 + \frac{1}{2}$ e cioè 7.5, non $7 \cdot \frac{1}{2}$ cioè 3.5. Cerchiamo di evitare come la peste tali frazioni miste. Ma potremo trovarle su questionari dove i pazienti valutano $7\frac{1}{2}$ il loro stato di salute (o la soddisfazione del servizio della farmacia), e allora nella raccolta dati trascriveremo sul computer `7.5`. (Non certo `7(1/2)` che manderebbe in errore molti software e da WolframAlpha verrebbe interpretato come `7*(1/2)` invece che `7+(1/2)`).

E si faccia attenzione alla scrittura *del marketing* 3×2 che non ha nulla a che vedere con la moltiplicazione e rappresenta uno *sconto*, precisamente $m \times n$ significa che di m prodotti non ne pagheremo $m - n$ e allora lo sconto percentuale è

$$sconto = 100 \cdot \frac{m-n}{m}\,\%$$

Esempio$_\mu$ Una farmacia vende confezioni di filo interdentale in offerta 4×3: calcoliamo lo sconto.
1 su 4 confezioni non viene pagata e allora lo sconto è $\frac{1}{4}$ cioè 25%.

La divisione presenta qualche problematica:
44 diviso 6
fa $7.\overline{3} \approx 7.333$ in $\mathbb{R}$,
fa $\frac{44}{6}$ ovvero meglio $\frac{22}{3}$ in $\mathbb{Q}$,
fa *7 col resto di 2* in $\mathbb{Z}$, come ora approfondiremo.

7.3 Divisione euclidea in *Z*

Come ci ricorda la canzoncina *Quarantaquattro gatti*, che si disponevano *in fila per 6*, ma *col resto di 2*, è $44 = 6 \cdot 7 + 2$.[29] Diremo a il *dividendo* e b il *divisore*. Scriviamo per massima chiarezza:
$dividendo = divisore{\times}quoziente{+}resto \quad 0 \le resto < |divisore|$.[30]

Esempio$_\mu$ Una scatola di pillole ha 4 blister di 6×4 pillole. Dopo averne consumate 7 al giorno, ad un certo punto non gliene restano più così tante: quante precisamente?

---

[29]Più in generale, come leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Divisione euclidea*

> Dati due numero interi a e b con $b \neq 0$ esiste un'unica coppia di interi q ed r detti *quoziente* e *resto* tali che
> $a = b \times q + r$
> $0 \le r < |b|$

[30]Si noti che il resto è minore del divisore in valore assoluto, ma non necessariamente del quoziente in valore assoluto, per esempio $11 = 4 * 2 + 3$ (ed effettivamente il resto 3 è minore del divisore 4, ma non del quoziente 2), e stiamo dividendo 11 per 4, mentre se dividiamo 11 per 2 abbiamo $11 = 2 * 5 + 1$ (ed effettivamente il resto 1 è minore del divisore 2).
(Si noti ancora che tutto ciò vale anche con numeri negativi, per esempio -21 diviso 9 dà quoziente -3 e resto 6, cioè $-21 = 9 \cdot (-3) + 6$, come troviamo subito online con WolframAlpha con `Quotient[-21,9]` e `Remainder[-21,9]`).

Le pillole sono in tutto $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$. Con la calcolatrice (o a mano) troviamo

$$96/7 = 13.7...$$

e allora la persona ha consumato 7 pillole al giorno per 13 giorni, in tutto $13 \cdot 7 = 91$. Allora restano alla fine $96 - 91$ cioè 5 pillole.
Con WolframAlpha `Remainder[4*6*4,7]`

7.4 Proprietà delle 4 operazioni

Con *le 4 operazioni* si intendono $+ \; - \; \times \; /$.

Il $-$ non è commutativo: per esempio 6-2 fa 4 ma 2-6 fa -4.
E non è neanche associativo; ovvio ma meglio dirlo:

$11 - 6 - 2$ si calcola nell'ordine $5 - 2$ e infine 3 (il 5 è $11 - 6$)

assolutamente non $11 - 4 = 7$ (computando prima $6 - 2$)

cioè

$$11 - 6 - 2 \quad \text{significa} \quad (11 - 6) - 2.$$

(Le parentesi$_{\downarrow}$ indicano precedenze nel calcolo).

Il / ha esattamente le stesse problematiche dette per il $-$, non è commutativo, per esempio 6/3 fa 2 ma 3/6 fa 0.5 ovvero $\frac{1}{2}$, e non è neanche associativo:

$$(x/y)/z \neq x/(y/z).$$

La scrittura $x/y/z$ senza parentesi sarebbe meglio evitarla in Matematica ma è usata in Farmacia.
È da intendersi che quelle 2 operazioni si fanno nell'ordine scritto.

Per esempio l'*indice di massa corporea* si calcola con

$$IMC := BMI := peso(kg)/statura(m)/statura(m)$$

E si consideri anche il classico della Farmacia

$$\text{mg/kg/die}^{(31)}$$

[31]È da utilizzarsi in questo modo:

$$Y \text{ mg/kg/die}$$

Il + e il · sono commutativi e associativi, in tutti gli insiemi numerici (precisazione che in generale ometteremo):

$$x + y = y + x \qquad x\,y = y\,x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{che scriveremo di solito } x + y + z$$

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \text{che scriveremo di solito } x\,y\,z$$

(Come detto, le parentesi indicano precedenze nel calcolo).

Valgono 4 proprietà distributive:

$$(x + y)\,z = x\,z + y\,z$$

$$(x - y)\,z = x\,z - y\,z$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x + y)/z = x/z + y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x - y)/z = x/z - y/z \quad \textit{ossia} \quad \frac{x - y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$

ma in generale $\frac{x}{y+z}$ è diverso da $\frac{x}{y} + \frac{x}{z}$, e similmente coi −.

$$-(-x) = x \qquad e\ \ \forall\, x \neq 0 \ \ \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (\textit{involuzioni})$$

e più completamente la "formula della frazione a 4 piani"

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} \qquad \forall\, y, z, w \neq 0\,.$$

Poi

$$x + (-x) = x - x = 0 \qquad e\ \forall\, x \neq 0 \ \ x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

---

si calcola

$$Y \times \ (\text{ peso [del paziente, o della cavia...] in chilogrammi })$$

e il risultato è in

mg/die,

cioè milligrammi da assumere ogni giorno. (Da un punto di vista matematico, intendono cioè (mg/kg)/die, implicitamente, come per il − si fanno le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, il che è massimamente ragionevole).

$$x + 0 = 0 + x = x \quad (0\, elemento\, neutro\, rispetto\, al\, +)$$
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad (1\, elemento\, neutro\, rispetto\, al\, \cdot)$$
$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad (0\, elemento\, assorbente\, rispetto\, al\, \cdot)$$
$$\frac{0}{x} = 0 \;\; \forall\, x \neq 0 \qquad ma\, \frac{x}{0} \;\textbf{non esiste mai, neppure}\; \frac{0}{0}\,.$$

Si dimostra subito

$$\frac{a\,b}{a\,c + a\,d} = \frac{b}{c + d} \quad \text{cioè qua } a \text{ si semplifica}$$

ma (errore comunissimo)

$$\text{da } \frac{a\,b}{a\,c + d} \text{ questa “semplificazione” } \frac{b}{c + d} \quad \text{è } \underline{\text{sbagliata}}.$$

Esempio economico.

Scontare di una certa percentuale il costo totale di 2 articoli, oppure

totalizzare i 2 costi scontati

dà *in teoria* lo stesso risultato, per esempio – per fissare le idee – con uno sconto del 20%

scontare la somma $(x{+}y){\times}0.8 = x{\times}0.8{+}y{\times}0.8$ sommare gli scontati

Questo è vero se si fanno i calcoli con infiniti decimali. Facendoli con 2 com'è usuale nel commercio, possono verificarsi discrepanze, in genere piccole.

7.5 Precedenze algebriche e parentesi

Precedenze implicite delle operazioni, da seguire in mancanza di parentesi che le modifichino, dalla precedenza più debole:

$+$ *e* $-$ $\leftarrow$ precedenza più debole
/ e $\cdot$ anche se non trascritto: in $x + 3\,y$, prima calcolare $3\,y$.
^ anche se non trascritto: in $2\,x^3$, prima calcolare x^3.

Le parentesi possono modificare le precedenze:
$(x+3)\cdot y$ ci fa prima sommare x e 3. Invece senza parentesi in $x+3\cdot y$ prima si moltiplicano 3 e y, poi si fa la somma.

Sempre meglio scrivere parentesi che lasciare incertezze.

Si possono usare quante si vogliano coppie di parentesi “annidate” una dentro l’altra

$$(...(...(...)...)...)$$

ma spesso per chiarezza si usano anche parentesi quadre e graffe:

$$\{...[...(...)...]...\}$$

Rimarchiamo lo sconcertante fatto che il software Excel, di ampio uso nelle Scienze Applicate, contro le convenzioni di tutta la comunità matematica, per `-3^2` dà `9` invece che `-9`, come se fosse da intendere $(-3)^2$. Quindi attenzione se si copia in Excel una formula da un altro software, dove normalmente il risultato sarebbe `-9`, avendo l’elevazione a potenza la precedenza sul meno.
È un caso strano, questo di Excel; addirittura in rete si trova un simulatore di Excel, che dà il risultato opposto di Excel...
E attenzione ancora a questo:

per calcolare $\underbrace{-3^2}_{che\ fa\ -9}$ in Excel si deve scrivere `-(3^2)`

7.6 Le potenze

In questa trattazione elementare delle potenze supponiamo nota una conoscenza di base delle radici. Sarebbe possibile fare prima una trattazione elementare delle radici, presupponendo note le potenze. Evitare del tutto queste problematiche è possibile ma al prezzo di complicazioni che qua vogliamo evitare.

Scriviamo

x^2 per $x \cdot x$
x^3 per $x \cdot x \cdot x$
x^4 per $x \cdot x \cdot x \cdot x$
e più in generale definiamo $a \in I\!R$ *elevato alla* $n \in I\!N$, $n > 0$, il numero

$$a^n = a \cdot \ldots \cdot a \quad (n\, volte)$$

e ponendo per $a \neq 0$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

la potenza è definita per tutti gli esponenti non nulli di $\mathbb{Z}$; e per l'esponente 0 si pone se $a \neq 0$ (rimanendo non definito 0^0)

$$a^0 := 1 \, .$$

Si definisce $a \in I\!R$ *elevato alla* $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, $m, n > 0$, il numero

$$a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$$

che esiste se $a \geq 0$ *vel* m è dispari. Per esempio $x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$. Per la potenza con esponente $q \in I\!R$ si richiede $a \geq 0$, e se q è razionale vale quanto sopra, e se è irrazionale si dà una definizione complessa che si può quasi immaginare sostituendo q con una sua *"straordinariamente buona"* approssimazione razionale: $a^{\sqrt{2}}$ sarà *"circa"* $a^{1.41}$ a sua volta uguale a $\sqrt[100]{a^{141}}$. Ancor meglio $\sqrt[1000]{a^{1414}}$.

Ecco su WolframAlpha i grafici di alcune funzioni potenza: `Link->`

L'elevamento a potenza non è nè commutativo, per esempio $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, nè associativo. Valgono invece queste 8 proprietà:

(1) $\quad x^{y+z} = x^y \cdot x^z$

(2) $\quad x^{y \cdot z} = (x^y)^z$

(3) $\quad (x \cdot y)\hat{}z = (x\hat{}z) \cdot (y\hat{}z) \quad$ *ossia* $(x\, y)^z = x^z y^z$ (*distributiva*)

(4) $\quad (x/y)\hat{}z = (x\hat{}z)/(y\hat{}z) \quad$ *ossia* $\left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{x^z}{y^z}$ (*distributiva*)

(5) $1^x = 1$

(6) $x^1 = x$

(7) $x^0 = 1 \quad \forall\, x \neq 0$

(8) $0^x = 0 \quad \forall\, x \neq 0$

e attenzione poi che

0^0 **non esiste.**

Si noti la notazione, ovvero convenzione sulla notazione:

$$\textit{usualmente scritto} \rightarrow x^{y^z} := x^{(y^z)} \leftarrow \textit{raramente scritto}$$

per esempio 2^{2^3} è 2^8 cioè 256, non è 4^3 cioè 64, che è $(2^2)^3$.

Esempio sulla proprietà (2).
Volume di un cubo di lato $10^{-10}\,m$. Essendo $volume_{cubo} = lato^3$, si ha $(10^{-10})^3$ cioè $10^{-30}\,m^3$.

Esempio sulle proprietà (2), (4), (5).
Modellizziamo la diluizione omeopatica in acqua con
1 CH : $\frac{1}{100}$ cioè 1 parte di sostanza su 100 totali, e 99 sono acqua
2 CH : $\frac{1}{100}\frac{1}{100}$
e così via, sempreché si riuscissero ad evitare contaminazioni:

$$\text{n CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

(Abbiamo modellizzato solo la questione della diluizione, non l'inevitabile effetto placebo nè l'ipotetica "memoria dell'acqua" affermata dagli omeopati).
A cosa corrisponde 10 CH?

Con le proprietà delle potenze

$$10 \text{ CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^{10} =$$

$$= \frac{1^{10}}{100^{10}} = \frac{1}{100^{10}} =$$

$$= \frac{1}{(10^2)^{10}} =$$

$$= \frac{1}{10^{20}}$$

cioè 1 parte su 10^{20} che è

$$100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

cioè 1 parte su cento miliardi di miliardi. (Ogni 9 zeri c'è un miliardo).

8 Ripasso di Algebra – II parte

8.1 Frazioni generatrici

Per scritture decimali limitate la *frazione generatrice* si trova subito: per esempio

$$0.2 \text{ cioè 2 decimi, è } \frac{2}{10} \text{ cioè, semplificando, } 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$0.25 \text{ cioè 25 centesimi, è } \frac{25}{100} \text{ cioè, semplificando, } 0.25 = \frac{1}{4}$$

e similmente coi millesimi si troverà per esempio che 0.125 è $\frac{1}{8}$, e così via.

8.1.1 Un terzo

Fra le scritture decimali illimitate periodiche, bisognerà conoscere

$$\tfrac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.33333333333\ldots\ (\textit{periodico})$$

Un suo valore approssimato, 0.333 oppure 0.3333, si può trovare con la calcolatrice con $1 \div 3$, ma, inversamente, bisogna anche saper riconoscere

$$0.333 \approx \frac{1}{3} \qquad 0.3333 \approx \frac{1}{3}$$

e anzi addirittura, seppure con precisione minore,

$$0.33 \approx \frac{1}{3}$$

A un livello giornalistico o divulgativo, addirittura, $0.3 \approx \frac{1}{3}$, e cioè si usa trascrivere 30% come “(circa) uno su 3”.

Nota. Per altre scritture decimali illimitate periodiche, non riusciremo – in questa trattazione elementare – a trovare la frazione generatrice:

$$0.\overline{142857} = \frac{?}{?} \qquad \left(\text{in effetti è } \frac{1}{7} \text{ ma non è banale}\right)$$

8.2 Le radici

In questa trattazione elementare, considereremo le radici solo in $\mathbb{R}$ e non nei numeri naturali, interi e razionali.
Sono funzioni (e allora anche operazioni unarie ma non è il modo migliore di considerarle).

• *Radice quadrata* $\sqrt{a}$. Ovvero, ma in generale non scriveremo così, $\sqrt[2]{a}$. (Su WolframAlpha `Sqrt[a]`, in altri software `sqrt(a)`).

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\sqrt{\cdot} \quad : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Per $x \geq 0$ la $\sqrt{x}$ è definita come il numero $y \geq 0$ tale che $y^2 = x$.
Si noti che

$$\sqrt{9} = 3$$

nel modo più assoluto la radice quadrata di 9 non è ± 3. (Come invece affermano testi che seguono un'antiquata definizione di radice quadrata).

• *Radice quarta, sesta, ottava...* $x \mapsto \sqrt[4]{x}$, $x \mapsto \sqrt[6]{x}$... Con considerazioni analoghe alla radice quadrata. Per esempio la radice quarta di 16 è 2, e quella di 9 è $\sqrt{3}$. Sono definite in $[0, +\infty[$.

• *Radice terza (o cubica), quinta, settima...* $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[5]{x}$...
La $\sqrt[3]{x}$ è definita come il numero y tale che $y^3 = x$, e similmente le altre radici con indice dispari: $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per esempio la radice cubica di -8 è -2.

Esempio$_\mu$
Usando la Formula di Keys che, fra i numerosi standard, calcola

$$peso\,ideale\,uomini = (statura\,in\,metri)^2 \times 22.1$$

troviamo quale dovrebbe essere l'altezza corrispondente ai 53 kg:

$$53 \overset{EQ}{=} x^2 \times 22.1 \quad \Big/ : 22.1$$

$$x^2 = \frac{53}{22.1} \approx 2.39819 \quad \text{(con la calcolatrice)}$$

$x_1 = -\sqrt{2.39819}$ esclusa, dev'esser positivo (altezza)
$x_2 = \sqrt{2.39819}$
che con la calcolatrice troviamo esser circa 1.55 (in metri).

Nota. La radice quadrata esprime un'infinità di altre cose nelle Scienze Applicate, per esempio il tempo di caduta([32]) di un grave. Fra quelle espresse dalla radice cubica citiamo il raggio([33]) di una sfera di massa m e densità d.
Per esempio si calcola che una sfera d'oro di 1 kg ha diametro $\approx 4.62\,cm$.
Fra le meno numerose ricorrenze nelle Scienze Applicate della quarta potenza ovvero equivalentemente della radice quarta, citiamo la Legge di Stefan-Boltzmann e la legge di Poiseuille.
Le radici dalla quinta in poi ricorrono moderatamente nelle Scienze Applicate.
Una radice sesta compare in un calcolo relativo al Potenziale di Lennard-Jones della Termodinamica, nella Lezione 28.

8.3 Proprietà dei radicali ovvero radici

Considereremo queste 2 proprietà delle radici

$$x = \sqrt[3]{x^3} \quad \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$

$$(\textit{non } x) \quad |x| = \sqrt{x^2} \quad \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

e queste altre 4 proprietà, molto simili fra loro:

$$\forall\, x, y \geq 0 \quad \sqrt{x\,y} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} \quad \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

$$\forall\, x, y > 0 \quad \sqrt{x/y} = \sqrt{x}\Big/\sqrt{y} \quad \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

$$\sqrt[3]{x\,y} = \sqrt[3]{x}\;\sqrt[3]{y} \quad \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$

$$\forall\, y \neq 0 \quad \sqrt[3]{x/y} = \sqrt[3]{x}\Big/\sqrt[3]{y} \quad \textit{e similmente con ogni indice dispari}$$

[32] La formula è $t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$.
[33] La formula è $r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}}$.

Esistono anche altre proprietà.[34]

Le radici <u>dei numeri ≥ 0</u> possono essere intese come potenze con esponente frazionario e precisamente

$$\forall x \geq 0 \quad \left[\sqrt[1]{x} = x\right] \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \ldots \quad \textit{e in generale}:$$

$$\boxed{(\forall\, x \geq 0) \qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad n = 2, 3\ldots}$$

In particolare su WolframAlpha calcoliamo la radice n-esima:

$_{numero}$`^(1/n)` per esempio `11^(1/3)` calcola la $\sqrt[3]{11}$.

Ma si noti che

$\sqrt[3]{x}$ esiste per ogni x

$x^{\frac{1}{3}}$ esiste solo per ogni $x \geq 0$

(Però si troverà sicuramente qualche Autore che la pensa diversamente e dirà che $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ per ogni x, che non è una buona idea per sottili motivi).

Da adesso considereremo quasi solo la radice quadrata, cubica e quarta, e per l'ultima vale questa formula di riduzione:

$$\boxed{\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}}$$

(Ovviamente, per $x \geq 0$, altrimenti non è definito nulla).

---

[34] Per il lettore interessato:

$$\forall\, x, y \; \textit{concordi} \quad \sqrt{x\,y} = \sqrt{|x|}\,\sqrt{|y|} \;\; \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

(concordi significa aventi ugual segno)

$$\forall\, x, y \; \textit{concordi} \quad \sqrt{x/y} = \sqrt{|x|}/\sqrt{|y|} \;\; \textit{e similmente con ogni indice pari}$$

$$\sqrt[n\cdot m]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \;\; \textit{per esempio} \;\; \sqrt[6]{x} = \sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}, \quad n, m = 2, 3, 4\ldots \text{ (si semplifica m)}$$

e di rarissimo uso $\sqrt[n]{x^\alpha} = (\sqrt[n]{x})^\alpha, \quad x \geq 0,\ \alpha \in I\!R,\ n = 2, 3, 4\ldots$

8.4 La radice quadrata in Medicina e Farmacia

Esempio 1. Nella chemioterapia per il cancro spesso i dosaggi sono stabiliti non in funzione del peso del paziente – com'è per tanti farmaci – bensì dell'area della superficie corporea.
Una delle formule usate per stimarla è questa di Mosteller, che ha 3 versioni equivalenti:

$$BSA_{m^2} := area \approx \sqrt{\frac{altezza_{cm} \times peso_{kg}}{3\,600}} =$$

$$= \frac{\sqrt{altezza_{cm} \times peso_{kg}}}{60} = \frac{\sqrt{altezza_{m} \times peso_{kg}}}{6}$$

(che dà circa 2 m^2 per un maschio adulto normale).

Esempio 2. La radice quadrata rientra nel calcolo della varianza e dello stimatore della varianza, che vedremo.

Esempio 3. Nell'articolo scientifico il cui abstract è in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19712746 modellizzano l'accrescimento di una comunità microbica con l'uso della radice quadrata.

Esempio 4. Si voglia moltiplicare per 2 (o rispettivamente per 3, per 4, per qualunque $c > 0$) l'area di un cerotto terapeutico quadrato. Ciò si ottiene moltiplicando il lato per $\sqrt{2}$ (o rispettivamente per $\sqrt{3}$, per 2, per $\sqrt{c}$). Perché da

$$area = lato^2$$

segue, essendo *lato* un numero positivo,

$$lato = \sqrt{area}$$

e sostituendovi *area* con $2 \cdot area$ si ottiene

$$lato_{new} = \sqrt{2 \cdot area} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{area} = \sqrt{2} \cdot lato$$

e similmente con 3, con 4, con c.

Tutto ciò è vero non solo per il quadrato e il suo lato, ma anche per il cerchio e il suo raggio, e pure per il cerchio e il suo diametro:

il quadrato di area quadrupla ha lato doppio
il cerchio di area quadrupla ha raggio doppio
il cerchio di area quadrupla ha diametro doppio

Con qualche precisazione sul significato delle parole, tali corrispondenze

$$n \times area \leftrightarrow \sqrt{n} \cdot misura\, lineare$$

valgono per qualunque figura geometrica piana, e non solo per il quadrato e il cerchio: una figura – per esempio un tatuaggio nero o il nero di un codice QR o una macchia d'olio su un liquido – di misure lineari raddoppiate rispetto a un'altra, ha area quadrupla; in pratica, circa quadruplo inchiostro, od olio, in tutti i casi.

ESERCIZIO$_{\mu 2020}$ % Il dosaggio di particolari farmaci dipende dalla superficie corporea. Una delle formule approssimate (Formula di Mosteller) dà

$$superficie_{m^2} = \sqrt{\frac{altezza_{cm} \times peso_{kg}}{3\,600}}$$

Prendiamo per buona questa formula (senza discuterne eventuali limiti alla validità). Se un fissato individuo conservando la sua altezza raddoppia il peso, di quanto aumenterebbe la sua superficie corporea?

SVOLGIMENTO

$$\frac{superficie\, finale}{superficie\, iniziale} =$$

detta h_0 l'altezza, e p_0 il peso iniziale e allora $2\,p_0$ quello finale

$$= \frac{\sqrt{\frac{h_0 \cdot 2\,p_0}{3\,600}}}{\sqrt{\frac{h_0 \cdot p_0}{3\,600}}}$$

si semplifica tutto tranne $\sqrt{2}$

$$= \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\boxed{\approx 41\%}$$

(Nella pratica, appare ragionevole non fare alcun affidamento sull'esattezza della cifra delle unità; diciamo piuttosto che, col modello della Formula di Mosteller, ad un raddoppio del peso conservando l'altezza corrisponde un aumento circa del 40% della superficie corporea).

8.5 La radice cubica in Medicina e Farmacia

Esempio. Supponiamo di voler *ottuplicare* il peso di pillole sferiche (omogenee) che andremo a produrre, rispetto al peso di quelle che già produciamo. Allora il raggio, e quindi il diametro, *raddoppieranno.* Infatti dalla formula del raggio della sfera di massa m e densità d (che non ci proponiamo di imparare a memoria)

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}}$$

sostituendo m con $8\,m$ abbiamo

$$r_{new} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 8\,m}{4\,\pi\,d}} = \sqrt[3]{8\cdot\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}} =$$

per la quinta ovvero penultima delle proprietà sopra elencate

$$= \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}} = 2\,r.$$

Con qualche precisazione sul significato delle parole, un tale raddoppio all'ottuplicare del peso (o equivalentemente del volume) e più in ingenerale la corrispondenza

$$n \times volume \leftrightarrow \sqrt[3]{n}\cdot misura\,lineare$$

vale per qualunque figura geometrica, non solo la sfera; per esempio per il cubo relativamente al suo lato, o per una cavia rispetto alla sua lunghezza – ammesso, in via approssimata, che l'accrescersi della cavia nel tempo ne conservi la “forma” (in senso tecnico geometrico si tratta della *similitudine*): la cavia che pesa l'ottuplo, è lunga il doppio. (E il 2 implicato, è la radice cubica dell'8).
(Anche il vostro cane o gatto, nella crescita nel corso del tempo, fatta salva l'approssimazione della forma mantenuta nel tempo; certo se invece di crescere normalmente, piuttosto ingrassa, non è più vero, non conservandosi la forma).

Per due flaconi di medicine di ugual “forma”, uno ingrandimento dell’altro, se il primo ha volume ottuplo del secondo, allora ha altezza doppia.

Tutto ciò è vero non solo per i numeri 8 e 2, ma anche per 27 e 3, e per ogni $c > 0$ e $\sqrt[3]{c}$.

8.6 Esempi di calcolo con le radici.

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (perché è $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$) e approssimeremo ≈ 2.828
$\sqrt{9} = 3$ (assolutamente non ± 3)
$\sqrt{10} \approx 3.162$ e lo troveremo con la calcolatrice
$\sqrt[3]{-8} = -2$ (perché $(-2)(-2)(-2) = -8$)
$\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ (perché è $\sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$)
$\sqrt[3]{5}$ lo lasceremo come sta. (WolframAlpha con `5^(1/3)` dà 1.7099...).
$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ (perché è $\sqrt{\sqrt{4}}$) e approssimeremo ≈ 1.414
$\sqrt[4]{5} \approx 1.495$ (calcolato come radice quadrata della radice quadrata).

8.7 Scrittura dei numeri e approssimazioni

Nelle Scienze Applicate si preferisce evitare nei risultati finali le frazioni, i decimali periodici, e, π, le radici e le altre funzioni elementari, e tutto si esprime con scritture decimali esatte se si può e merita, o altrimenti approssimate.
Ma in Farmacia è largamente usato il segno ~ per indicare un valore approssimativo invece di $\approx$.
Inoltre, nelle Scienze Applicate, compresa la Farmacia, spesso si scrive = intendendo $\approx$, per esempio $1 : 3 = 0{,}333$ o addirittura, con meno buona approssimazione, $1 : 3 = 0{,}33$.

In Matematica	**In questa trattazione.** La scrittura percentuale la daremo solo se ha senso. Esempio: per le probabilità	Nelle Scienze Applicate. La scrittura percentuale si dà solo se ha senso. Esempio: per le probabilità
$= \frac{1}{8} = 0.125$	$= \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$	$=0.125$ oppure $= 12.5\%$ ma anche $= 0.1250$ e $= 12.50\%$
$= \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	$= \frac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%$	$=0.3333$ oppure $= 33.33\%$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071...$	$= \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 = 70.71\%$	$=0.7071$ oppure $= 70.71\%$
$\frac{6}{\pi} = 1.9098...$	$= \frac{6}{\pi} \approx 0.9099 = 90.99\%$	$=0.9099$ oppure $= 90.99\%$
$\frac{1}{e} = 0.3678...$	$= \frac{1}{e} \approx 0.3679 = 37.79\%$	$= 0.3679$ oppure $= 37.79\%$

Si noti che $= 0.3678...$ è diventato ≈ 0.3679 perché la prima cifra seguente è ≥ 5. (Fatto non conoscibile dalla scrittura $= 0.3678...$). Si noti la scrittura 0.1250 delle Scienze Applicate, nelle quali questa scrittura indica – se usata appropriatamente – che il valore è conosciuto con 4 cifre significative, cioè è compreso fra 0.12495 e 0.12505, mentre 0.125 sarebbe conosciuto con sole 3 cifre significative e allora indicherebbe un numero compreso fra 0.1245 e 0.1255. La questione è sottile, perché richiede di conoscere la precisione dei dati iniziali, che in generale è scarsamente nota. Naturalmente possono considerarsi approssimazioni più precise, o meno.

Nota. Sono assurde scritture come

“mezza tazza di carote contiene 459 mcg di beta-carotene”
“mezza tazza di carote contiene circa 459 mcg di beta-carotene”

perchè l’errore relativo massimo sul numero 459 sarebbe

$$\left|\frac{459 - 458.5}{458.5}\right| \approx 0.1\%$$

precisione impensabile per la “mezza tazza” di carote.

8.8 La scadente approssimazione è pericolosa

Danni costosi o mortali avvengono a causa di approssimazioni numeriche scadenti.
Nelle Scienze Applicate si arrotonda e approssima di tutto, sia bene che non bene.

Riportiamo una nota su un'incidente che causò decine di morti.

> On February 25, 1991, during the Gulf War, an American Patriot Missile battery in Dharan, Saudi Arabia, failed to track and intercept an incoming Iraqi Scud missile. The Scud struck an American Army barracks, killing 28 soldiers and injuring around 100 other people. Patriot missileA report of the General Accounting office, GAO/IMTEC-92-26, entitled Patriot Missile Defense: Software Problem Led to System Failure at Dhahran, Saudi Arabia reported on the cause of the failure. It turns out that the cause was an inaccurate calculation of the time since boot due to computer arithmetic errors. Specifically, the time in tenths of second as measured by the system's internal clock was multiplied by 1/10 to produce the time in seconds. This calculation was performed using a 24 bit fixed point register. In particular, the value 1/10, which has a non-terminating binary expansion, was chopped at 24 bits after the radix point. The small chopping error, when multiplied by the large number giving the time in tenths of a second, led to a significant error. Indeed, the Patriot battery had been up around 100 hours, and an easy calculation shows that the resulting time error due to the magnified chopping error was about 0.34 seconds. (The number 1/10 equals 1/24+1/25+1/28+1/29+1/212+1/213+.... In other words, the binary expansion of 1/10 is 0.0001100110011001100110011001100.... Now the 24 bit register in the Patriot stored instead 0.00011001100110011001100 introducing an error of 0.0000000000000000000000011001100... binary, or about 0.000000095 decimal. Multiplying by the number of tenths of a second in 100 hours gives 0.000000095×100×60×60×10=0.34.) A Scud travels at about 1,676 meters per second, and so travels more than half a kilometer in this time. This was far enough that the incoming Scud was outside the "range gate" that the Patriot tracked. Ironically, the fact that the bad time calculation had been improved in some parts of the code, but not all, contributed to the problem, since it meant that the inaccuracies did not cancel. (https://www-users.cse.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html)

(E 24 bit corrispondono ad almeno 7 cifre decimali significative).

Bottom line. Ricordiamo che in Farmacia i decimali sono quasi gratuiti: usiamoli! (Raramente ci servirà qualcosa di più di una semplicissima calcolatrice col display a 6 cifre).

8.9 Ordinamento dei numeri

Da $\mathbb{N}$ in poi esiste nei numeri un *ordinamento* (che sostanzialmente supponiamo noto) per cui dati 2 numeri, o il primo è $<$ del secondo, o $>$ del secondo, o sono uguali (*tricotomia*). In modo ovvio si definiscono il *maggiore o uguale* e il *minore o uguale*.
Da $\mathbb{N}$ in poi si può sommare ad ambo i membri di un'uguaglianza, o di una disuguaglianza, una stessa *quantità* (fissa, cioè un numero, o variabile, come una funzione) conservando l'uguagliaza, o rispettivamente quella stessa disuguaglianza:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \quad e\, analoghe\, con \;\; \geq, <, \leq, =$$

Da $\mathbb{Z}$ in poi vale questa molteplice relazione fra moltiplicazione e ordinamento dei numeri:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & se\; c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac < bc & se\; c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

e del tutto similmente con $\geq$ e $\leq$

$$a \geq b \Rightarrow \begin{cases} ac \geq bc & se\; c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac \leq bc & se\; c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

Per esempio da $3 > 2$ segue moltiplicando per il numero positivo 10 che $30 > 20$, invece moltiplicando per il numero negativo -10 l'ordinamento si inverte: $-30 < -20$.

8.10 Altre formule classiche dell'algebra

Ecco alcune altre formule classiche dell'algebra:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \;\vee\; b = 0$ Legge di annullamento del prodotto

E ce ne sono moltissime altre, di cui alcune nella sezione di Complementi a questa Lezione.

* Complementi *

8.11 Ulteriori formule classiche dell'algebra

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$$

$$a^4 + b^4 = \left(a^2 - \sqrt{2}\,a\,b + b^2\right)\left(a^2 + \sqrt{2}\,a\,b + b^2\right)$$

(E l'ultima, poco nota, sorprenderà più di qualcuno).

9 Piano cartesiano – I parte

9.1 Premessa definizionale

funzione: $f(x)$, p.es. $f(x) := x^2 - 2$, spesso scritta $y = x^2 - 2$;

equazione: $f(x) = g(x)$, p.es. $x^2 - 2 = 0$ ha ***soluzione*** $\pm\sqrt{2}$;

polinomio: $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, p.es. $x^2 - 2$, ha ***radici*** $\pm\sqrt{2}$;

disequazione in 1 variabile: $f(x) > g(x)$ (o $<$ o $\geq$ o $\leq$), p.es. $x^2 > 2$, ha ***soluzione*** $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$.

9.2 Assi cartesiani

Gli assi cartesiani sono una retta orientata detta asse delle ascisse e una retta orientata perpendicolare alla precedente, detta asse delle ordinate, che si intersecano in un punto detto origine e denotato con O.
L'orientazione del piano e degli angoli con vertice nell'origine è antioraria. L'asse delle ascisse si sovrappone all'asse delle ordinate con una rotazione di $+90°$.

Spesso l'asse delle ascisse ha nome x, ma t se rappresenta un tempo, e quello delle ordinate y, ma p se rappresenta un peso, eccetera, qualsiasi nome.

Su ciascun asse è fissata un'unità di misura, che determina l'ascissa e l'ordinata (distanze con segno dall'origine) dei loro punti.

9.3 Punti del piano cartesiano

Equazione del punto([35]):

$$P = (x_0, y_0) \quad \textit{ovvero} \quad P(x_0, y_0) \quad \textit{ovvero} \quad (x_0, y_0)$$

[35] Altri Autori scrivono col punto e virgola: $(x_0; y_0)$

Il numero reale x_0 è l'ascissa di P e y_0 l'ordinata.

Da adesso, le relazioni geometriche fra figure diventano relazioni algebriche fra numeri, con enorme vantaggio pratico e applicativo.

Già il D'Oresme([36]) (XIV secolo), iniziatore del metodo, arrivò fino a produrre – sostanzialmente – l'equazione della retta. Oggi noi seguiamo la teoria, più completa, di Descartes (Cartesius, Cartesio, XVII secolo).

9.4 Grafico di dispersione ovvero scatterplot

(Scritto sia scatterplot che scatter plot).

[36]Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Nicola d'Oresme: "matematico, fisico, astronomo ed economista, vescovo, filosofo, psicologo e musicologo francese (...) teologo appassionato, traduttore competente, influente consigliere di re Carlo V di Francia (...) ebbe l'idea di utilizzare ciò che dovremmo chiamare coordinate rettangolari nella terminologia moderna, una lunghezza proporzionale alla longitudo, l'ascissa di un dato punto e una perpendicolare a quel punto, proporzionale alla latitudo, l'ordinata (...) longitudo e latitudo possono variare o rimanere costanti."

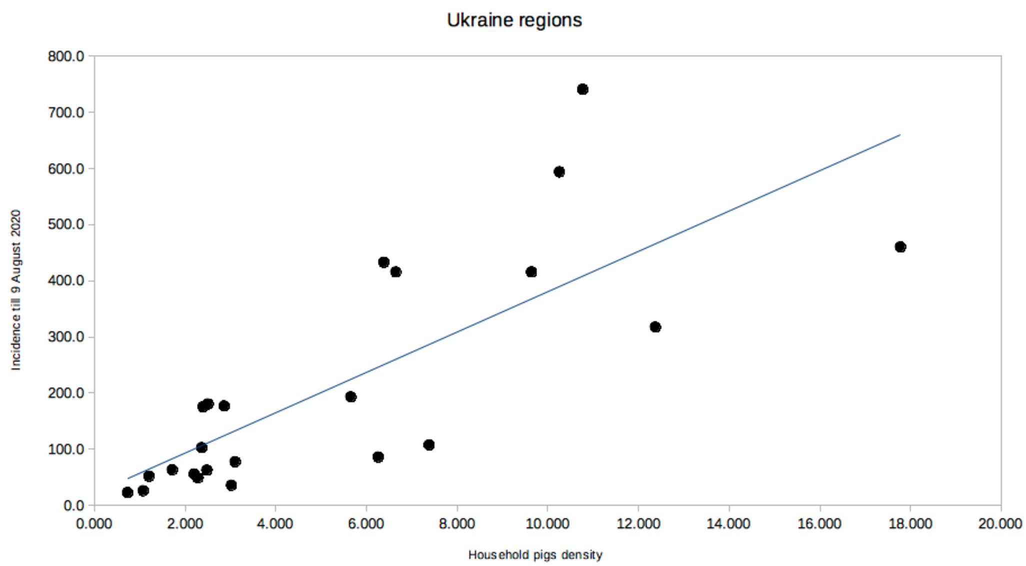


Figure 4: Esempio di scatterplot, che mette in relazione la densità di maiali d'allevamento domestico ed incidenza del covid-19, nelle regioni dell'Ukraina; tratto da: "In the first wave of the 2020 pandemic in several areas more sunlight less pandemic, more pigs more pandemic, and lower correlations with some other livestocks". (December 2020), A. Soranzo. DOI: 10.13140/RG.2.2.29852.31367 Allo scatterplot è aggiunta la *retta di regressione.*

"Il grafico di dispersione o grafico a dispersione o scatter plot o scatter graph è un tipo di grafico in cui due variabili di un set di dati sono riportate su uno spazio cartesiano.

I dati sono visualizzati tramite una collezione di punti ciascuno con una posizione sull'asse orizzontale determinato da una variabile e sull'asse verticale determinato dall'altra.
(...)
solitamente la variabile più importante è sull'asse delle y"
(Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Grafico di dispersione).
Altri esempi in `https://openi.nlm.nih.gov/detailedresult?img=PMC3973306_gkt1380f1p` e moltissimi altri in `https://www.google.com/search?q=ncbi+drug+scatterplot&tbm=isch&ved=2ahUKEwjOoM3xmLXsAhUlgXMKHVfYC1AQ2-cCegQIABAA&oq=ncbi+`

drug+scatterplot&gs_lcp=CgNpbWcQA1DUmQJYoqICYJqlAmgAcAB4AIABWogB4wKSA
sclient=img&ei=BISHX86ONaWCzgPXsK-ABQ&bih=616&biw=1177

9.5 Rette del piano cartesiano

Esistono

- rette verticali, cioè parallele all'asse y: equazione $x = p$
- rette orizzontali, cioè parallele all'asse x: equazione $y = q$
- rette oblique, non parallele nè all'asse x nè all'asse y

Equazioni esplicita della retta passante per l'origine e non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale, per l'origine:

$$y = m\,x$$

e questa funzione è caratterizzata da
"al raddoppiare di x raddoppia y e viceversa."

La maggior parte delle funzioni di 1 variabile delle Scienze Applicate ha questa forma. Per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con la temperatura assoluta

$$V = V_0\,\alpha\,T \qquad T\;temperatura\;assoluta \qquad retta\;per\;l'origine\;nel\;piano\;(T, V)$$

Equazioni esplicita della retta non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale:

$$y = m\,x + q$$

per esempio $giorni\_dal\_concepimento = 365.25\,anni + 273$ (Formula approssimativa).

q ci dice il punto di intersezione con l'asse y, precisamente $(0, q)$.
m: ***coefficiente angolare***, ci indica la pendenza della retta;
se è 0 la retta è orizzontale
se è > 0 la retta "sale"

se è < 0 la retta "scende".

A volte nelle Scienze Applicate l'equazione appare come

$$y = m\,(x + p)$$

che è esattamente come prima con $q = m\,p$ ovvero $p = q/m$.

Per esempio una ricerca scientifica[37] dà questo peso ideale

$$\text{weight\_children\_aged\_1-5\_years} = 2 \times (\text{age\_in\_years} \; + 5)$$

che nella forma $y = m\,x + q$ sarebbe $\text{weight\_children\_aged\_1-5\_years} = 2 \times \text{age\_in\_years} \; + 10$.
Addirittura può presentarsi scritta in una forma equivalente

$$y = a\,(b\,x + c)$$

per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con i gradi Celsius

$$V = V_0\,(1 + \alpha\,t) \qquad t\;temperatura\;{}^\circ C \qquad retta\;obliqua\;nel\;piano\;(t, V)$$

Equazione implicita della retta: $a\,x + b\,y + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

per esempio $2\,x - y + 10 = 0$ che è quella appena visto salvo diverse variabili.

Ogni punto $P(x, y)$ le cui coordinate verificano l'equazione della retta appartengono alla retta, e questo sarà un fatto generale, estendibile a tutte le *curve*, in rappresentazione esplicita o implicita. Per esempio $(1.7, 63.869)$ sta sulla curva del peso ideale maschile secondo Keys prima visto, che è la parabola (grafico di) $y = 22.1\,x^2$: altezza in metri 1.70 (ovvero 1.7, matematicamente), peso 63.869 in chilogrammi.

Equazione della retta per 2 punti:

[37] Make your Best Guess: an updated method for paediatric weight estimation in emergencies, by Tinning K, Acworth J., in Emerg Med Australas. 2007 Dec;19(6):528-34.

$$\boxed{\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}}$$

Naturalmente con semplici passaggi algebrici la forma soprastante può essere ricondotta ad $a\,x + b\,y + c = 0$, e, se la retta non è verticale, a $y = m\,x + q$.

Formula della distanza di 2 punti:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono parallele } \Leftrightarrow \; m' = m$$

(e ovviamente 2 rette verticali $x = p$ e $x = p'$ sono parallele).

E si possono considerare molte altre formule.([38])

Grafico cartesiano G_f di una funzione $f(x)$ è (il disegno del)l'insieme

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

e spesso le funzioni hanno nome $y(x)$ denotato anche semplicemente y, e già abbiamo visto le rette orizzontali e oblique $y = m\,x + q$, che di fatto sono proprio grafici, mentre le rette verticali non sono grafici di funzioni di x. (Ma sono grafici di funzioni di y).

[38]Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule.
2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono perpendicolari } \Leftrightarrow \; m' = -\frac{1}{m}$$

Formula della distanza punto-retta:

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Fra le rette che sono grafici di funzioni di x si distinguono queste:
$y = x$ bisettrice del I e III quadrante – funzione *identità*
$y = -x$ bisettrice del II e IV quadrante – passaggio all'opposto
$y = q$ con $q \in \mathbb{R}$ generica retta orizzontale, e se $q = 0$ si ha
$y = 0$ asse x
e quelle che non sono grafici di funzioni di x sono precisamente queste:
$x = x_0$ generica retta verticale, e se $x_0 = 0$ si ha
$x = 0$ asse y.

9.6 Funzioni e dis/equazioni di primo grado

Per ogni m la funzione $f(x) := m\,x$ si chiama *funzione lineare*, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x$.

> Esempio: l'indice di massa corporea: $BMI := \frac{peso}{altezza^2}$, in cui l'altezza possiamo ragionevolmente considerarla costante – per un fissato individuo – mentre un peso x può variare più facilmente, in pratica abbiamo $y = \frac{1}{altezza^2} \cdot x$; si usino chilogrammi e metri).

È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costantemente nulla* se $m = 0$.
Il grafico è una retta passante per l'origine.
Fissato $m \neq 0$, l'equazione $m\,x = 0$ ha soluzione $x = 0$ (basta dividere per $m \neq 0$), mentre la disequazione in 1 variabile

$$m\,x > 0$$

si risolve dividendo per m ciò che, se e solo se $m < 0$, inverte l'ordinamento. Analogamente si risolve se si aveva $\geq$, $<$ o $\leq$.

Per ogni $m, q \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := m\,x + q$ si chiama funzione *affine*, deprecabilmente detta lineare, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x + q$.
È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costante* se $m = 0$.
Il grafico è una retta, che *intercetta* (interseca) l'asse y in $(0, q)$.
Fissati $m \neq 0$ e q, l'equazione

$$m\,x + q = 0$$

ha soluzione $x = -\frac{q}{m}$. (Si sommi $-q$ e si divida per $m \neq 0$).
Le 4 disequazioni con $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ si risolvono sommando $-q$ e poi dividendo per m invertendo l'ordinamento se $m < 0$.
Fissati m e q, la disequazione in 2 variabili

$$y \geq m\,x + q$$

rappresenta il *semipiano chiuso* "sopra" la retta $y = m\,x + q$, compresi i punti della retta. Col $>$, il *semipiano aperto*, esclusi i punti della retta.
Con $\leq$, e con $<$, si va "sotto" la retta, compresa (semipiano chiuso) o rispettivamente esclusa (semipiano aperto).
Ciò vale anche per la $y > m\,x$ e le 3 analoghe, che hanno $q = 0$.

Esempio. Con l'altezza h (in centimetri) e il peso p (in chilogrammi) la Formula di Broca definiva (oggi esistono vari altri standard)

$peso\,normale = (h - 100) \pm 10\%$ (secondo alcuni, $h \geq 130$)

ovvero, con la corretta interpretazione del $\pm 10\%$, in senso intervallare,

$peso\,normale \in$

$$[(h - 100) - (h - 100)10\%, (h - 100) + (h - 100)10\%]$$

e qua – a conti fatti – riconosciamo 2 rette e 3 regioni del piano Ohp:

sottopeso $p < 0.9\,h - 90$ (sotto la retta)

sovrappeso $p > 1.1\,h - 110$ (sotto la retta)

e la terza regione, dei normopeso, è quella fra le 2 rette.
(Secondo certi Autori, $\pm 20\%$ invece che $\pm 10\%$.).

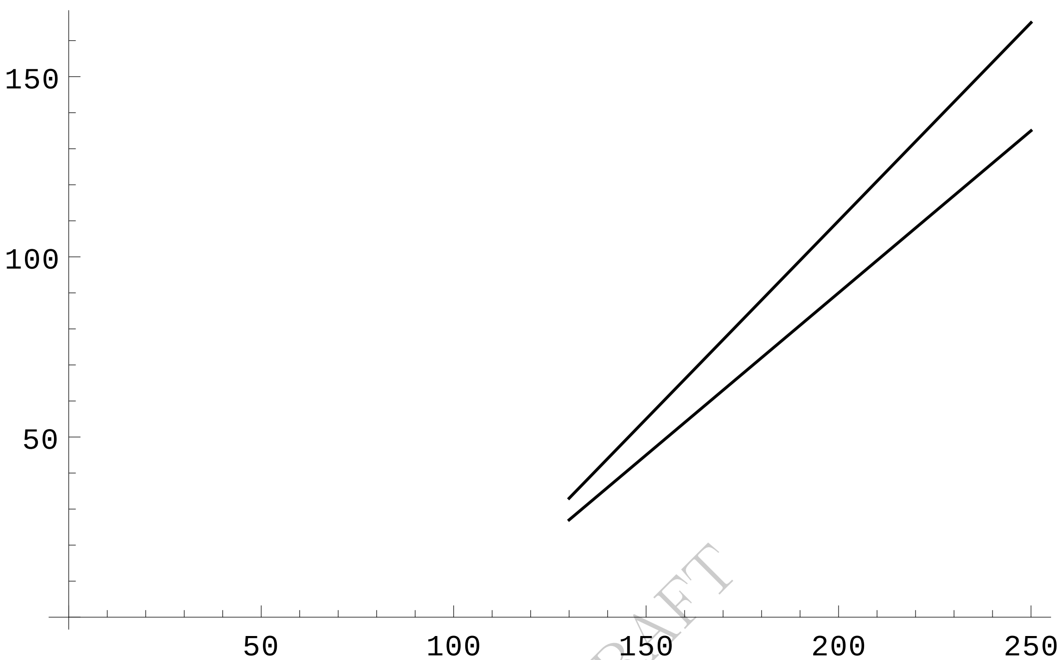


Figure 5: Le 2 rette estreme per i normopeso secondo la Formula di Broca con la tolleranza del 10%, limitatamente ad altezze fra 130 e 250 cm.

> Come sarebbe la situazione di 53 kg e 1.70 m? (Si converta in centimetri).

9.7 Nota finale sulle rette oblique

Le rette oblique con pendenza verso l'alto sono grafici di funzioni che "crescono sempre ugualmente".

Per esempio il volume V di liquido in una provetta al crescere del livello h oltre la parte "semisferica": $V = m\,h + q$, dove q è il volume della parte "semisferica" della provetta.

9.8 Nota sui modelli matematici

Il fatto che la formula di Broca per il peso ideale certamente smetta di avere senso in qualche punto imprecisato – non esiste alcun peso ideale per persone alte un chilometro e anzi è dubitabile già per 3 metri – è un caso specifico dell'osservazione generale seguente.

Molte formule delle Scienze Applicate hanno un qualche dominio di ragionevolezza in cui modellizzano bene la realtà sensibile, divenendo sempre meno sensate verso imprecisati estremi.

Leggiamo per esempio in un articolo scientifico (`https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22211780/`)

> The Mosteller formula underestimates BSA in the paediatric population and must be used with precautions because of low precision, most pronounced in neonates and infants.

(E certo non calcolerà bene l'area della superficie corporea di un embrione di forma pressochè sferica).

ESERCIZI SULLA LEZIONE 9

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 8:00 di mattina concentrazione 50 mg/dl e alle 6:00 di sera concentrazione 82 mg/dl. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura).
Trovare la retta per i 2 punti espressa in forma esplicita, senza unità di misura.
(Con essa si potrebbe ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione; ma qua non ne faremo nulla).

Svolgimento
Osservato che le 6:00 di sera sono le 18:00, cioè a 18 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(8\,h, 50\,mg/dl), (18\,h, 82\,mg/dl) \quad \text{ovvero meglio} \quad (8, 50), (18, 82)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t-t_2}{t_1-t_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}$$

$$\frac{t-18}{8-18} = \frac{y-82}{50-82}$$

$$\frac{t-18}{-10} = \frac{y-82}{-32} \quad \Big/ \cdot (-1)\cdot 10\cdot 32$$

$$32\,(t-18) = 10\,(y-82)$$

$$32\,t - 576 - 10\,y = -820$$

$$-10\,y = -32\,t - 244$$

$$\boxed{y = 3.2\,t + 24.4}$$

anche esprimibile con

$$\boxed{y = \frac{16}{5}\,t + \frac{122}{5}}$$

(Da cui p.es. a mezzogiorno, $t := 12$, la concentrazione ipotetica 62.8 mg/dl).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 6:00 di mattina concentrazione 70 nmoli/L e alle 9:00 di sera 150 nmoli/L. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura, h e poi nmoli/L).
Con la retta per i 2 punti si può ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione. Con l'equazione esplicita di quella retta, senza unità di misura, calcolare l'ora in cui la concentrazione è salita a ≥ 110 (nmoli/L, unità di misura che non esprimiamo per semplicità).

Svolgimento

Osservato che le 9:00 di sera sono le 21:00, cioè a 21 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(6\,h, 70\,nmoli/L), (21\,h, 150\,nmoli/L) \qquad \text{ovvero meglio} \qquad (6, 70), (21, 150)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 21}{6 - 21} = \frac{y - 150}{70 - 150}$$

$$\frac{t - 21}{-15} = \frac{y - 150}{-80} \qquad \Big/ \cdot (-1) \cdot 15 \cdot 80$$

$$80\,(t - 21) = 15\,(y - 150)$$

$$80\,t - 1680 - 15\,y = -2250$$

$$-15\,y = -80\,t - 570$$

e dividendo per -15

$$y = \frac{16}{3}\,t + 38$$

e ora risolviamo la disequazione della concentrazione $y \geq 110$

$$\frac{16}{3}\,t + 38 \geq 110$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 110 - 38$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 72$$

$$t \geq 72 \cdot \frac{3}{16} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

cioè a 13.5 ore dalla mezzanotte, cioè 13 ore e mezza, cioè alle

$$\boxed{13{:}30}$$

10 Piano cartesiano – II parte

Il grafico della funzione *passaggio al reciproco*, già vista,

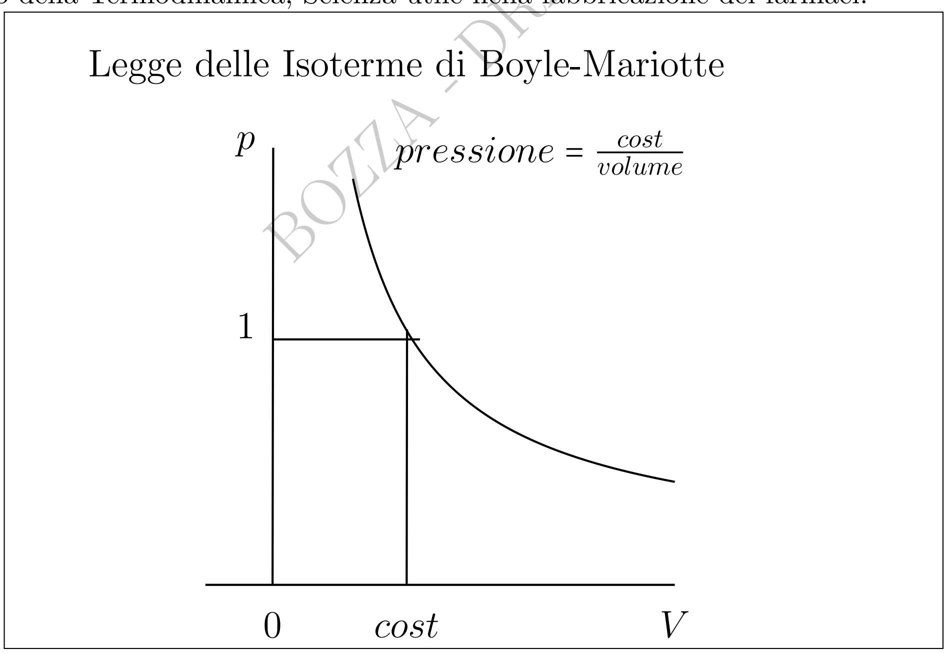
$$y = \frac{1}{x}$$

è una ***curva***[39] e più in generale

$$y = \frac{cost}{x} \qquad cost \neq 0$$

ha grafico una curva detta ***iperbole equilatera (riferita agli asintoti)*** e questa è una delle formule di più ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate.

Esempio della Termodinamica, Scienza utile nella fabbricazione dei farmaci.



Queste funzioni $y(x) = \frac{cost}{x}$ sono caratterizzate da
"al raddoppiare di x dimezza y e viceversa"

Tutti i grafici sono *curve*,

[39]Una definizione rigorosa di *curva* è alquanto complessa, e in questa trattazione elementare supporremo noto il concetto. Le curve più semplici sono le rette.

e hanno un'equazione *esplicita* $y = f(x)$,
ma esistono curve che non sono grafici,

e hanno un'equazione *implicita* $f(x, y) = 0$.

In particolare il ***circolo*** di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Altri Autori lo chiamano *cerchio* ma in questo testo il ***cerchio*** sarà la regione "dentro" un circolo.
Questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio.*
Ricordiamo

la lunghezza del circolo $2\,\pi\,r$

l'area del cerchio $\pi\,r^2$.

L'area del cerchio può essere usata per rappresentare un valore numerico: i ***diagrammi a bolle*** possono rappresentare 1 o 2 o 3 liste di valori corrispondenti, come vedremo.

Esempio 1. Ecco un esempio semplicissimo, in cui 1 lista di 6 numeri viene rappresentata con 6 cerchi, variamente colorati per identificarli. Il cerchio rosso, il più grande, rappresenta i morti di covid-19 in Italia nella prima ondata del 2020.

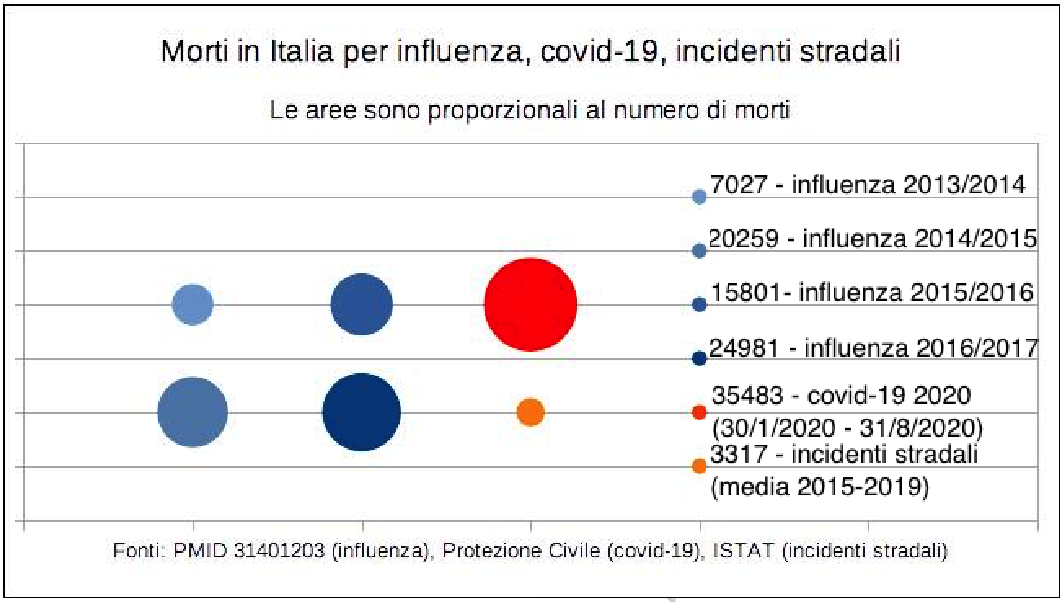
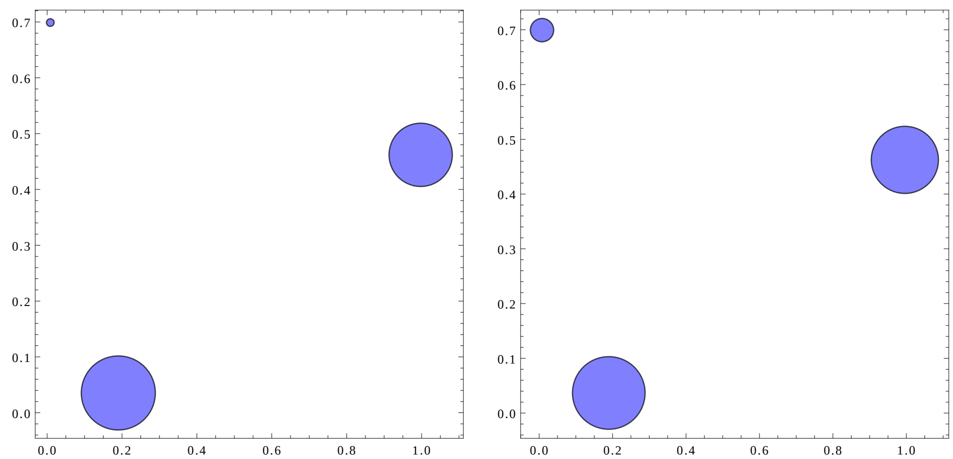


Figure 6: Esempio di rappresentazione grafica di 6 dati numerici

(Si rassicuri l'automunito lettore: nonostante la ciclopica perdita di anni di vita umana causata dai veicoli, con incidenti causati magari da 1 che uccide 2 o 3, anche bambini o giovani con aspettativa di vita residua di 50 anni, nulla di simile alle limitazioni generate dal covid sta per avvenire contro i veicoli, che muovono un mercato mondiale smisurato, con un numero di veicoli a 4 ruote dell'ordine di 10^9 che consumano carburante dell'ordine di 10^{12} litri all'anno).

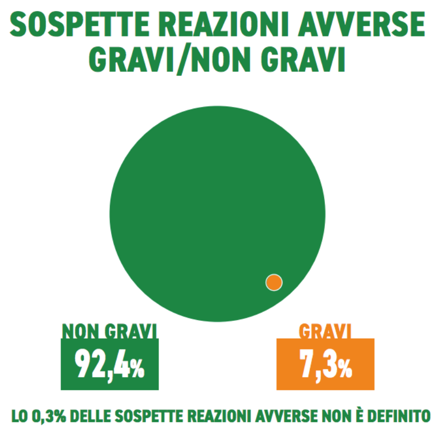
Purtroppo secondo altri Autori il terzo non l'area dei cerchi bensì il diametro rappresenta un dato, per cui i diagrammi a bolle di fatto possono essere molto fuorvianti guardandoli, e facendoli bisogna specificare lo standard usato. E ancor peggio coi diagrammi a bolle tridimensionali.

Esempio 2.

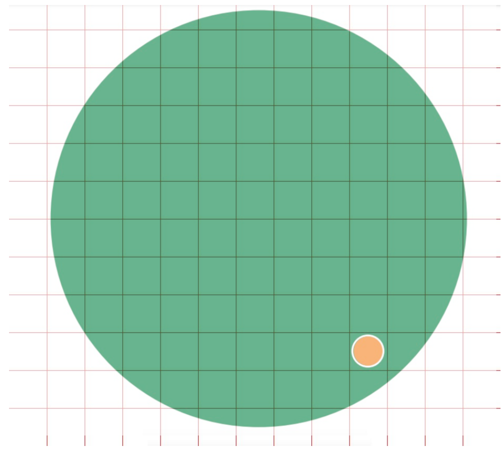


Esempio di 2 rappresentazioni delle stesse 3 terne di numeri coi diagrammi a bolle, a sinistra con le aree e a destra coi diametri.

Esempio 3. Con il covid-19 c'è stato un fiorire di fake news sui vaccini. Vediamo in questo esempio la mostruosa sproporzione fra l'area del cerchio arancio e quello verde: mentre si afferma che l'arancio rappresenta il 7,3% la sua area è meno dell'1%.
Guardando bene, è possibile che abbiano usato lo standard di rappresentare il dato con il diametro invece che con l'area, ma allora avrebbero dovuto accostare i cerchi e non sovrapporli perchè sovrapponendoli qualunque persona ragionevole riterrà che il dato sia rappresentato dall'area.
È ovvio che falsi di questo genere generano diffidenza verso i vaccini.



Fonte: AIFA, Link



Con quadrettatura sovrapposta

Esercizio$_\mu$ Si verifichi se il punto $(2, 2)$ sta nel circolo

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y + 1 = 0$$

Esercizio$_\mu$ Esplicitare i 2 semicircoli costituenti il circolo.
(Si troverà $y = 5 \pm \sqrt{-x^2 - 2x + 24}$).

Altre curve in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}\,x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse} \text{ (in } \textit{forma canonica}^{(40)}\text{)}$$

e la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse.* Se $a > b$ l'ellisse appare “ribassata” e se $b > a$ l'ellisse appare “allungata verso l'alto”.

[40] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard.*

Esercizio$_\mu$ Con $a \coloneqq 3$ e $b \coloneqq 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

Ora vediamo una curva in equazione esplicita: la generica **parabola** con asse verticale ha equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$

La disequazione

$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$

rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga >, e questo è un fatto generale).

E ovviamente

$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$

rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

La parabola è simmetrica rispetto ad una retta detta *asse* che interseca la parabola in un punto detto *vertice* della parabola.

Per esempio in uno studio scientifico si è stabilito

$$weight \leq -3{,}767 + 89.11 * length + 1.237 * length^2 \qquad 40 \leq lenght \leq 55$$

(con la lunghezza in centimetri e il peso in chilogrammi) rappresenta bene una soglia per il 90% dei neonati (Hospital Israelita Albert Einstein, San Paolo, Brasile, 1995-1998). (Con 50 cm dà 3781 grammi). (Si noti che usano il punto decimale e la virgola come separatore delle migliaia).

10.1 Le curve a forma di J

La parabola ci offre un semplice modello del concetto, più generale, di *curva a forma di J*. Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *J curve*:

> In medicine, the 'J curve' refers to a graph in which the x-axis measures either of two treatable symptoms

> (blood pressure or blood cholesterol level) while the y-axis measures the chance that a patient will develop cardiovascular disease (CVD). It is well known that high blood pressure or high cholesterol levels increase a patient's risk. What is less well known is that plots of large populations against CVD mortality often take the shape of a J curve which indicates that patients with very low blood pressure and/or low cholesterol levels are also at increased risk.

10.2 Area del segmento parabolico, ed epidemie

Mentre l'area del triangolo è notoriamente $\frac{1}{2}\,b\,h$, l'area del segmento parabolico – la cui definizione lasciamo all'intuitivo lettore – è

$$A = \frac{2}{3}\,b\,h$$

Questo ci permette di stimare a colpo d'occhi il numero totale di morti di un'epidemia disponendo di un istogramma a barre (bar chart) dei morti giornalieri, se – come spesso succede – esso disegna più o meno un segmento parabolico:

$$morti = \frac{2}{3}\,durata \times picco$$

(Ovviamente la durata va intesa in giorni e sarà bene non prendere il valore di picco effettivo ma mediarlo coi valori dei giorni vicini, anche a occhio).

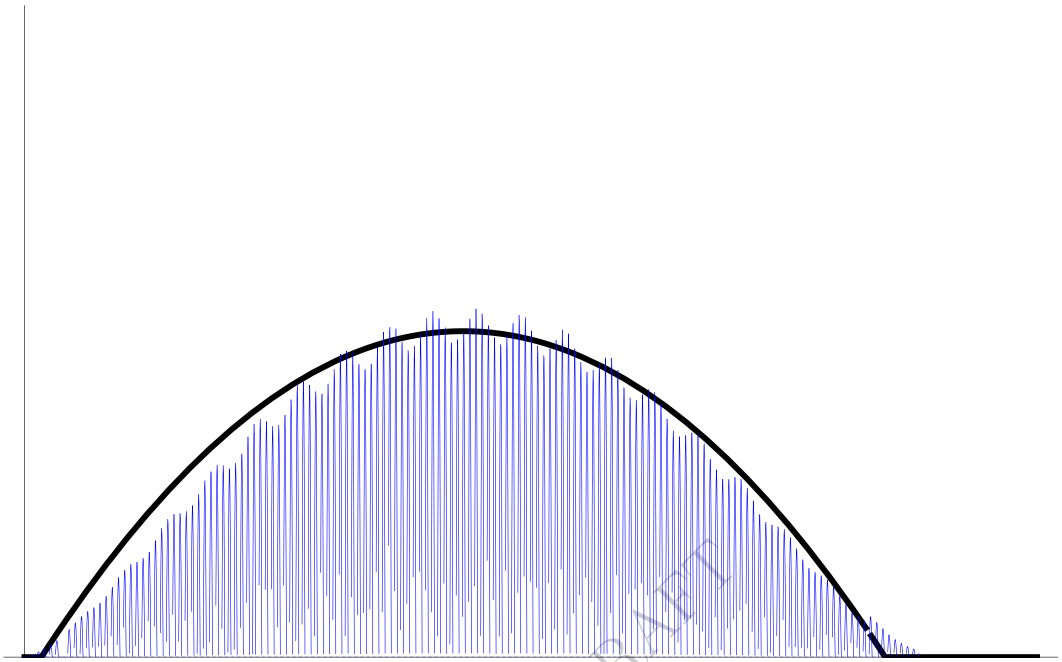


Figure 7: Modellizzazione del numero giornaliero di morti di un'epidemia con una parabola

In generale una migliore approssimazione dell'andamento del numero dei morti delle epidemie si ha con curve "a campana" che crescono poco all'inizio e dotate di una "coda destra".

10.3 Note finali sulle coniche

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[41] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.
Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*.

Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel piano – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O).

[41] Insieme. Termine usato in geometria.

Sono intersezione del piano cartesiano con un *cono completo*.

10.4 Le curve più comuni, e le famiglie di curve

Con le rette[42] e le coniche, e il grafico di $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate.

Un esempio di ***famiglia*** (insieme) di curve in rappresentazione implicita ci viene dalla Termodinamica, con la Legge di van der Waals

$$\left(p + a\,\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = n\,R\,T$$

nel piano (V, p), con R, n, a, b costanti, al variare di T.

Si consideri come ulteriore esempio di *famiglia* (insieme) di curve in rappresentazione implicita il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

`x^3+y^3-3x y=0`

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

10.5 Altre figure nel piano cartesiano

Con le rette (non verticali) e le coniche, e i grafici di $\operatorname{sgn}(x)$ e $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, e ce ne sono infiniti altri, per esempio (quello della funzione)

$$y = \sqrt[3]{x}$$

e, oltre alle rette verticali, infinite altre curve in rappresentazione implicita, per esempio il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

[42] A rigore, le rette verticali del piano cartesiano $O(x, y)$ non sono grafici di funzioni della x, però sono grafici di funzioni della y.

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

x^3+y^3-3xy=0

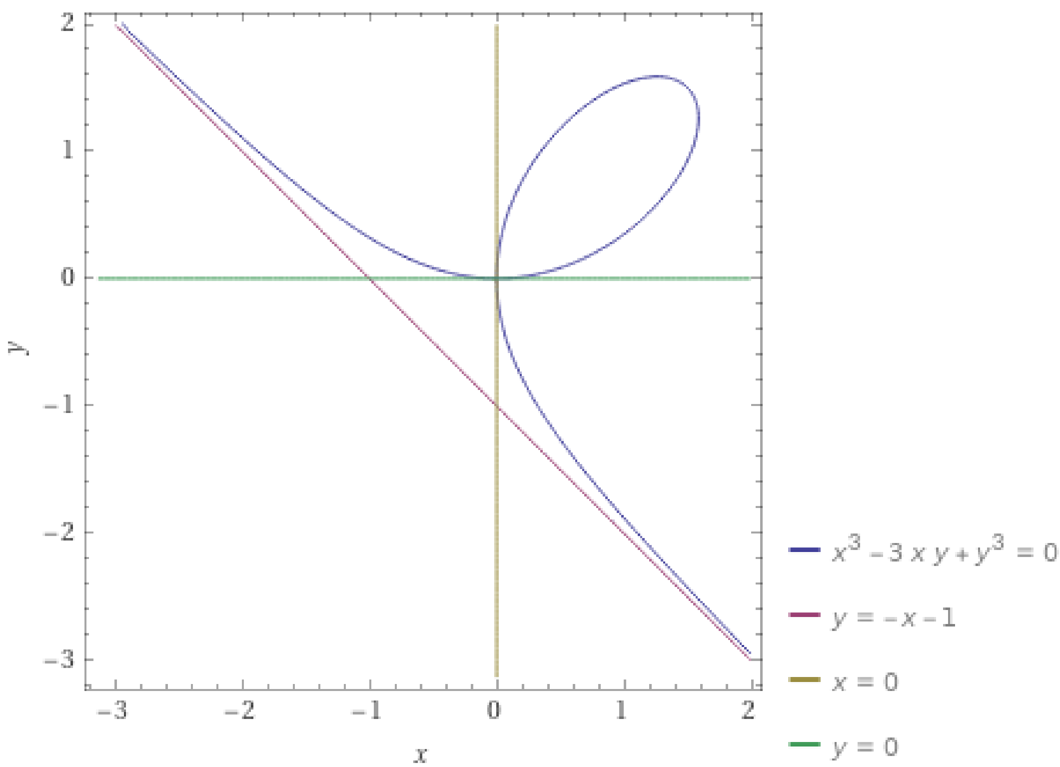


Figure 8: Folium di Cartesio e suo asintoto $y = -x - 1$

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

10.6 Risolvere le equazioni con calcoli o disegni?

Come norma generale bisogna risolvere le equazioni analiticamente, cioè coi calcoli, per quanto possibile, perchè esistono casi in cui il disegno inganna.
Tuttavia fare i disegni è comunque utilissimo

- per verificare la correttezza dei risultati trovati
- per una comprensione complessiva della situazione

- per presentare divulgativamente i risultati, o per presentarli in modo chiaro in relazioni tecniche

- per un tentativo seppure incerto di soluzione almeno approssimata quando il calcolo analitico è impossibile o proibitivamente difficile.

Come esempio dell'ultimo caso si consideri il *sistema di 2 equazioni in 2 incognite di* 6° *grado*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal disegno (sperabilmente, e, in effetti, in questo caso non ingannevole) vediamo che ci sono 4 soluzioni, e abbiamo anche loro approssimazioni, tanto migliori quanto più grande e preciso è il disegno.

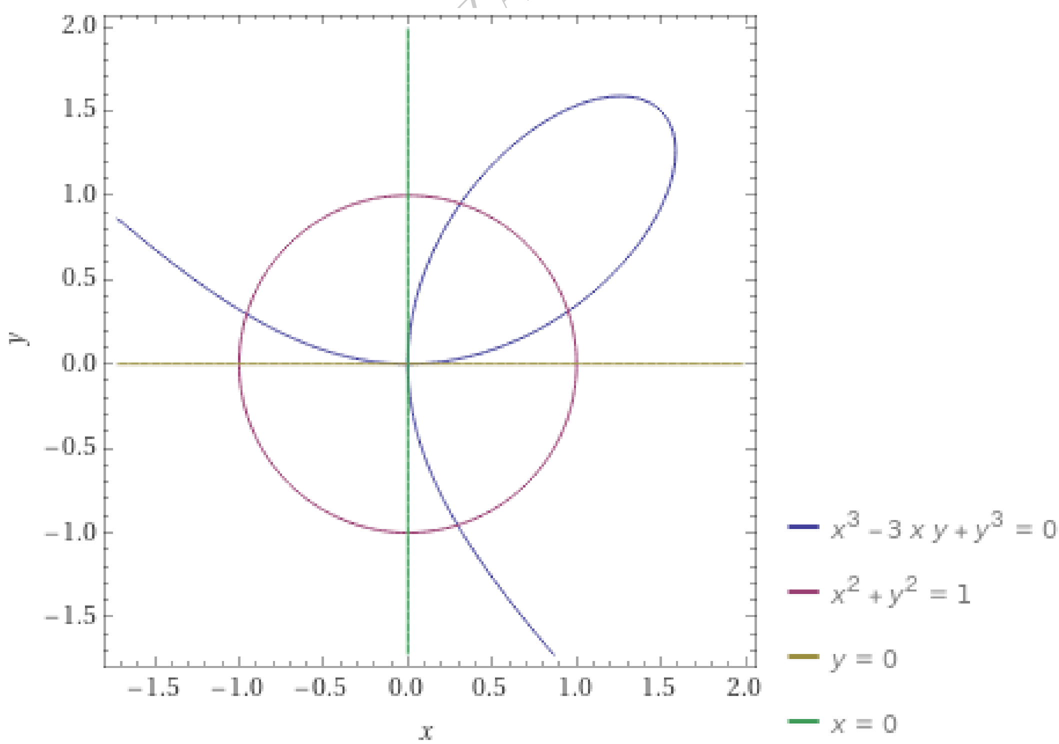


Figure 9: Intersezioni del folium di Cartesio col circolo unitario di centro l'origine

La soprastante figura è stata ottenuta con la più potente intelligenza artificiale attualmente online gratuitamente, WolframAlfa, (qua utilizzata per ben piccola cosa) con cui il futuro professionista farà bene a familiarizzare. Si segua questo LINK.
Si noti che WolframAlfa dice che non ci sono soluzioni, ma questo è dovuto al fatto che per fare un disegno chiaro sono state aggiunte alle 2 equazioni date le 2 equazioni degli assi cartesiani, e togliendo queste ultime dà le 4 soluzioni cercate, approssimate con parecchi decimali: LINK.

Esempio farmaceutico. In questo documento*link–>*della Food and Drug Administration (FDA), ente statunitense internazionalmente considerato autorevolissimo, ci si impegni a capire le ultime 2 righe a pagina 22 e le prime 6 a pagina 23, guardando attentamente le figure, riguardanti la produzione dei farmaci.
Si apprezzino poi le figure a pagina 24.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 10

Esercizio$_\mu$
$\ast$ [*disegno*] Si considerino 2 parametri fisiologici $p > 0$ e $q > 0$ per i quali si definisce *situazione normale* se (p, q) sta entro la curva

$$\frac{p^2}{100} + q^2 = 1$$

e *situazione anormale* altrimenti. (Per semplicità sono state omesse le unità di misura). Com'è la situazione coi valori $p = 5.6$ e $q = 0.73$? Si rappresenti graficamente la situazione.

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[4]{x}$. (Per esempio in $[-16, 16]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purché ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/4)`).

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[8]{x}$ in $[-1, 1]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purché ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Suggerimento: si calcolino con la calcolatrice le radici ottave di 0.1, 0.2,..., 0.9 con $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$, e a mano quelle di 0 e 1). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/8)`).

11 Piano cartesiano – III parte

I *sistemi lineari*, che andiamo a trattare, ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate.

11.1 Sistemi lineari di 2 equazioni in 2 incognite

Il sistema lineare (ovvero di primo grado) di 2 equazioni in 2 incognite x e y

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$$

se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$ rappresenta geometricamente l'intersezione di 2 rette nel piano cartesiano. Potrebbero non avere intersezione, se esse sono parallele e distinte, o infinite soluzioni, se esse sono coincidenti. Questi 2 casi sono caratterizzati dal *determinante* nullo

$$a\,b' - b\,a' = 0$$

e si risolveranno con cautela analiticamente e contemporaneamente facendo un disegno. Non ce ne occuperemo.

Ipotizziamo ora det $\neq 0$. Ognuna delle eventuali equazioni mancanti di 1 delle 2 variabili si risolve subito, e il valore di x o y trovato si sostituisce nell'altra equazione, se in essa c'è quella variabile, e così quell'equazione diventa un'equazione di primo grado in una sola variabile, e si risolve subito anch'essa.

Ipotizziamo ora che ci siano sia la x che la y in entrambe le equazioni: esplicitiamo y dalla prima e sostituiamola nella seconda, che diventa così un'equazione di primo grado nella sola x. Trovata la x, si trova la y dalla sua espressione precedentemente esplicitata dalla prima equazione.

Esercizio$_\mu$
Si risolva

$$\begin{cases} F = C & \text{(stesso valore numerico)} \\ F = 1.8\,C + 32 & \text{(formula di conversione)} \end{cases}$$

(che determina il valore numerico – numero *puro*, senza unità di misura – della temperatura che ha lo stesso valore numerico nelle scale Celsius e Fahrenheit).

Svolgimento
Esplicitiamo F dalla prima, che in effetti "è già risolta", e sostituiamo nella seconda ottenendo

$$C = 1.8\,C + 32 \qquad \Big/ + (-1.8\,C)$$

$$-0.8\,C = 32 \qquad \Big/ : 0.8$$

$$C = 32 : (-0.8)$$

$$\boxed{C = -40}$$

(40 gradi sotto 0, sia Celsius che Fahrenheit).

Esercizio per il lettore.

Abbiamo una provetta di 12 g contenente 2 fluidi non miscibili di volumi 7 ml e 6 ml con pesi specifici incogniti, e un'altra provetta di 14 g contenente gli stessi fluidi di volumi 5 ml e 9 ml.

Per trovare i pesi specifici incogniti x e y risolviamo il sistema lineare (di 2 equazioni in 2 incognite)

(x g/ml) 7 ml+ (y g/ml) 6 ml=12 g

(x g/ml) 5 ml+ (y g/ml) 9 ml=14 g
ovvero

7x+6y=12

5x+9y=14
e si troveranno i pesi specifici (qua dati senza l'unità di misura g/ml) $x = \frac{8}{11} \approx 0.727$ e $y = \frac{38}{33} \approx 1.151$.

11.2 Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Il metodo visto si estende subito ai sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite[43] x, y e z (e poi anche di più): si esplicita z dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda e la terza, che insieme costituiscono a questo punto un sistema lineare di 2

[43] Geometricamente rappresenta l'intersezione di 3 piani nello *spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$.

equazioni in 2 incognite x e y. Tuttavia, i sottocasi particolari, di 0 e infinite soluzioni, iniziano a diventare molteplici, e non sempre facilissimi da trattare.

Analogo e via via sempre più complesso il caso dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

11.3 Sistemi di dis/equazioni e sistemi generalizzati

Definizioni.
Un **sistema di n equazioni** in 1 incognita x, con la parentesi graffa (grande) che vale *et*, è il predicato (con opportune funzioni)

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases}$$

e sostituendo gli = con segni di disuguaglianza si ha un **sistema di n disequazioni** in 1 incognita.
Naturalmente possono considerarsi **sistemi con 2 o più incognite**, e anche sia con equazioni che disequazioni.

I predicati del tipo $f(x) \neq g(x)$, che potremmo chiamare *"inequazioni"*, non li nomineremo per nome considerandoli implicitamente compresi nelle disequazioni data l'equivalenza con $(f(x) - g(x))^2 > 0$.

*

Non esiste un metodo generale per risolverli tutti.

Mostriamo un paio di esempi, con 2 equazioni in 2 incognite.

Esercizio$_\mu$
La Formula di Keys – fra i numerosi standard – calcola

$$peso\,ideale\,uomini = (statura\,in\,metri)^2 \times 22.1 \qquad (*)$$

Per quale statura (realistica) essa dà – per gli uomini – lo stesso peso della Formula di Broca

$$peso\,ideale = (statura\,in\,centimetri - 100) \pm 10\%$$

intesa senza la tolleranza del 10%?

Svolgimento
La Formula di Broca intesa senza la tolleranza del 10% è ovviamente

$$peso\,ideale = statura\,in\,centimetri - 100$$

ovvero

$$peso\,ideale = (statura\,in\,metri - 1) \times 100 \qquad (**)$$

da mettere a sistema con la $(*)$:

$$\begin{cases} p = 22.1\,h^2 & \text{che è la } (*) \\ p = 100\,(h-1) & \text{che è la } (**) \end{cases}$$

e uguagliando si ha successivamente

$$22.1\,h^2 = 100\,(h-1)$$

$$22.1\,h^2 - 100\,(h-1) = 0$$

$$22.1\,h^2 - 100\,h + 100 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 22.1 \cdot 100}}{22.1}$$

$$h \approx 3.03 \quad \vee \quad h \approx 1.49$$

e ovviamente la prima soluzione non ha senso dal punto di vista della realtà sensibile (è ovvio che tutte queste formule hanno un certo dominio entro il quale funzionano bene, e poi perdono significato nella realtà).

$$\boxed{\approx 149\,cm}$$

(Il peso ideale corrispondente sarebbe $\approx 49\,kg$).

Esempio più complesso, oltre il livello che ci prefiggiamo.
Questo ***sistema di equazioni e disequazioni*** in 2 incognite

$$\begin{cases} x\,y = 0 & \leftarrow rappresenta\,2\,rette,\ x = 0\,e\,y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \le 0 & \leftarrow rappresenta\,1\,circolo,\ C(1,1),\ r = 1 \end{cases}$$

$$\text{equivale a } \begin{cases} x = 0 \vee y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ (0-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + (0-1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

ha soluzione, come anche si vedeva subito graficamente,

$$\boxed{\Big(x = 0 \wedge y = 1\Big) \vee \Big(x = 1 \wedge y = 0\Big)}$$

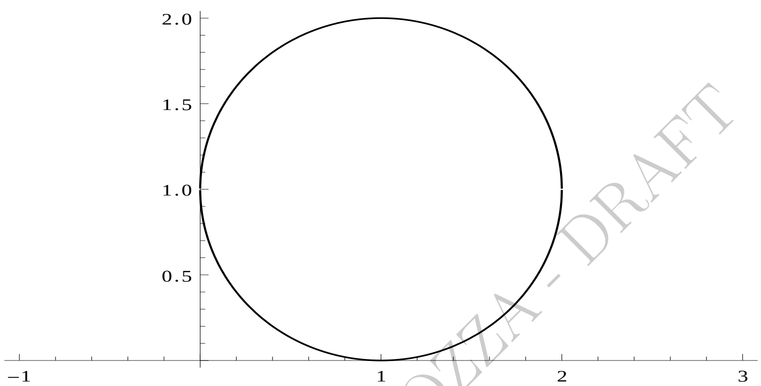


Figure 10: Il circolo e l'unione delle 2 rette del sistema

Definizione.

Predicati come $(*)$ e $(**)$, ammettenti anche il *vel*, li chiameremo *sistemi generalizzati di equazioni e, in questo caso, disequazioni.*

11.4 Funzioni e dis/equazioni di secondo grado

Le parabole con asse verticale hanno equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con qualche $0 \neq a, b, c \in I\!R$, e il loro asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$.
Definito il *discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$, la parabola interseca l'asse x in $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta \geq 0$ e altrimenti mai.
Se x_1 e x_2 sono
• le *radici* (eventualmente coincidenti) del *polinomio* $a\,x^2 + b\,x + c$,
• ovvero le *soluzioni* dell'*equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
• ovvero se $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ sono le *intersezioni* della parabola con l'asse x,
allora è

$$a\,x^2 + b\,x + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Con uno *schema di prodotto dei segni* risolviamo la disequazione

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0 \qquad \textit{oppure} \geq \quad \textit{oppure} < \quad \textit{oppure} \leq$$

Per esempio per $-x^2 - 2\,x + 8 \leq 0$ usando la *formula ridotta*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad\qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

utile se b è intero pari, si trova

$$\Delta = 1^2 - (-1) \cdot 8 = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-1} \qquad x_1 = +2 \quad x_2 = -4$$

$$-x^2 - 2\,x + 8 = -1 \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) \leq 0$$

$-1 > 0 \quad$ *mai*
$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \qquad\qquad$ *Soluzione*: $x \leq -4 \vee x \geq 2\,.$

È meglio risolvere le 3 disequazioni con > e poi individuare l'insieme soluzione a seconda se nella disequazione iniziale si aveva >, ≥, < o

$\leq$. (Altri Autori fanno diversamente). Questo è un procedimento generale che in seguito varrà anche per più di 3 termini.

Si noti che la soluzione di

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

è esattamente la stessa di quest'*equazione razionale fratta*

$$\frac{a(x - x_1)}{x - x_2} > 0$$

e similmente avviene col $<$. Si userà lo stesso *schema di prodotto dei segni*.
Se invece di $>$ si ha $\geq$ dopo aver risolto come sopra si aggiungano alla soluzione tutti i valori di x che annullano il numeratore. Similmente con $\leq$.

L'equazione della parabola ricorre un'infinità di volte(44) nelle Scienze Applicate.

Mostriamo è una funzione razionale fratta di qualche interesse farmaceutico, almeno teorico, in quanto si è mostrato in un articolo scientifico (su un campione di 363 bambini) che, almeno per l'età pediatrica, approssima abbastanza bene i risultati della ben più nota formula di Mosteller per l'area della superficie corporea (dato di interesse per esempio nel dosaggio dei chemioterapici), che è più complessa da calcolare coinvolgendo sia peso che altezza (invece che solo peso) e una radice quadrata (invece che solo "le 4 operazioni"):

$$AreaSuperficieCorporea = BSA = \frac{4\,w + 7}{90 + w}$$

[44] Per esempio, dà lo spazio

$$s(t) = 9.81\,t^2 + v_0\,t$$

percorso al tempo t da un corpo partito verso il basso con velocità v_0, nel campo gravitazionale terrestre, da altezza non troppo elevata, supposta la forma tale da rendere insignificante l'attrito con l'aria.

essendo w il peso in chilogrammi: https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19430073/: “It can safely replace Mosteller formula and dispense the need for time-consuming calculations.”

11.5 Valore assoluto, e relative dis/equazioni

Il valore assoluto in $\mathbb{R}$, già definito,

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

verifica queste proprietà:

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\Big(\forall\, y \neq 0\Big) \quad |x/y| = |x|/|y|$$

$$|x|^2 = x^2 \qquad \text{e addirittura } |x^n| = |x|^n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$$

$$\Big(\forall\, a \geq 0\Big) \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a \quad e\ analoga\ con\ \geq$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

e molte altre[45].

[45] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule sul valore assoluto:

$$||x|| = |x|$$

$$|x| = x \cdot \mathrm{sgn}(x)$$

$$x = |x| \cdot \mathrm{sgn}(x)$$

$$|x^\alpha| = |x|^\alpha \qquad \forall\, x \in I\!R^+, \ \forall\, \alpha \in I\!R$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l’ultima si chiama *disuguaglianza triangolare.*

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

Il valore assoluto ricorre un'infinità di volte nelle Scienze Applicate. Nel prossimo paragrafo ne vedremo alcune, e per intanto osserviamo che $|t|$ rappresenta una distanza temporale dall'istante 0, sia dopo che prima di 0.

11.6 Errore assoluto, relativo e percentuale

Nelle successive 3 formule, si noti che bisogna conoscere il valore esatto di una grandezza considerata.

Si definiscono

$$\text{errore assoluto [rispetto l'esatto]} := |approx - esatto|$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} := \frac{|approx - esatto|}{esatto}$$

$$\text{errore percentuale [rispetto l'esatto]} :=$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} :=$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto] [in forma percentuale]} :=$$

$$\frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

Quest'ultimo errore relativo, e quello della seconda formula, sono lo stesso numero, ma espresso in 2 modi diversi.

Nelle Scienze Applicate ci vorrà grande cautela nell'applicare queste 3 formule perché i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*.

Esempio 1.$_\mu$ All'inizio i 46 cromosomi umani furono erroneamente conteggiati come 44 con errore (percentuale) dell'ordine del 4%:

$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

e i 3 = possono sostituirsi con tutti e 4 i segni di disuguaglianza..

$errore\,assoluto\,[rispetto\,l'esatto]:\ 2$
$errore\,relativo\,[rispetto\,l'esatto]:\ \frac{1}{23}$
$errore\,percentuale\,[rispetto\,l'esatto]:\approx 4.3\%$ (diciamo pure 4%).

Esempio$_\mu$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore (percentuale) dell'ordine dello 0.5 per mille:

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|3.14 - \pi|}{\pi} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14 - 3.14159265...|}{3.14159265...} \cdot 100\% \approx$$

$$\approx \frac{|3.14 - 3.14159265|}{3.14159265} \cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

11.7 Proporzioni

Si dice *proporzione* la *relazione quaternaria* (cioè fra 4 numeri)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad \text{classicamente scritta} \quad \mathrm{x:y=z:w}$$

ma talvolta si trova anche :: invece del segno =.
Non sottolineeremo qua la corrispondenza del concetto con la realtà sensibile, dovuta essenzialmente alla natura del prodotto e della divisione, supponendola nota dagli studi elementari.

Osserviamo invece che per l'operazione di divisione, oltre alle 4 notazioni già viste,

$$\frac{x}{y} \qquad x/y \qquad x:y \qquad x \div y$$

in ambito farmaceutico se ne usa anche una quinta, la parola (latina) **per**, che noi sempre trascriveremo come frazione.

$$\text{Per esempio:} \quad \text{12 mg per ml} \quad \text{scriveremo} \quad \frac{12\ \text{mg}}{1\ \text{ml}}$$

ESERCIZIO Si abbia una boccetta di 10 ml di un farmaco X etichettata “15 mg per ml”. Quanti millilitri (ml) bisognerà iniettare per somministrare una dose di 75 mg?

Svolgimento. Riscriviamo l’indicazione in etichetta nella forma

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}}$$

e produciamo la proporzione

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}} = \frac{75 \text{ mg}}{x \text{ ml}} \qquad \Big/ \cdot \frac{1 \text{ ml} \cdot x \text{ ml}}{15 \text{ mg}}$$

$$x \text{ ml} = \frac{75 \text{ mg} \cdot 1 \text{ ml}}{15 \text{ mg}} =$$

$= 5$ ml (e li abbiamo: la boccetta ne contiene 10).

$$\boxed{5 \text{ ml}}$$

Sul web si ritrovano diffusamente scritte col “per”, come “5 mg per 40 ml”, e il “per” chiaramente significa / ma a quanto pare in Italia una tale scrittura non si usa, risulta praticamente sconosciuta.

NOTA 1. È ben evidente l’importanza di **calcolare esattamente i dosaggi** in Farmacia. Ci sono stati errori fatali. (Plausibilmente sono numerosissimi e solo in minima parte vengono scoperti).

Ecco cosa consiglia il Royal College of Nursing inglese online:

> When you have completed your calculation, remember to check your work. Here’s a reminder of the ways you might do this:
>
> - repeat the calculation

- ask a colleague to check your answer
- try to calculate the answer again using a different method
- check against the recommended dose range (e.g. using the British National Formulary)
- look for unusually big or small answers.

NOTA 2. Sebbene esuli dagli obiettivi di questo testo elementare di matematica, si noti che il millilitro (corrispondente al centimetro cubo) può trovarsi indicato **online di fatto** (nei cataloghi di farmaci) sia con ml che mL ma qualcuno scrive anche *diversamente*, in un modo che potrebbe in via ipotetica confondersi con altro multiplo del litro. E si faccia anche ben attenzione a distinguere la l minuscola dal numero 1...

ESERCIZIO$_\mu$
Una pillola contiene una polvere costituita da $2.5\,mg$ di principio attivo e $300\,mg$ di eccipiente. Quanto principio attivo contiene $1\,kg$ della polvere?

SVOLGIMENTO
Una pillola contiene $(300+2.5)\,mg$ di polvere e allora si ha subito la proporzione

$$2.5\,mg : 302.5\,mg = x\,mg : 1\,kg$$

ovvero con scrittura più moderna

$$\frac{2.5\,mg}{302.5\,mg} = \frac{x\,mg}{1\,kg} \qquad \Big/ \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg}$$

trovandosi

$$x = \frac{2.5}{302.5} \cdot \frac{1\,mg}{1\,mg} \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg} =$$

essendo ovviamente $1\,kg = 1\,000\,g = 1\,000\,000\,mg$

$$= \frac{2.5}{302.5} \cdot 10^6 =$$

$$\boxed{8\,264.46\,mg}$$

(Circa 8 grammi e un quarto).

Esempio – La sezione aurea
Trovare l'unico numero $x > 0$ che sia *medio proporzionale* fra 1 e $1 + x$. (Cioè soluzione di $1 : x = x : (1 + x)$).

Riscriviamo la proporzione

$$1 : x = x : (1 + x)$$

in questa forma

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \qquad \Big/ \cdot x \cdot (1 + x)$$

$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

ed escludendo la radice negativa

$$\boxed{x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618}$$

che è la *sezione aurea* φ.
Questo numero φ tende a ricorrere nelle Scienze Naturali.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 10

III – Funzioni elementari, con equazioni e disequazioni

12 Funzioni trigonometriche

Le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate: Astronomia, Geofisica, Topografia... In ambito farmaceutico e medico in generale, tendono a ricorrere meno, in generale nelle seguenti forme.

• Qualitativa, semplicemente con riferimento alla forma(46) della sinusoide (ovvero della cosinusoide, che ha la stessa forma).

• Quantitativa, cioè il calcolo esatto, per esempio nelle determinazioni posizionali dell'MRI, *magnetic resonance imaging*.

• Quantitativa nella complessa Analisi di Fourier che sta dietro l'elaborazione digitale delle radiografie.

• La trigonometria tocca marginalmente la Farmacia anche con la Legge di Bragg e la Legge di Snell, utili nella Cristallografia a raggi X, usata per l'analisi dei cristalli di sostanze chimiche solide. `LINK->` `LINK->` `LINK->`

• La questione trigonometrica più interessante in questa trattazione elementare è la funzione arcotangente perché dà una distribuzione di probabilità (di Cauchy) simile alla ben più importante distribuzione normale, ma per certi versi più semplice.

12.1 Definizioni

Nel piano cartesiano di assi X, Y e origine O consideriamo il *circolo goniometrico* che è il circolo di centro O e raggio 1, rappresentato in Figura 12.
Consideriamo un arco (del circolo) che inizia in $(1, 0)$ procedendo in senso antiorario. Esso determina un *angolo goniometrico* di vertice O. La lunghezza x dell'arco si dice *misura in radianti* dell' *angolo goniometrico*. E si possono considerare misure negative con archi che procedono in senso orario. Chiamiamo $P(x)$ il secondo estremo dell'arco. La misura in radianti a priori $\in [-2\pi, 2\pi]$, e poi in effetti *facendo anche più di 1 giro*, $x \in \mathbb{R}$. Si definiscono

[46] Leggiamo per esempio in Sinusoidal heart rate pattern: Reappraisal of its definition and clinical significance, di Modanlou HD, Murata Y, su The journal of obstetrics and gynaecology research 2004 Jun;30(3):169-80: Sinusoidal heart rate (...) was called 'sinusoidal' because of its sine waveform (...) A true SHR is an ominous sign of fetal jeopardy needing immediate intervention.

le funzioni *seno* e *coseno*, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e la *tangente*

$$\boxed{\cos(x) := ascissa(P(x))} \tag{1}$$

$$\boxed{\sin(x) := ordinata(P(x))} \tag{2}$$

$$\boxed{\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}} \tag{3}$$

e quest'ultima è l'ordinata del punto d'intersezione della retta $OP(x)$ con la retta tangente al circolo goniometrico in $(1, 0)$.

Per esempio si ha (banalmente le prime 2, difficilmente la terza)

$$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1 \qquad \sin 1 \approx 0.84 \tag{4}$$

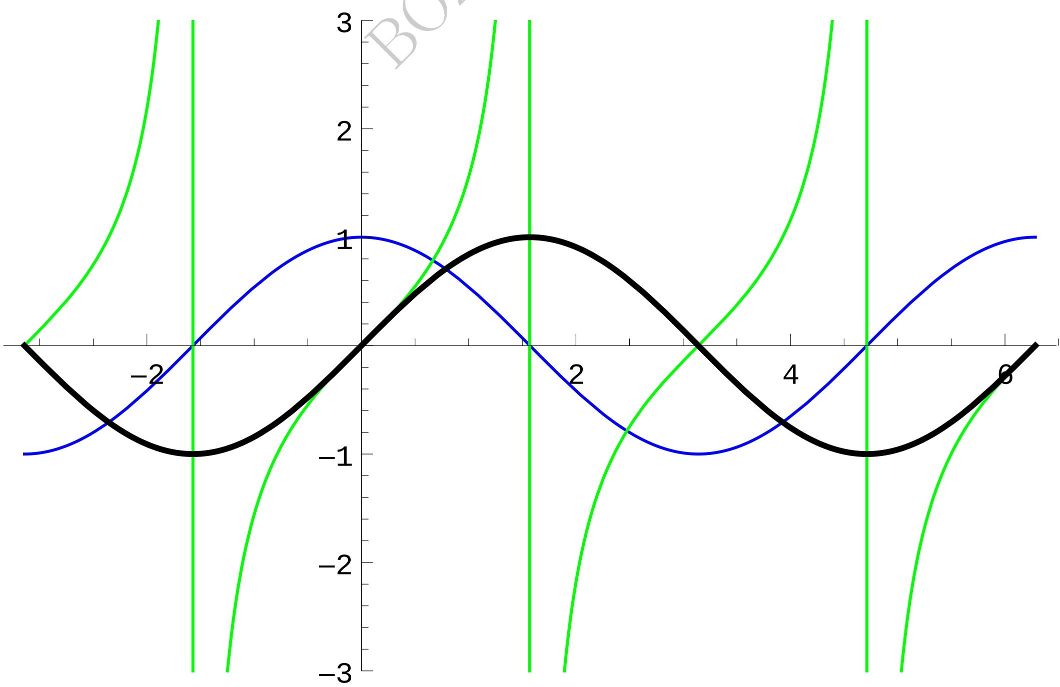


Figure 11: (nero) sinusoide, (blu) cosinusoide, (verde) tangentoide e suoi asintoti

12.2 Periodicità, simmetrie, gradi e radianti

Il punto goniometrico è palesemente 2π−periodico, $P(x+2\pi) = P(x)$ e allora $P(x+2k\pi) = P(x)$ per ogni k intero, dal che si vede subito la periodicità del seno e del coseno, mentre con considerazioni meno elementari si trova che la tangente è π-periodica:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(x+2k\pi) = \sin(x) \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\cos(x+2k\pi) = \cos(x) \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\tan(x+k\pi) = \tan(x) \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}} \tag{5}$$

Dal disegno del circolo goniometrico capiamo subito che

il seno è dispari: $\sin(-x) = -\sin x$
il coseno è pari: $\cos(-x) = \cos x$
la tangente è dispari: $\tan(-x) = -\tan x$

In questa trattazione considereremo il seno e il coseno quasi solo per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ e la tangente quasi solo per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
La misura dell'angolo piatto di π radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di 180°, e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ \tag{6}$$

che consente di passare da un sistema all'altro.
In particolare

angolo giro	360°	2π radianti
angolo piatto	180°	π radianti
angolo retto	90°	$\frac{\pi}{2}$ radianti

Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

e un qualche interesse ha anche 1 rad $\approx 57°$, e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (6). Quasi mai[47] si scrive *rad*.

Primi e secondi. La metà di un angolo di $\pi/4$ radianti ha $\pi/8$ radianti. La metà di quello stesso angolo, espresso in gradi, cioè di 45°, è 22.5° ma spesso si scrive diversamente: come

per 22 ore e mezza scriviamo $22^h 30'$

cioè

si usano i 60 minuti primi che suddividono 1 ora, similmente
si usano i 60 primi (di grado) che suddividono 1 grado

così

per 22.5° (22 gradi e mezzo) si può anche scrivere $22° \, 30'$.

E ci sono anche 60 *secondi* in un *primo* (questione che non approfondiamo).

[47]Per il lettore interessato, alcuni valori numerici interessanti:

$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$	(che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{4}\, rad \approx 0.785\, rad$)
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$	(che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{3}\, rad \approx 1.05\, rad$)
$\frac{\pi}{2} \approx 1.57$	(che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{2}\, rad \approx 1.57\, rad$).
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	(per esempio $\cos\frac{\pi}{4}$)
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	(per esempio $\cos\frac{\pi}{3}$)
$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$	(per esempio $\tan\frac{\pi}{3}$)

Le conversioni fra le 2 scritture delle misure in gradi
con le cifre decimali, come 22.5°
coi primi e secondi, come 22° 30′
è in generale calcolo difficile; ma in questo caso è stata semplice.

Si tratta esattamente degli stessi valori della *latitudine* e *longitudine*, altra questione che non approfondiamo; diamo solo a titolo di esempio le coordinate di Trieste: 45° 39' 01" N 13° 46' 13" E. Si tratta naturalmente di angoli nello spazio tridimensionale, come quelli del paragrafo seguente.

Esempi di angoli in Chimica.
Angolo di legame del metano: ≈ 109°28′.
E si veda l'eptafluoruro di iodio, IF_7, a questo LINK->
Altri angoli di legame a questo LINK->
Si noti che per il metano dà, correttamente, 109.5°. (I 28' di 109° 28', prima detti, corrispondono, salvo approssimazione, a 0.5°).

ESERCIZIO$_\mu$
Qual è la misura in gradi di un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti? (È l'angolo di legame del trifluoruro di boro BF_3).

SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x°$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180° = \frac{2}{3}\pi_{rad} : x°$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180°} = \frac{\frac{2}{3}\pi_{rad}}{x°} \qquad \Big/ \cdot \frac{180° \cdot x°}{\pi_{rad}}$$

$$x° = \frac{2}{3} \cdot 180°$$

$$\boxed{120^\circ}$$

ESERCIZIO$_\mu$
Qual è la misura in radianti di un angolo di 150°?
SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{x_{rad}}{150^\circ} \qquad / \cdot 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} \cdot 150^\circ = x_{rad}$$

$$x_{rad} = \frac{15}{18}\,\pi_{rad}$$

$$\boxed{\tfrac{5}{6}\,\pi}$$

12.3 Alcuni valori notevoli

Nella seguente figura si possono apprezzare molti angoli notevoli, espressi in gradi e radianti, e il loro corrispondente punto goniometrico, con coordinate il coseno e rispettivamente il seno di quell'angolo. Per esempio

$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

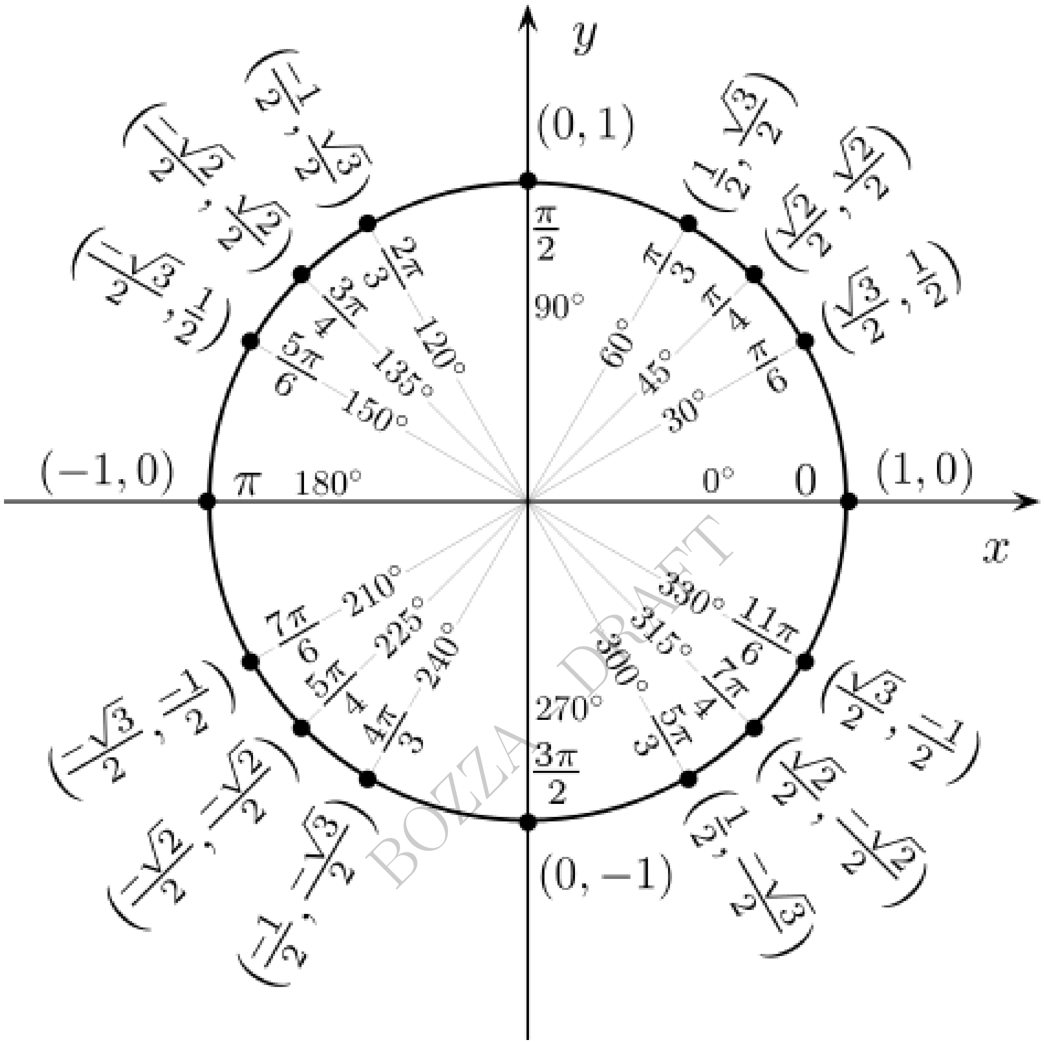


Figure 12: Angoli notevoli e corrispondenti valori di seno e coseno

Semplici considerazioni di geometria elementare danno subito

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$ π	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tan	0	∄	0	∄	0
	*	*			

In questa e nelle successive 4 tabelle le colonne asteriscate sono le più importanti.

Non ci proponiamo di imparare a memoria nessun valore di seno, coseno, tangente (e poi arcotangente), ma solo di saperli ricavare disponendo di queste o analoghe tabelle.

Caveat. Nello schema soprastante è da intendersi che

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\sin(270^\circ)$$

assolutamente non si intenda che $-\frac{\pi}{2}$ **sia uguale a** 270°.

La considerazione del quadrato inscritto nel circolo goniometrico e coi lati paralleli agli assi, che per il Teorema di Pitagora ha lato $\sqrt{2}$, dà subito, con analogo *caveat* come sopra (e anche dopo),

			$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
x°	45°	135°	225°	315°
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1	-1	1	-1
	*			

La considerazione dei 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico, con un vertice in $(0,1)$ e rispettivamente in $(1,0)$, dà subito, dividendoli in triangoli equilateri di lato 1 e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

			$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
x°	30°	150°	210°	330°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	*			

			$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$
x°	60°	120°	240°	300°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
	*			

La considerazione di decagoni regolari darebbe ancora altri valori.

12.4 Alcune formule goniometriche notevoli

Nel corso dei secoli sono state dimostrate moltissime formule. Ecco alcune delle principali.

Formula di addizione del seno:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{7}$$

Identità goniometrica fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{8}$$

Questa sopra è chiaramente una relazione *algebrica* fra seno e coseno.
Esiste poi questa relazione *funzionale* fra seno e coseno:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

che si ottiene subito dalla (7) (ponendovi $y = \frac{y}{2}$).
Ed esiste una *relazione differenziale* fra seno e coseno, che esprimiamo a parole:
la retta tangente alla sinusoide nel punto di ascissa x ha coefficiente angolare $\cos x$ (e che in formule si esprime con $D \sin x = \cos x$ che spiegheremo nella lezione sulle derivate).

Ci sono poi moltissime altre formule goniometriche ovvero trigonometriche, e alcune si trovano nella Sezione di Complementi in coda a questa Lezione.

12.5 Funzioni goniometriche inverse

Definizione: arcotangente.
arctan è l'inversa della restrizione della tangente a $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$\arctan := \left(\tan\big|_{]-\pi/2,\pi/2[} \right)^{-1}$$

Detto altrimenti,
$\arctan x$ **è l'angolo** α **la cui tangente è** x, $\qquad \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$**.**

Similmente, vi sono poi anche l'arcoseno e l'arcocoseno. ([48]) ([49])

Esempio di Chimica. Per esempio $\arccos(-1/3) \approx 1.910633$, che convertendo da radianti in gradi è $\approx 109°28'$: è l'angolo di legame del metano.
Con WolframAlpha

```
arccos(-1/3)
```

dà

`1.9106332...` (eccetera, moltissimi decimali non qua riportati)

e poi

```
convert 1.910633 rad into degrees
```

dà

```
109.471° (degrees)
109 degrees 28 arc minutes 16 arc seconds
```

Alcuni valori notevoli. Dalla definizione si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
	*		*			*	*

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono.

[48] **Arcoseno:**
$\arcsin x$ è l'angolo α il cui seno è x, con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Arcocoseno:
$\arccos x$ è l'angolo α il cui coseno è x, con $\alpha \in [0, \pi]$.
In simboli:

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}$$

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

[49] **Alcuni valori notevoli.** Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\nexists$

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono. (Per esempio $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.61548$).

Altri valori si ottengono dalla disparità dell'arcotangente:

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

12.6 Trigonometria – la goniometria dei triangoli

In un triangolo rettangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti di misure α, β, 90° è

$$\boxed{\frac{a}{b} = \tan\alpha}$$

e i lati di misure a e b si chiamno *cateti* e l'altro *ipotenusa*.

Esistono poi innumerevoli altre formule di Trigonometria, e un paio si trovano nella Sezione di Complementi in coda a questa Lezione.

* Complementi *

12.7 Complementi – Altre formule goniometriche

Formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (\textit{vista prima}) \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x \cos x$$

$$\cos(2\,x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\,\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\,\sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan(2\,x) = \tfrac{2\,\tan(x)}{1-\tan^2 x}, \qquad x \neq \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\,\sin \tfrac{x+y}{2}\,\cos \tfrac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2\,\cos \tfrac{x+y}{2}\,\sin \tfrac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2\,\cos \tfrac{x+y}{2}\,\cos \tfrac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2\,\sin \tfrac{x+y}{2}\,\sin \tfrac{x-y}{2} \end{aligned}$$

Formule di bisezione della tangente:

$$\tan \frac{x}{2} = \begin{cases} \tfrac{\sin x}{1+\cos x}, & x \neq (2\,k+1)\,\pi \\ \\ \tfrac{1-\cos x}{\sin x}, & x \neq k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Vi sono poi le *formule parametriche razionali*, e molte altre.

12.8 Complementi – Trigonometria

In un triangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti α, β, γ valgono i seguenti 2 teoremi.

Teorema dei Seni.([50])

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Teorema del Coseno.([51])

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma.$$

Ed esistono innumerevoli altri teoremi e formule di Trigonometria.

[50] Nasir al-Din al-Tūsī, persiano, XIII sec. d.C. “He is often considered the creator of trigonometry as a mathematical discipline in its own right”, Wikipedia, l’enciclopedia libera.

[51] Euclide, greco, III sec. a.C., ben noto, e Jamshīd al-Kāshī, persiano, XIII sec. d.C. “Much of al-Kāshī’s work was not brought to Europe, and much, even the extant work, remains unpublished in any form”, Wikipedia, l’enciclopedia libera.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 12

ESERCIZIO$_\mu$

$\ast$ La concentrazione sanguigna di una certa sostanza sia modellizzata nelle 24 ore del giorno da

$$u_a(t) := 2\,a\, + a\,\sin\frac{\pi\,t}{12} \qquad 0 \le t \le 24$$

essendo a un parametro fissabile farmacologicamente. In quale orario la concentrazione è ≥ 2.5 per $a := 1$?

Svolgimento.

Seppure non sia necessario per risolvere il problema, vediamo su WolframAlpha il grafico della concentrazione per $a := 1$ scrivendovi

```
plot 2+Sin[Pi t/12], t from 0 to 24
```

Ora (con $a := 1$) abbiamo la disequazione

$$2 + \sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 2.5 \qquad \Big/ + (-2)$$

$$\sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 0.5$$

$$\text{poniamo } x := \frac{\pi\,t}{12} \text{ ottenendo } \sin x \ge \frac{1}{2}$$

e ci interessano solo i tempi

$$0 \le t \le 24 \qquad \Big/ \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$0 \le \frac{\pi\,t}{12} \le 2\,\pi \text{ cioè } 0 \le x \le 2\,\pi$$

e allora in $[0, 2\,\pi]$ dobbiamo risolvere $\sin x \ge \frac{1}{2}$, che si fa disegnando il circolo goniometrico, trovando subito (sono valori notevoli)

$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi\,t}{12} \le \frac{5}{6}\pi \Big/ \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$2 \le t \le 10$$

e in conclusione

$$\boxed{\text{Fra le 2 e le 10 di mattina}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, corrispondenti appunto a $\sin x = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6}\,\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(Si notino le periodicità).

ESERCIZIO$_{\mu}$ Approssimare $\cos(1)$ usando le (4) e (8).
Si verifichi poi su WolframAlpha con `Cos[1]`

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2\,\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Svolgimento
Con la formula di addizione del coseno

$$2\Big(\cos x\,\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\Big((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Big) = -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

e con il secondo membro così riscritto la disequazione equivale a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < -\sqrt{3}\,\sin x$$

$$-\sqrt{3}\,\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big/ : (-\sqrt{3}) < 0$$

$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da $-\frac{5}{6}\pi$ fino a $-\frac{\pi}{6}$, estremi esclusi, corrispondente appunto a $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

equivalentemente scritta

$$\boxed{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Naturalmente si potrebbero considerare esercizi ↑ più complessi.

13 Funzioni e dis/equazioni ir/razionali

13.1 Polinomi e funzioni razionali intere

Un polinomio è una *scrittura* come
$x^2 - 4$ oppure
$2\,x^7 - \frac{3}{2}\,x^5 + \sqrt{3}\,x^2 - x + 2$ e in generale

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

ed esso definisce una funzione *razionale intera* (o *polinomiale*), e n è il *grado* se $a_n \neq 0$. Per esempio $f(x) := x^2 + 4$, che ha grado 2.

Esistono similmente polinomi in più variabili, come $x^2 + x^8\,y^2 - 1$, del cui grado (che comunque è 10) non ci occuperemo.

13.2 Funzioni e dis/equazioni razionali intere

Limitandosi ad 1 variabile, sia essa x, le
equazioni razionali intere
e le
disequazioni razionali intere
sono predicati con uguaglianza o disuguaglianza fra polinomi, che dopo opportune riduzioni che popolarmente si dicono "portare le x a sinistra", assumono una di queste forme, essendo $P(x)$ un polinomio:

$P(x) > 0$ e ci limiteremo solo al I e II grado, già trattati
$P(x) < 0$ idem
$P(x) \geq 0$ idem
$P(x) \leq 0$ idem

$P(x) = 0$ e ci limiteremo a:
equazioni di I o II grado, già trattate, oppure
$x^n \cdot$(polinomio di I o II grado)$= 0$ **unico caso nuovo** (*)

che si risolve aggiungendo lo 0 alle radici del polinomio sopra

detto. Faremo un esempio pratico.
Naturalmente si potrebbero considerare casi più complessi[52] [53]

---

[52]Per esempio

$$2\,x^4(-x^2-2x+8)(2-x)(1-x+x^2)=0 \qquad \text{o, disequazione, } >0,$$

oppure altra disequazione con $\geq$ oppure $<$ oppure $\leq$.
Per risolvere *fattorizziamo* il polinomio in fattori di primo grado e/o di secondo grado *irriducibili* ovvero con discriminante negativo. E poi si risolve con uno schema di prodotto dei segni.
Ecco qualche dettaglio per il lettore interessato. Il monomio $2\,x^4$ si fattorizza in $2\,x\cdot x\cdot x\cdot x$ ma in effetti i fattori che sono monomi x^n conviene lasciarli stare come sono. Il polinomio di secondo grado $-x^2-2x+8$, con discriminante positivo, abbiamo visto che è $-1\cdot(x-2)(x+4)$. Il fattore di primo grado $2-x$ è già a posto. E $1-x+x^2$ è irriducibile avendo discriminante negativo, e allora non ha zeri. Si ha allora la fattorizzazione

$$2\,x^4(-1)(x-2)(x+4)(2-x)(1-x+x^2)\,.$$

L'equazione con $=0$ equivale, considerato che $x^4=0 \Leftrightarrow x=0$,

$$x=0 \;\vee\; x-2=0 \;\vee\; x+4=0 \;\vee\; 2-x=0$$

che dà $x\in\{-4,0,2\}$. La disequazione si fa con lo schema di prodotto dei segni visto in precedenza trovandosi (per ≤ 0) la soluzione $x\leq -4 \vee x=0 \vee x=2$. Per >0 si troverebbe $-4<x<0 \vee 0<x<2 \vee x>2$.

[53]L'equazione e le 4 disequazioni

$$2\,x^9-2\,x^8-22\,x^7+56\,x^6-56\,x^5+32\,x^4 \qquad =0,\ >0,\ \geq 0,\ <0, \leq 0$$

si risolvono come prima una volta che si riconoscesse che questo è proprio il polinomio di prima, ma ora è molto lontano dalla fattorizzazione. Il problema di fattorizzare un polinomio può essere facile, come è in questo caso, o difficile, o impossibile.
Prima di tutto *raccogliamo* il fattore x^4, subito visto:

$$x^4\,(2\,x^5-2\,x^4-22\,x^3+56\,x^2-56\,x+32)$$

e ci resta da fattorizzare il polinomio $P_5(x)$ di 5^ grado. In questo caso si può fare abbastanza facilmente ma in questa trattazione ci limiteremo solo ai casi in cui, arrivati a questo punto, si abbia un polinomio di grado al più 2 (invece qua è 5) e allora si procede come prima.
Per il lettore interessato: prima si raccoglie 2

$$2\,(x^5-2\,x^4-11\,x^3+28\,x^2-28\,x+16)$$

in modo da avere un polinomio *monico*, cioè con *coefficiente principale* 1, poi si procede con la Regola di Ruffini, se si può. Cercheremo qua *solo* fattori $x-m$ con m un divisore intero del termine costante: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16. Allora basta cercare un numero m fra quelli, il quale annulli il polinomio. È $P_5(2)=0$ e allora dividiamo per $x-2$ con la Regola di Ruffini:

i coefficienti →	+1	−1	−11	+28	−28	+16
la radice → +2	↓	+2	+2	−18	+20	−16
	+1	+1	−9	+10	−8	0 ← sempre così

Per la generica equazione di III e IV grado esistono complicate formule, trovate da matematici italiani nel XVI secolo, che non tratteremo. Ci accontentiamo di $x^n\cdot$(polinomio di I o II grado)= 0, come sopra detto, che può avere anche grado maggiore di 4, ma è molto particolare.

Esempio$_\mu$ La Formula di Livi per il peso ideale è
$peso\,ideale = (2.37 \times altezza\,in\,metri)^3$
La Formula di Keys per il peso ideale per le donne è $pesoidealedonne = (altezza\,in\,metri)^2 \times 20.6$
Per quali altezze (realistiche) danno lo stesso peso, e quale?

Detta h l'altezza in metri – unità di misura che metteremo nella soluzione ma ometteremo nei calcoli – abbiamo l'equazione di 3^ grado

$$(2.37\,h)^3 = 20.6\,h^2$$

e successivamente

$$2.37^3 \cdot h^3 - 20.6\,h^2 = 0$$

che è equazione *cubica*, ovvero *razionale intera di terzo grado*, ma del tipo (*)

$$h^2 \cdot (2.37^3 \cdot h - 20.6) = 0$$

$$h = 0\ (non\,realistica) \quad 13.312053\,h = 20.6$$

e allora

$$h = \frac{20.6}{13.312053}$$

$$p = \left(\frac{20.6}{13.312053}\right)^2 \cdot 20.6$$

che dà i coefficienti del quoziente, e allora la fattorizzazione

$$(x-2)(x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8)$$

e riprendendo il monomio x^4 e il fattore 2

$$2\,x^4(x-2)(x^4 + x^3 - 9x^2 + 10x - 8)\,.$$

Si continua cercando un fattore $x - m'$ con m' fra i divisori interi di -8, e si trova che 2 annulla il polinomio di quarto grado $P_4(x)$, e allora lo si divide per $x - 2$ con la Regola di Ruffini trovando

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x^3 + 3x^2 - 3x + 4)$$

poi cercando fra i divisori interi di 4 si trova l'annullamento di $P_3(x)$ in -4 da cui con la Regola di Ruffini applicata a $P_3(x)$

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x+4)(x^2 - x + 1)$$

che è come prima (un fattore è opposto ma congloba il (-1)).

$$\boxed{\begin{array}{c} h \approx 1.55\,m \\ p \approx 49.3\,kg \end{array}}$$

13.3 Funzioni e dis/equazioni razionali fratte

Ovviamente l'*equazione razionale fratta*

$$\begin{array}{l} polinomio \rightarrow \\ polinomio \rightarrow \end{array} \quad \frac{N(x)}{D(x)} = 0$$

ha la stessa soluzione dell'equazione razionale intera

$N(x) = 0$

tolte le eventuali radici del denominatore.

Ovviamente la *disequazione razionale fratta*

$$\begin{array}{l} polinomio \rightarrow \\ polinomio \rightarrow \end{array} \quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0$$

ha la stessa soluzione della disequazione razionale intera

$N(x) \cdot D(x) > 0$

Similmente con $<$

Se invece di $>$ o $<$ si ha $\geq$ o $\leq$ dopo aver risolto come sopra si aggiungano alla soluzione tutti i valori di x che annullano il numeratore.

Per esempio

$$\frac{3\,x + 4}{5\,x + 6} < 0$$

ha esattamente la stesse soluzione della disequazione di II grado

$$(3\,x + 4)(5\,x + 6) < 0$$

13.4 Funzioni e dis/equazioni irrazionali

• Le radici di indice dispari (cubiche, quinte...) sono crescenti su $\mathbb{R}$ e allora l'equazione o disequazione

$$\sqrt[dispari]{f(x)} \;{}_{qualunque\, segno\, di\, dis/uguaglianza}\; g(x)$$

si può affrontare semplicemente elevando ambo i membri all'indice (dispari) della radice (che così scompare). Allora si hanno queste 5 semplici equivalenze, che si ricavano subito appunto elevando a potenza conservando l'uguaglianza o l'ordinamento, e allora in definitiva non c'è niente da veramente "imparare a memoria":

$$\begin{array}{rclcl}
\sqrt[3]{f(x)} & = & g(x) \Leftrightarrow f(x) & = & g^3(x) \\
 & > & & > & \\
 & \geq & & \geq & \text{in tutte} \\
 & < & & < & \text{l'ordinamento} \\
 & \leq & & \leq & \text{si conserva}
\end{array}$$

e il 3 della radice può sostituirsi con ogni indice dispari.

• Il caso delle radici di indice pari (radici quadrate, quarte...) è meno semplice perché sono definite solo sui numeri non negativi.

Per le equazioni valgono queste formule di riduzione

$$\sqrt{f(x)} = a > 0 \Leftrightarrow f(x) = a^2$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Per le disequazioni valgono queste formule di riduzione

$$\boxed{\sqrt{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^2 \; se \; a > 0, similmente \;\; \geq} \tag{9}$$

$$\boxed{\sqrt{f(x)} < a \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < a^2 \; se \; a > 0, similmente \;\; \leq} \tag{10}$$

e altre formule che non tratteremo.([54])

[54]Per il lettore interessato ecco altre formule limitatamente alla radice quadrata. Prima di tutto il caso che diremo **"radice minore"**

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \;\; \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Esempio$_\mu$ Useremo la Formula di Mosteller per l'area della superficie corporea, in questa versione:

$$area \approx \frac{\sqrt{altezza_m \times peso_{kg}}}{6}$$

Considerato un soggetto per un certo tempo, in cui possiamo ritenere costante la sua altezza, sia essa h, può ben variare il suo peso, sia esso x.
Per quel soggetto abbiamo allora una funzione

$$area(x) = \frac{1}{6}\sqrt{h \cdot x}$$

essendo h l'altezza (in metri, costante),

x il peso (in chilogrammi),

$area(x)$ l'area della superficie corporea (in metri quadrati).
Per quali pesi la superficie corporea sarebbe minore di 2 metri quadrati in questo modello?

Abbiamo la disequazione

$$\frac{1}{6}\sqrt{h \cdot x} < 2 \quad \Big/ \cdot 6 > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)}$$

$$\sqrt{h \cdot x} < 12$$

Poi il caso **"radice minore o uguale"**, similissimo a quello "radice minore":

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g^2(x) \end{cases}$$

e poi 2 casi (similissimi) **"radice maggiore"** e **"radice maggiore o uguale"**:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$$

Esercizio 1$_\mu$ $\sqrt{x^2 - 9} \ge x - 1$.

Esercizio 2$_\mu$ $x > \pi + \sqrt{x^2 - 10}$.

che risolviamo come in (10)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h \cdot x \geq 0 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \\ \\ h \cdot x < 12^2 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{(ovvio, è un'altezza)} \\ \\ x < \frac{144}{h} \end{cases}$$

$$\big(0 \leq\big)\, x < \frac{144}{h}$$

Per esempio con un'altezza di 1.71 m, $x < 84.2$. (Sotto gli 84 kg, circa).
Per esempio con un'altezza di 1.82 m, $x < 79.1$. (Sotto i 79 kg, circa).

13.5 Una funzione algebrica con grafico sigmoide

Definiamo funzione sigmoide o sigmoidea, in via semplificata, una funzione crescente, prima con la concavità verso l'alto e poi verso il basso. Non è una definizione standard.
Il suo grafico lo chiameremo curva sigmoide o sigmoidea.

Le funzioni sigmoidi sono semplici modelli per innumerevoli fenomeni delle Scienze Applicate, e in particolare per il numero cumulativo di morti, o di casi, di un'ondata epidemica.

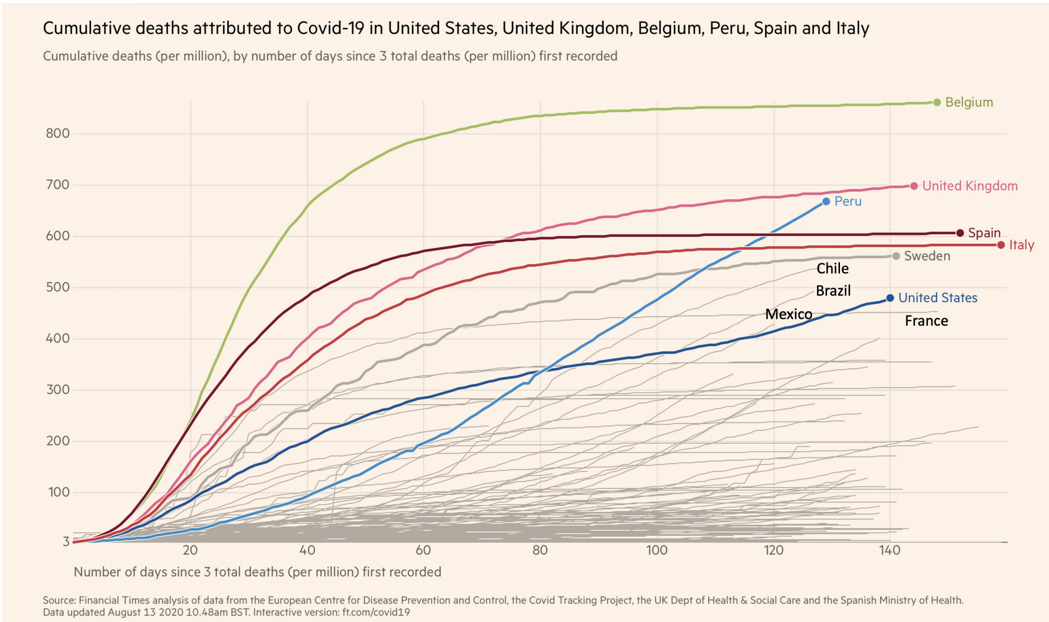


Figure 13: Numero cumulativo di decessi della pandemia del 2020 verso la metà di agosto 2020, in alcuni stati. (Lo 0 temporale è diverso stato per stato, cioè, per esempio, il giorno 100 dell'epidemia non avviene lo stesso giorno nei vari stati, perchè dipende da quando l'epidemia è iniziata in ogni singolo stato).

Abbiamo già visto una funzione sigmoidea, l'arcotangente.

Adesso ne vediamo un'altra,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

e quest'altra sua correlata

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

che cresce da 0 a 1. Essa potrebbe per esempio rappresentare, al variare del tempo x con una qualche unità di misura temporale, il numero cumulativo di morti di covid per mille abitanti, in una regione geografica, in una singola ondata pandemica. (Con ondate successive, la curva si complica).
(Il Belgio nell'agosto 2020 aveva circa 0.9 morti per mille abitanti, in crescita, ormai lieve, come si vede nella figura).

Figure 14: Arcotangente (blu), $f(x)$ (magenta), $g(x)$ (nero)

ESERCIZI SULLA LEZIONE 13

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
Si risolva la seguente disequazione:

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8}$$

SVOLGIMENTO
Essendoci una radice quadrata, cercheremo di ricondurci al caso "radice maggiore" oppure al caso "radice minore", e in effetti in questo caso

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8} \quad \Big/ + (-\mathrm{e})$$

$$x - \mathrm{e} > \sqrt{x^2 - 8}$$

$$\sqrt{x^2 - 8} < x - \mathrm{e}$$

proprio al caso "radice minore", e allora la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ x - \mathrm{e} > 0 \\ x^2 - 8 < (x - \mathrm{e})^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{8} \vee x \geq \sqrt{8} \\ x > \mathrm{e} \\ x^2 - 8 < x^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -2\sqrt{2} \vee x \geq 2\sqrt{2} \approx 2.82 \\ x > \mathrm{e} \approx 2.718 \text{ che sappiamo a memoria} \\ 2\,\mathrm{e}\,x < \mathrm{e}^2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \approx 2.831 \text{ con la calcolatrice dal soprastante} \end{cases}$$

e mettendo in ordine crescente i capisaldi (ovvero valori delimitanti) trovati

$$\ldots\ldots\ldots -2\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \mathrm{e} \ldots\ldots\ldots 2\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \ldots\ldots\ldots$$

```
..............|.............|.............|...............|.............        schema d'intersezione
~~~~~ – – – – – – –– ~~~~~~~~~~~
– – – – – – –– ~~~~~~~~~~~~~~~~          ∩
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ – – ––
```

otteniamo il soprastante schema d'intersezione che ci dà la soluzione

$$\boxed{2\sqrt{2} \leq x < \frac{e^2+8}{2e}}$$

14 Esponenziali e logaritmi – I parte

14.1 Vecchie funzioni potenza e nuove esponenziali

Già sappiamo il significato della

$$\text{potenza} \quad 2^3 \quad \text{e in generale } b^a$$

di base $b > 0$ ed esponente $a \in \mathbb{R}$

(Se $a > 0$ allora esiste anche per $b = 0$ e vale 0).

Notoriamente, se "liberiamo" la base abbiamo le **funzioni potenza**

$$x^a \qquad \text{per esempio } x^2,\ x^3,\ x^{10},\ x^{\frac{1}{2}}$$

Ma se "liberiamo" l'esponente abbiamo le **funzioni esponenziali**

$$b^x \qquad \text{per esempio } 2^x,\ 3^x, 10^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

di base 2, di base 3, eccetera;
e questa funzione è caratterizzata da

- *"al crescere di 1 della x la b^x si moltiplica per b"*
- *"al diminuire di 1 della x la b^x si divide per b"*

per esempio al crescere di 1 della x la 2^x raddoppia, e la 10^x decuplica.

Le funzioni esponenziali modellizzano un'infinità di processi delle Scienze Applicate, con crescenza sempre più rapida se la base è $b > 1$, e decrescenza verso 0 se $0 < b < 1$.

Si noti che, in buona sostanza, esiste "solo una" funzione esponenziale, e tutte le altre si ottengono riscalando l'argomento. Per esempio la funzione 3^t, essendo t un tempo in mesi, dà esattamente gli stessi valori della funzione 9^t con t misurato in bimestri: la prima al mese 4 vale 81 come la seconda al bimestre 2, che è lo stesso tempo nella realtà sensibile.

Le **basi** più significative sono queste 4, e vediamo alcuni esempi:

•2: la 2^x dà il num. di sottoinsiemi di un insieme di x elementi;
•10: per la notazione scientifica dei numeri, $x \cdot 10^n$, con n intero;
•φ: la $\frac{\varphi^x}{\sqrt{5}}$ approssima per intero $x \gg 0$ la successione di Fibonacci,

$$\text{e } \varphi \text{ è la } \textit{sezione aurea, } \varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618; \tag{11}$$

•e: e^x è la **funzione esponenziale** – senza dire “di base e” – ed

e è il numero di Nepero o Eulero, in inglese Euler’s number, la “somma infinita” (serie) dei reciproci dei fattoriali dei numeri naturali.

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \approx \mathbf{2.718}^{(55)}$$

Altre notazioni:

e^x si denota $\exp x$ o meglio $\exp(x)$.

Raramente, e in questo testo mai, si scrive anche

$$\exp_b a \text{ per intendere } b^a.$$

[55] **Mnemonici per le cifre di e.**
Associando ordinatamente ad ogni parola di questa frase

> *“La loquela è vincente* ← 2, 7, 1, 8
> *ma talvolta è migliore il silenzio,* ← 2, 8, 1, 8, 2, 8
> *come disse Aristocle.”* ← 4, 5, 9

i numeri delle lunghezze delle parole, si ottengono le prime cifre significative di e: 2, 7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, 9.
Fra le molte molte frasi analoghe, una famosa con le stesse cifre è

> *“Ai modesti o vanitosi*
> *ai violenti o timorosi*
> *do, cantando gaio ritmo,*
> *logaritmo.”*

14.2 La logistica e le funzioni sigmoidee

Un'altra questione interessante è quella della logistica standard

$$f(t) := \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$$

un'altra funzione sigmoide ovvero con grafico una curva sigmoide. È correlata allo sviluppo di una popolazione (animale, microbica...) quando si consideri che, ad un certo punto – e a differenza di quel che si considera nel modello ultra-semplificato della successione di Fibonacci – i vari organismi iniziano ad ostacolarsi a vicenda.
Si calcolino i suoi valori in -2, -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, e si disegni un grafico approssimativo.
Si veda il grafico su Wikipedia.

Ricordiamo che questo le curve sigmoidee hanno un'ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate e in Calcolo delle Probabilità.

14.3 Logaritmi

La funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b e la vedremo bene nella prossima lezione.

Per intanto si noti che tutti gli esponenziali in 0 valgono 1, e allora tutti i logaritmi in 1 valgono 0.
Si disegnino i grafici degli esponenziali e simmetricamente – rispetto alla bisettrice del I e III quadrante – dei logaritmi, fissando le basi 2 e poi 10.

La funzione logaritmo in base 10 è caratterizzata da
"al decuplicare della x il $\log_{10} x$ cresce di 1"
e similmente

- al raddoppiare della x il $\log_2 x$ cresce di 1
- al dimezzare della x il $\log_2 x$ decresce di 1.

Cresce pianissimo! *("Striscia come un logaritmo")*.

14.4 Logaritmi in Farmacia e nelle Scienze Applicate

I logaritmi hanno una ricorrenza enorme nelle Scienze Applicate.

Per la Farmacia la principale ricorrenza dei logaritmi si ha in Chimica perché il logaritmo serve a definire il pH, e così rientra in numerosi calcoli. E qualcosa di questo argomento vedremo.

Anche il decibel usato nella misurazione dell'udito è connesso ai logaritmi.
E pure la clearance dei farmaci.

La curva di Preston

L'aspettativa di vita alla nascita è uno dei principali indicatori di sviluppo di uno stato (correlato anche a Medicina e Farmacia) insieme alla mortalità infantile (a un anno, e in subordine a 5 anni) e al reddito pro-capite.
Il primo e l'ultimo di questi indicatori, y e x, appaiono da molto tempo correlati a livello mondiale da questo modello empirico:

$$y = 6.6354 \log_e x + 10.754 + error$$

con *error* positivo o negativo ma di solito non grande, il cui grafico – tolto l'*error* – si chiama *curva di Preston*. Ecco la curva e lo scatterplot.

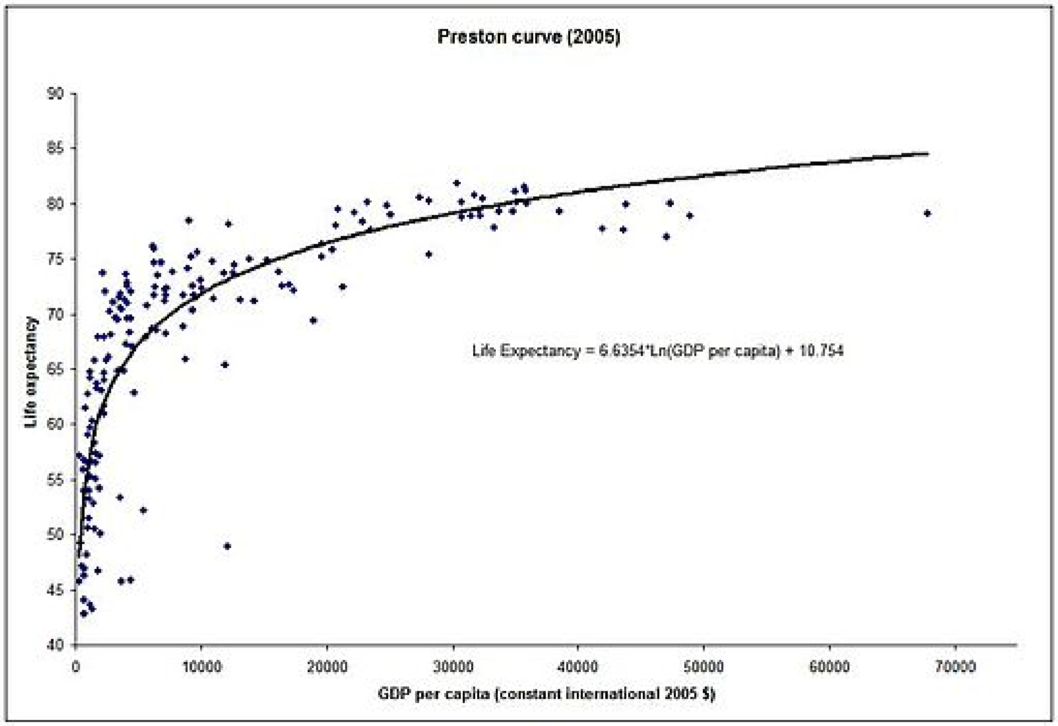


Figure 15: Curva di Preston. Da Wikimedia Commons.

ESERCIZIO$_{\mu}$ $\approx$ Risolvere l'equazione $x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1$.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale).

Dividiamo ambo i membri per uno stesso numero diverso da 0 (essendo il valore di un esponenziale)

$$x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1 \qquad \Big/ : \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \neq 0$$

$$x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}} =$$

che è già la soluzione esatta (seppure non bene espressa) e poi per le proprietà delle potenze

$$x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} =$$

e già abbiamo la soluzione esatta ed espressa bene, che ora approssimeremo; per le proprietà delle potenze

$$= \left(\mathrm{e}^{3}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

per le proprietà delle potenze e delle radici

$$= \sqrt{\mathrm{e}^{3}} = \sqrt{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}} \approx$$

ricordando il valore approssimato di e, e poi con la calcolatrice

$$\approx \sqrt{2.718 \cdot 2.718 \cdot 2.718} \approx \sqrt{20.079} \approx$$

$$\boxed{\approx 4.481}$$

ma senza voler azzardare tanti decimali (comunque giusti, come si può veri- ficare con una buona calcolatrice o col computer) diciamo con maggior sicurezza, e comunque buona accuratezza,

$$\boxed{4.48}$$

15 Esponenziali e logaritmi – II parte

In tutta questa lezione col simbolo LOG intenderemo un logaritmo in qualunque base.
E ovviamente in una formula in cui compaiono più LOG è da intendersi che sono tutti in una stessa base.

15.1 Logaritmi naturali e decimali; esponenziale

Come abbiamo anticipato, la funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b.
Facciamo un passo indietro, verso l'algebra.
Per introdurre i logaritmi algebricamente, possiamo vedere

$$\log_2 8 = 3 \qquad \text{come una } \textit{scrittura alternativa} \text{ di} \qquad 2^3 = 8.$$

Il logaritmo in base b di x è l'esponente da dar a b per aver x.

(Ma) dev'essere $x > 0$, e $0 < b \neq 1$. Ecco due esempi:

$$\log_2 8 = 3 \Leftarrow 2^3 = 8 \qquad \log_{10} 100 = 2 \Leftarrow 10^2 = 100.$$

Considereremo quasi solo 2 basi: di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi usato in Chimica,

il *logaritmo decimale*, in base 10,

$$\lg x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_{10} x \qquad \text{(ma purtroppo anche } \log x\text{)},$$

e il *logaritmo naturale*, in base e,

$$\ln x \qquad \textit{oppure} \;\; \log_e x \qquad \text{(ma purtroppo anche } \log x\text{)}.$$

Insomma la scrittura log x è ambigua e può riferirsi a logaritmi in base e in base 10, e anche in altre basi. ☹

La base 10 è stata di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi è usata in Chimica.
La base e è oggi preferita in Matematica e Fisica.

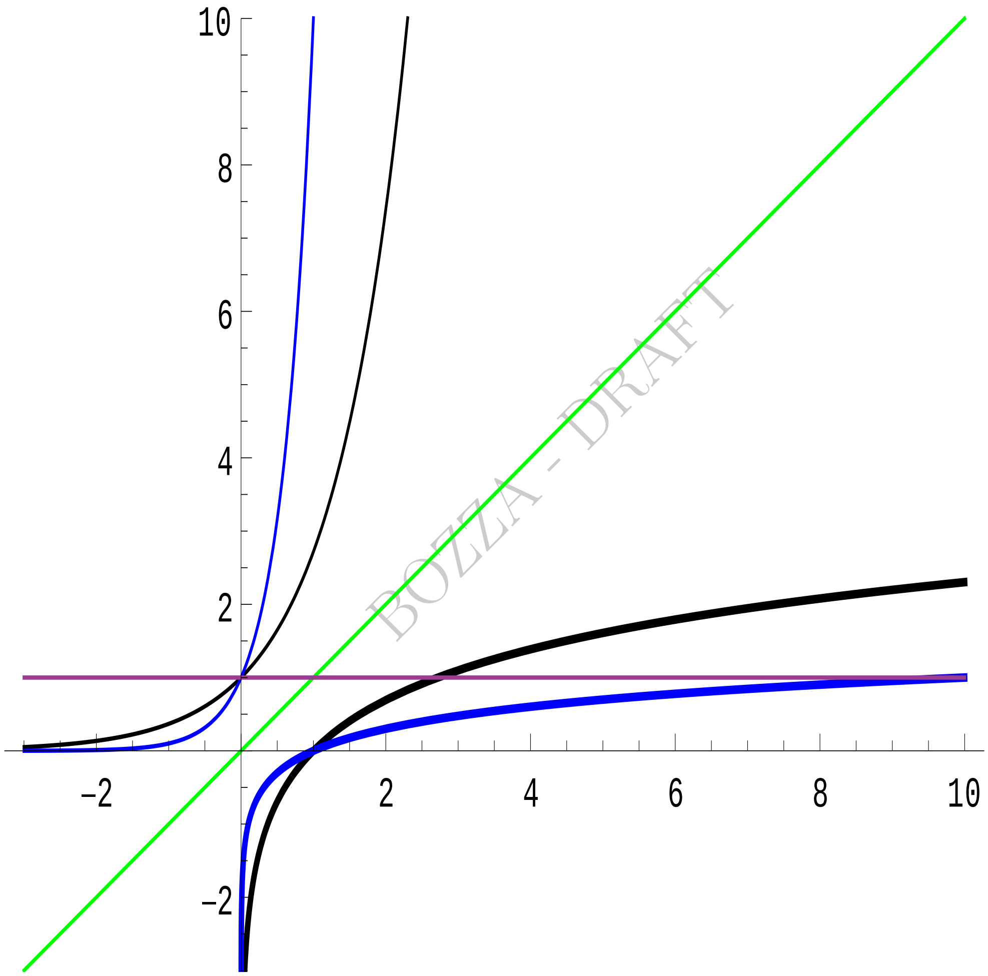


Figure 16: $\log_e x$ (**nero**), e^x (nero), $\log_{10} x$ (**blu**), 10^x (blu)

Ecco due valori che ci proponiamo di imparare a memoria:

$$\lg 2 \approx \mathbf{0.3} \quad (12)$$
[56]

$$\lg e \approx \mathbf{0.4343} \quad (13)$$

[56] O meglio ≈ 0.301. Il numero 0.3 ha errore (percentuale rispetto l'esatto) <0.5%.

Tutti i logaritmi in 1 valgono 0. I logaritmi in base $b > 1$ sono funzioni crescenti ("verso $+\infty$"), e in base $0 < b < 1$ decrescenti ("verso $-\infty$"). In ogni caso il crescere in valore assoluto avviene con straordinaria lentezza, per esempio $\log_{10} 1000 = 3$. I limiti in 0 sono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. In ogni caso è $\log_b : I\!R^+ \to I\!R$. (Per ogni possibile base b) il logaritmo in base b è una funzione biiettiva, e la sua inversa è la funzione esponenziale in base b, cioè b^x.
L'inversa del logaritmo naturale è la *funzione esponenziale*, ed è definita su tutto $\mathbb{R}$, cioè $\exp : I\!R \to I\!R$:

$$\exp = \ln^{-1} \qquad\qquad \ln = \exp^{-1},$$

ed è la funzione esponenziale di base e:

$$\exp x = \mathrm{e}^x.$$

Questi $^{-1}$ denotano l'inversa, assolutamente non il reciproco.

(L'inversa di $\ln x$ come detto è $\exp x$, la reciproca di $\ln x$ è $\frac{1}{\ln x}$, una funzione completamente diversa, neanche definita per $x < 0$).

L'esponenziale in 0 vale 1, ed è crescente "verso $+\infty$" con grande rapidità, per esempio, $\exp(20)$ è più o meno mezzo miliardo.

15.2 L'esponenziale in Farmacia

L'esponenziale ha una ricorrenza enorme nelle Scienze Applicate; però non particolarmente in Farmacia.

L'esponenziale modellizza bene sia la fase iniziale di un'epidemia, che la fase iniziale dell'espansione di una popolazione microbica in coltura. La successione di Fibonacci, che sostanzialmente è ben approssimata da $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^n$ che è una funzione esponenziale, è un buon modello:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

Un buon modello dello sviluppo successivo è la logistica, definita pur essa con l'esponenziale.

Ecco un'equazione classica della Farmacia, e precisamente della Farmacocinetica, che coinvolge l'esponenziale:

$$C = \frac{\dot{m}}{K} + \left(C_o - \frac{\dot{m}}{K}\right) e^{-\frac{K \cdot t}{V}}$$ [57]

In tutta questa lezione col simbolo LOG intenderemo un logaritmo in qualunque base.

E ovviamente in una formula in cui compaiono più LOG è da intendersi che sono tutti in una stessa base.

15.3 Prima proprietà del logaritmo

"Trasforma prodotti in somme":

$$\boxed{\mathrm{LOG}(x \cdot y) = \mathrm{LOG}(x) + \mathrm{LOG}(y)} \tag{14}$$

che è la proprietà fondamentale dei logaritmi.

Per esempio

$\lg 2000 =$

$\lg(2 \cdot 1000) =$

$= \lg 2 + \lg 1000 \approx 0.3 + 3 = 3.3.$

Un valore più preciso è 3.301.

Con l'estrema lentezza della crescita del logaritmo, il logaritmo decimale di 2020 non si allontana molto: si trova infatti ≈ 2.305.

[57] https://en.wikipedia.org/wiki/Clearance_(pharmacology)

15.4 Seconda e terza proprietà del logaritmo

"Trasforma divisioni in sottrazioni":

$$\boxed{\mathrm{LOG}(x/y) = \mathrm{LOG}(x) - \mathrm{LOG}(y)} \tag{15}$$

In particolare $\mathrm{LOG}(1/y) = \mathrm{LOG}(1) - \mathrm{LOG}(y) = 0 - \mathrm{LOG}(y)$ cioè

"Trasforma il passaggio al reciproco nel passaggio all'opposto":

$$\boxed{\mathrm{LOG}\left(\frac{1}{y}\right) = -\mathrm{LOG}(y)} \tag{16}$$

Per esempio in Spettroscopia, l'*assorbanza* è[58] l'opposto del logaritmo decimale della *trasmittanza*, ovvero il logaritmo decimale del suo reciproco:

$$\alpha = -\lg \tau = \lg \frac{1}{\tau}$$

15.5 Quarta proprietà del logaritmo

"Trasforma l'estrazione di radice n-esima nel dividere per n":

$$\boxed{\mathrm{LOG}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\mathrm{LOG}(x)} \tag{17}$$

In particolare

"Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento":

$$\boxed{\mathrm{LOG}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\mathrm{LOG}(x)} \tag{18}$$

Per esempio

$$\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2} \lg 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$$

Osservando che $\sqrt{10} \approx 3.16 \approx \pi$ troviamo

$$\lg \pi \approx 0.5$$

e con la calcolatrice scientifica troviamo infatti ≈ 0.497.

[58] Si veda Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Trasmittanza*

15.6 Quinta proprietà del logaritmo

Logaritmo della potenza.

“Tira giù gli esponenti”

$$\boxed{\mathrm{LOG}(x^{\alpha}) = \alpha\,\mathrm{LOG}(x)} \tag{19}$$

per ogni α e x per cui ha senso[59] la scrittura, e da quest'ultima discendono alcune delle precedenti proprietà, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{n}$ e poi $\frac{1}{2}$.

Da quell'uguaglianza, con facili argomentazioni che comunque non facciamo, si trova,

$$\mathrm{LOG}(x^2) = 2\,\mathrm{LOG}(|x|)$$

e più in generale per n intero

$$\boxed{\mathrm{LOG}(x^{2\,n}) = 2\,n\,\mathrm{LOG}(|x|)} \tag{20}$$

Naturalmente anche senza valore assoluto le ultime 2 formule sono vere, ma col valore assoluto valgono anche per $x < 0$.

Come esempio della proprietà del logaritmo della potenza, considerando 1024 vicino a 1000 i loro logaritmi decimali saranno simili:

$$\lg 1024 \approx \lg 1000$$

$$\lg 2^{10} \approx \lg 10^3$$

$$10\,\lg 2 \approx 3$$

$$\lg 2 \approx \frac{3}{10}$$

che spiega l'approssimazione $\lg 2 \approx 0.3$ che ci siamo proposti di imparare a memoria.

Trascriviamo ora per esteso le precedenti proprietà dei logaritmi, con riferimento alle varie basi.

Come già detto

[59] Precisamente: $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}, \forall\,x > 0$.

"Trasforma prodotti in somme":
formule per il *logaritmo del prodotto* ed *esponenziale della somma*)

$$\lg(x\,y) = \lg x + \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$$

$$\ln(x\,y) = \ln x + \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$$

$$\log_b(x\,y) = \log_b x + \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

Come già detto
"Trasforma divisioni in sottrazioni":
(formule per il *logaritmo del quoziente* ed *esponenziale della differenza*)

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad 10^{x-y} = 10^x/10^y$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/e^y$$

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad b^{x-y} = b^x/b^y\ .$$

Come già detto
"Tira giù gli esponenti":
(formule per il *logaritmo della potenza*)

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \lg x^\alpha = \alpha\ \lg x$$

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \ln x^\alpha = \alpha\ \ln x$$

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \log_b x^\alpha = \alpha\ \log_b x$$

e da quest'ultima discendono tutte le successive proprietà di questo paragrafo, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{n}$.
E per esponenti pari anche

$$(\forall\, n \in \mathbb{Z})(\forall\, x \neq 0)\ \lg x^{2\,n} = 2\,n\ \lg |x|$$

$$(\forall\, n \in \mathbb{Z})(\forall\, x \neq 0)\ \ln x^{2\,n} = 2\,n\ \ln |x|$$

$$(\forall\, n \in \mathbb{Z})(\forall\, x \neq 0)\ \log_b x^{2\,n} = 2\,n\ \log_b |x|$$

Come già detto

"Trasforma il passaggio al reciproco nel passaggio all'opposto:"

$$\lg \frac{1}{x} = -\lg x$$
$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$
$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x$$

Come già detto

"Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento:"

$$\lg \sqrt{x} = \frac{1}{2} \lg x$$
$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$
$$\log_b \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_b x$$

e questo si estende alle radici di qualunque indice:

$$\lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x$$
$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$
$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x \,.$$

Esercizio$_{\mu 2021}$ ≈
Risolvere l'equazione

$$\lg \mathrm{e}^{2x} = 8$$

SVOLGIMENTO

$$\lg \mathrm{e}^{2x} = 8$$
$$2\,x \,\lg \mathrm{e} = 8 \quad \Big/ : 2 \,\lg \mathrm{e}$$
$$\Rightarrow x = \frac{8}{2\,\lg \mathrm{e}} \approx \frac{8}{2 \cdot 0.4343} \approx$$
$$\boxed{\approx 9.21}$$

Errori tipici. Questa già vista è vera ogni volta che ha senso

$$\mathrm{LOG}(x \cdot y) = \mathrm{LOG}(x) + \mathrm{LOG}(y)$$

ma in generale la sequenza · + della formula non si può sostituire con

+ ·

· ·

+ +.

Detto altrimenti

$$\mathrm{LOG}(x \cdot y) \equiv \mathrm{LOG}(x) + \mathrm{LOG}(y)$$

è un'identità, cioè un'uguaglianza sempre vera, invece per esempio

$$\mathrm{LOG}(x + y) =^{EQ} \mathrm{LOG}(x) + \mathrm{LOG}(y)$$

è un'equazione, vera solo per particolari valori (x, y), per esempio $(2, 2)$:

$$\mathrm{LOG}(2+2) = \mathrm{LOG}(4) = \mathrm{LOG}(2^2) = 2\,\mathrm{LOG}(2) = \mathrm{LOG}(2) + \mathrm{LOG}(2).$$

Ma non succede certo con $(3, 3)$ o $(2, 3)$ o $(3, 2)$.

Ripetiamo la formulazione giusta:
logaritmo del prodotto = somma dei logaritmi.

15.7 Esempio di uso del logaritmo: il pH.

Il pH è una complessa questione chimica, per la quale si rinvia comunque ai testi specialistici. Qua vogliamo illustrarne qualche proprietà matematica.
Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce pH:

> pH is defined as the decimal logarithm of the reciprocal of the hydrogen ion activity, a_{H+}, in a solution

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}(a_{H+}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right)$$

Se il pH diminuisce di 1 questo equivale al decuplicare di a_H+:

$$pH - 1 = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) - 1 =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + (-1) =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + \log_{10}\frac{1}{10} =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}} \cdot \frac{1}{10}\right) =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{10\, a_{H+}}\right)$$

Così il suo diminuire di 2 corrisponde al centuplicare di a_{H+}.

Esempi con le proprietà 1, 2 e 4 del logaritmo decimale.

$\lg 4 = \lg(2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 = 0.6$

$\lg 8 = \lg(2 \cdot 2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 + 0.3 = 0.9$

$\lg 5 = \lg(10/2) = \lg 10 - \lg 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$

$\lg 7 = \lg \sqrt{49} = \frac{1}{2} \lg 49 \approx$
sostituiamo approssimatamente 49 con 50
$\approx \frac{1}{2} \lg 50 = \frac{1}{2} \lg(5 \cdot 10) = \frac{1}{2} (\lg 5 + \lg 10) \approx \frac{1}{2} (0.7 + 1) \approx 0.85$

(Ci mancano 3, 6 e 9, che vedremo; 1, 2 e 10, e ora 4, 5, 7, 8, li abbiamo: provate a disegnare un grafico e stimare così i 3 valori mancanti; poi verificherete le stime).

Esempio: calcolo del $\log_{10}(50\,000)/2$ dei prodotti omeopatici.
Leggiamo su Wikipedia (inglese)([60]) alla voce *Homeopathic dilutions*:

> Several potency scales are in use (...) If a dilution is designated as q on the Q scale, and c on the C scale, c/q=$\log_{10}$(50,000)/2

[60] https://en.wikipedia.org/wiki/Homeopathic_dilutions

cioè vale una sorta di formula di conversione fra scale

$$c = q \times \frac{\lg 50\,000}{2}$$

e ora vogliamo calcolare quel numero, col "nostro" $\lg 5 \approx 0.7$:

$$\frac{\lg 50\,000}{2} = \frac{\lg 5 \cdot 10^4}{2} = \frac{\lg 5 + \lg 10^4}{2} \approx \frac{0.7 + 4}{2} = 2.35$$

e infatti dice, e ora lo capiamo un po' meglio,

> A given dilution on the Q scale is roughly 2.35 times its designation on the C scale.

(La formula soprascritta c/q=$\log_{10}$(50,000)/2 si trova facilmente[61]).

Alcuni Autori e Produttori scrivono LM invece di Q (il significato inteso sarebbe 50 e 1000 in numeri romani, ma LM non significa 50 000 nei numeri romani). E alcuni purtroppo lm, minuscolo, con difficile interpretazione della elle minuscola iniziale (sul web dove si vendono tali prodotti, pare una i maiuscola).
La formula di conversione si riferisce solo alla *teorica* diluizione *in base al modello* usato, e darebbe per esempio l'equivalenza di 20 Q con 47 C ovvero CH, ma i due preparati sono stati ottenuti con procedura diversa e non vengono considerati equivalenti dal punto di vista terapeutico.

[61] La formula viene da

$$100 \cdot ...(c\,volte)... \cdot 100 = 50\,000 \cdot ...(q\,volte)... \cdot 50\,000$$

$$100^c = 50\,000^q$$

$$(10^2)^c = 50\,000^q$$

$$10^{2\,c} = 50\,000^q \quad \Big/ \lg$$

$$2\,c \lg 10 = q \lg 50\,000$$

$$2\,c = q \lg 50\,000 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2\,q}$$

$$\frac{c}{q} = \frac{\lg 50\,000}{2}$$

dove la prima equazione rappresenta le diluizioni centesimali che avanzano di 100 volte in 100 volte sulla scala C, e le diluizioni cinquantamillesimali che avanzano di 50 000 volte in 50 000 volte sulla scala Q.

15.8 Altre proprietà degli esponenziali e dei logaritmi

In questo paragrafo, b rappresenta qualunque numero reale che possa essere base di un logaritmo, cioè

$$b > 0 \wedge b \neq 1\,.$$

Un'attenta considerazione di quanto detto finora dà

$$(\forall x > 0, x \neq 1) \qquad \log_x x = 1$$

e queste 6:

"exp mangia log e log mangia exp"

$$\lg 10^x = x,\ \forall x \qquad 10^{\lg x} = x,\ \forall x > 0.$$

$$\ln \exp x = \ln \mathrm{e}^x = x,\ \forall x \qquad \exp \ln x = \mathrm{e}^{\ln x} = x,\ \forall x > 0$$

$$\log_b b^x = x,\ \forall x \qquad b^{\log_b x} = x,\ \forall x > 0.$$

Tutte le successive proprietà degli esponenziali ci sono già note dall'Algebra, e alcune proprieà dei logaritmi le abbiamo viste da poco; altre sono nuove.

I logaritmi in 1 valgono 0 e gli esponenziali in 0 valgono 1:

$$\lg 1 = 0 \qquad 10^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\log_b 1 = 0 \qquad b^0 = 1$$

Altri esempi con le proprietà del logaritmo decimale.

$\lg 3 = \lg \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \lg \sqrt[5]{243} \approx$
sostituiamo approssimatamente 243 con 250

$$\approx \lg \sqrt[5]{250} = \frac{1}{5} \lg 250 = \frac{1}{5} \lg \frac{1000}{4} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\lg 1\,000 - \lg 4\right) = \frac{3 - 0.6}{5} = 0.48$$

$\lg 6 = \lg(3 \cdot 2) = \lg 3 + \lg 2 \approx 0.48 + 0.3 = 0.78$

$\lg 9 = \lg(3 \cdot 3) = \lg 3 + \lg 3 \approx 0.48 + 0.48 \approx 0.96$ ☹
ma per eccesso di approssimazioni quest'ultimo fallisce sul secondo decimale, infatti troviamo con calcolatrice scientifica o WolframAlpha

$$\lg 9 \approx 0.95$$

Adesso abbiamo i logaritmi - in effetti approssimazioni in generale – dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; aggiungiamo

$\lg 0.1 = \lg \frac{1}{10} = -\lg 10 = -1$

e disegniamo un grafico!

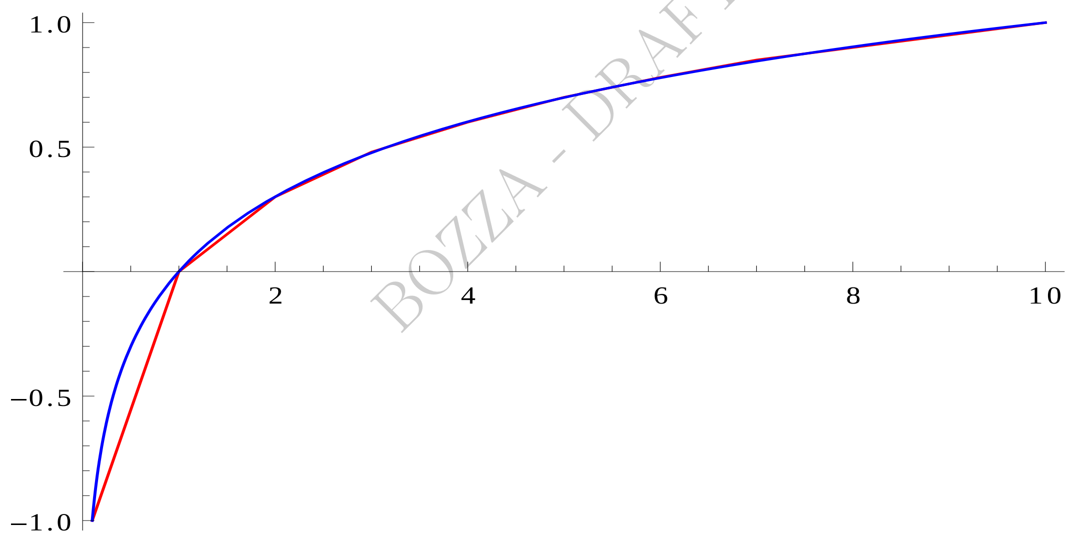


Figure 17: (blu) $\lg x$ e (rosso) interpolante lineare dei valori trovati

16 Esponenziali e logaritmi – III parte

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
Consideriamo il pH della Chimica:

$$-\log_{10} y$$

dove y viene spesso scritto $[H^+]$ e letto *"concentrazione degli H^+"*, ma tutto ciò richiederebbe precisazioni di Chimica di cui qua non ci occupiamo.
A cosa corrisponde la diminuzione di 0,5 nel pH? Con grossolana approssimazione, si esprima infine la soluzione a parole, come "circa dimezzare y" o "circa decuplicare y" o analoghi.

SVOLGIMENTO
(Si sta usando lo standard della virgola decimale).

$$-\log_{10} y - 0{,}5 =$$

ricordando che $x \equiv \log_b b^x$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} 10^{0{,}5} =$$

e osservando che $0{,}5 = \frac{1}{2}$ e ricordando che $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} \sqrt{10} =$$

per algebra delle parentesi

$$= -\Big(\log_{10} y + \log_{10} \sqrt{10}\Big) =$$

per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$= -\log_{10}\Big(y \cdot \sqrt{10}\Big)$$

cioè a dire, y viene moltiplicata per $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, e con grossolana approssimazione, come richiesto,

$$\boxed{\text{corrisponde a circa triplicare } y}$$

16.1 Formule di cambiamento di base

Formule di cambiamento di base:

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad (62)\ (63) \quad \text{in particolare} \quad = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln x}{\ln b}$$

[62] Anche $= (\log_c x) \cdot (\log_b c)$.
[63] Per il lettore interessato, si ricavano subito anche $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$, e $\log_{1/b} x = -\log_b x$.

da cui $\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}}$ e con la (13) si ottiene questa formula approssimata per la conversione fra logaritmi naturali e decimali

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$$

da cui reciprocamente

$$\boxed{\lg x \approx 0.4343 \ln x} \tag{21}$$

(cioè il logaritmo decimale è *vagamente* la metà del naturale(64) e con maggior precisione il 43% e ancor meglio 43.43%).

$$\left(\text{Le formule esatte sono:} \quad \ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \quad \lg x = (\lg \mathrm{e}) \ln x\right).$$

Esempio$_\mu$

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

costante spesso approssimata a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci, come leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Emivita (farmacologia)*:

> L'emivita ($t_{1/2}$) è un parametro farmacocinetico che indica il tempo richiesto per ridurre del 50% la concentrazione plasmatica di un farmaco (...) è inversamente proporzionale alla sua clearance (Cl) e direttamente proporzionale al suo volume di distribuzione (V_d) secondo la formula
>
> $$t_{1/2} = 0.7 \frac{V_d}{Cl}$$
>
> dove la costante 0,7 è in realtà un'approssimazione del logaritmo naturale di 2 (in effetti, più in particolare $ln(2) = 0,69...$).

Per curiosità elenchiamo(65) senza qua dare garanzie alcune emivite di farmaci:

noradrenalina 2 minuti
morfina 2-3 ore
donepezil 3 giorni (70 ore)
bedaquilina 165 giorni

e di questo elemento, che non è un farmaco:

cadmio nelle ossa 30 anni. (Pile ricaricabili, colori per artisti, eccetera).

[64] Entrambe le ultime 2 formule hanno circa $\frac{1}{79\,000}$ di errore relativo.
[65] https://en.wikipedia.org/wiki/Biological_half-life

16.2 Calcolo approssimato dei logaritmi

Dato un numero positivo x, lo si esprima in notazione scientifica

$$x = t \cdot 10^n \qquad 1 \le t < 10$$

e allora vale

$$\lg x = \lg t + n \qquad 1 \le t < 10 \tag{22}$$

e allora ci basta saper calcolare approssimatamente il logaritmo decimale dei numeri fra 1 e 10.

Per esempio

$$\lg 2021 = \lg(2.021 \cdot 10^3) = 3 + \lg 2.021$$

Calcolare i logaritmi decimali dei numeri fra 1 e 10

1) con questa formula

$$\lg t \approx \frac{\sqrt{\sqrt{t}} - 1}{\frac{\sqrt{\sqrt{t}}}{4} + 0.33} \qquad 1 \le t < 10 \qquad \mathit{errore}^{(66)} < 1\% \tag{23}$$

per esempio con la sezione aurea viene $\lg \varphi \approx 0.209$ (si verifichi)

2) con artifici come quelli usati per i logaritmi di 3, 4, 5...

3) con una calcolatrice scientifica reale

4) con un'app di calcolatrice scientifica virtuale sul telefonino

5) online con WolframAlpha con `Log[`*base*`,`*numero*`]`

6) con le tavole cartacee (non sono affatto obsolete, anzi sono utili perché mostrano i valori intorno ad uno cercato, cosa che la calcolatrice non fa)

7) con le *logarithm tables* in rete (come sopra)

8) con altre approssimazioni[67]

---

[66] Errore percentuale rispetto l'esatto.

[67] Un'approssimazione calcolabile con le sole 4 operazioni e la radice quadrata è

$$\log_{10} x \approx (x^{1/256} - 1) \times 111$$

che su una calcolatrice che operi con almeno 7 cifre (decimali) significative dovrebbe avere non più di 0.004 di errore relativo (cioè 0.4%) e assoluto per $1.1 \le x \le 11$. Naturalmente $x^{1/256}$, si ottiene estraendo 8 volte consecutive la radice quadrata. Per i numeri $y < 1.1$ o

9) con l'obsoleto *regolo calcolatore*. "gli astronauti (...) si servivano di regoli calcolatori (...) durante le missioni Apollo", da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Regolo calcolatore*.

Per i logaritmi in altre basi si può calcolare il logaritmo decimale con le stesse formule (22) e (23) e poi usare la formula di cambiamento di base $\log_b x = \dfrac{\lg x}{\lg b}$.

Esercizio$_{\mu 2019}$
Di quanto aumenta il pH se la concentrazione degli H^+ diminuisce del 45%?

Svolgimento.
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare quello della virgola decimale, a scelta).

Diminuire del 45% significa moltiplicare per 0.55:

$$\mathrm{pH}_{new} =$$

$$= \mathrm{pH}(y \cdot 0.55) = -\lg(y \cdot 0.55) = -\lg y - \lg 0.55 =$$

$$= \mathrm{pH}(y) - \lg(5.5 \cdot 10^{-1}) = \mathrm{pH}_{old} - (-1 + \lg 5.5) \approx$$

con la formula approssimata (23) di cui sopra

$$\approx \mathrm{pH}_{old} - (-1 + 0.745) = \mathrm{pH}_{old} - (-0.255) =$$

$$\approx \mathrm{pH}_{old} + 0.26$$

cioè

$$\boxed{\text{il pH aumenta di } \approx 0.26}$$

(Con la calcolatrice ≈ 0.259637).

$y > 11$, li si moltiplichi per un adeguato 10^m con $m \in \mathbb{Z}$ affinché l'ottenuto $y = 10^m x$ ricada in $[1.1, 11]$ e poi

$$\log_{10} y = \log_{10}(10^m x) = m + \log_{10} x$$

per esempio $\log_{10} 1265 = \log_{10} 1.265 + 3$.

16.3 Risoluzione pratica delle quazioni con exp e log

Nella pratica le equazioni con esponenziali e logaritmi si possono risolvere abbastanza meccanicamente applicando di passaggio in passaggio regole formali, purché le equazioni siano sufficientemente semplici.
Ne vedremo adesso 11.

Consideraiamo un'equazione

$$A = B$$

in cui almeno 1 delle espressioni A e B contiene l'incognita, che chiameremo x, e almeno 1 delle 2 espressioni contenga logaritmi o esponenziali.

(1) – ***Calcolo effettivo del logaritmo*** con la sua definizione: *l'esponente da dare alla base per avere l'argomento.* Per esempio

$$2\,x - \log_4 64 = 0$$

$$\Rightarrow 2\,x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

(2) – ***Passaggio al logaritmo*** in base 10 oppure e oppure altra base, di entrambi i membri dell'equazione Per esempio

$$10^x = 2 \quad \Big/ \lg$$

$$\Rightarrow x = \lg 2$$

(3) – ***Sostituzione approssimata di* lg2 *con 0,3***. Per esempio dal precedente risultato si ottiene

$$\Rightarrow x \approx 0{,}3 \quad (\mathit{standard\ della\ virgola\ decimale})$$

(4) – ***Sostituzione approssimata di* lg e *con 0,4343***. Per esempio

$$10^x = \mathrm{e}$$

$$x = \lg \mathrm{e} \approx 0{,}4343 \quad (\mathit{standard\ della\ virgola\ decimale})$$

(5) – ***Calcolo approssimato del logaritmo*** con uno dei metodi visti.
Adesso vedremo su un esempio alcuni altri possibili passaggi.

Consideriamo questa equazione:

$$2\,(x^2+1)\,\ln(2\,x)^2 + (x^2+1)\,\lg x^4 + x\,\ln\frac{1}{|x|} + \frac{2}{3}\,\ln|x|^x + x\,\ln\sqrt[3]{|x|} = 0 \qquad (24)$$

Ecco ora altri 6 possibili passaggi formali fattibili, da scegliere accuratamente.

(6) – ***Logaritmo di una radice***

$$2\,(x^2+1)\,\ln(2\,x)^2+(x^2+1)\,\lg x^4+x\,\ln\frac{1}{|x|}+\frac{2}{3}\,\ln|x|^x+x\cdot\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

(7) – ***Logaritmo del reciproco***[68]

$$2\,(x^2+1)\,\ln(2\,x)^2+(x^2+1)\,\lg x^4-x\,\ln|x|+\frac{2}{3}\,\ln|x|^x+x\cdot\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

(8) – ***"Tirare giù gli esponenti e se pari mettere il valore assoluto"***:

$$2\cdot(x^2+1)\cdot 2\cdot\ln|2\,x|+(x^2+1)\cdot 4\cdot\lg|x|-x\,\ln|x|+\frac{2}{3}\cdot x\,\ln|x|+x\cdot\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

e gli ultimi 3 addendi si elidono, e poi

$$4\,(x^2+1)\,\ln|2\,x|+4\,(x^2+1)\,\lg|x|=0\quad\Big/:(4\,(x^2+1))\neq 0\quad(\textit{passaggio algebrico})$$

$$\ln|2\,x|+\lg|x|=0\quad(\textit{segue un passaggio algebrico})$$
$$\ln(|2|\cdot|x|)+\lg|x|=0\quad(\textit{segue un passaggio algebrico})$$
$$\Rightarrow\ln(2\,|x|)+\lg|x|=0\tag{25}$$

(9) – ***Passare dalla base e a 10 o viceversa***, approssimatamente con la $\lg a\approx 0{,}4343\ln x$ o esattamente con la $\lg a=(lg\,\mathrm{e})\ln a$:

$$\Rightarrow\ln(2\,|x|)+(\lg e)\ln|x|=0\tag{26}$$

(10) – ***Logaritmo del prodotto o del quoziente***:

$$\Rightarrow\ln 2+\ln|x|+(\lg e)\ln|x|=0\tag{27}$$

$$\ln 2+\ln|x|+(\lg e)\ln|x|=0\quad\Big/+(-\ln 2)\quad(\textit{passaggio algebrico})$$

$$\ln|x|+(\lg e)\ln|x|=-\ln 2\quad(\textit{segue un passaggio algebrico})$$

$$(1+\lg e)\ln|x|=-\ln 2\quad\Big/:(1+\lg\mathrm{e})\neq 0\quad(\textit{passaggio algebrico})$$

---

[68]Si potrebbe dire il passaggio del logaritmo del reciproco, non è necessario perchè può essere sostituito dall'applicazione di (1) e (9):

$$\mathrm{LOG}\frac{1}{z}\overset{(9)}{=}\mathrm{LOG}(1)-\mathrm{LOG}(z)\overset{(1)}{=}0-\mathrm{LOG}(z)=-\mathrm{LOG}(z)$$

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1+\lg e} \tag{28}$$

(11) – ***Esponenziazione*** in base 10 oppure e oppure altra base:

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1+\lg e} \quad \Big/ \mathrm{e}\hat{} \qquad \text{(anche scrivibile } \Big/ \exp)$$

$$|x| = \exp\left(\frac{-\ln 2}{1+\lg e}\right) \quad (\textit{segue un passaggio algebrico})$$

$$\boxed{x = \pm\exp\left(\frac{-\ln 2}{1+\lg e}\right)}$$

Bottom line. Gli 11 passaggi visti sono sufficienti per risolvere moltissime equazioni, unitamente all'algebra, al calcolo delle 4 operazioni e della radice quadrata (a mano o con la calcoltarice o in altri modi), e alla sostituzione (coi loro valori approssimati) delle costanti conosciute (in forma approssimata) a memoria, come e, π, eccetera.

Ma si veda ancora il paragrafo seguente per una possibile problematica.

16.4 Soluzioni spurie ovvero fittizie

In qualche equazione coi logaritmi per così dire "capricciosa" può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2\,x) = 0$$

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2\,x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perchè lg non esiste per argomenti negativi.

Al livello di questa trattazione elementare non è possibile dare un metodo generale per evitare sempre e comunque le soluzioni fittizie; al limite estremo, in un'equazione particolarmente capricciosa anche la banale sostituzione di lg2 con l'approssimazione 0,3 potrebbe introdurre soluzioni fittizie, o di π con 3,14. Molta parte della problematica si può evitare verificando se le soluzioni trovate verificano l'equazione iniziale, ed eventualmente quindi escludendone qualcuna. Oppure – e può essere meno facile – trovando il dominio dell'equazione, ed escludendo le eventuali soluzioni al di fuori del dominio.

* Complementi *

16.5 Equazioni e disequazioni con exp e log – teoria

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \iff 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \iff e^{f(x)} = e^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \iff b^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 0,\ b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base b positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo se $b > 1$, che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \iff 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \iff e^{f(x)} > e^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \iff b^{f(x)} > b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 1$$

e tutte similmente con $<$, $\geq$, $\leq$.

Il logaritmo è iniettivo e definito per ogni numero positivo e allora

$$0 < f(x) = g(x) \iff \lg f(x) = \lg g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \iff \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \iff \log_b f(x) = \log_b g(x)$$

cioè si può applicare il logaritmo in qualunque base ad ambo i membri di un'equazione $f(x) = g(x)$ ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni, se $f(x) > 0$ nel suo dominio, oppure $g(x) > 0$ nel suo dominio (è equivalente), in particolare se una delle 2 funzioni è un esponenziale in qualche base eventualmente moltiplicato per una costante positiva, che è il caso più comune nella pratica.

Di più: il logaritmo decimale e quello naturale e ogni logaritmo in base $b > 1$ sono crescenti[69] e allora si può applicarli conservando l'ordinamento:

$$0 < f(x) \leq g(x) \iff \lg f(x) \leq \lg g(x) \quad \textit{e anche con} \ <$$

[69] Invece coi logaritmi in base minore di 1 si inverte l'ordinamento:

$$(\forall\, b,\ 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) < g(x) \iff \log f(x) > \log g(x)$$

$$0 < f(x) \le g(x) \;\Leftrightarrow\; \ln f(x) \le \ln g(x) \quad \textit{e anche con} \;\; <$$

$$\forall\, b > 1 \quad 0 < f(x) \le g(x) \;\Leftrightarrow\; \log_b f(x) \le \log_b g(x) \quad \textit{e anche con} \;\; <$$

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) \le g(x) \;\Leftrightarrow\; \log f(x) \ge \log g(x)\,.$$

ESERCIZI SULLA LEZIONE 14

ESERCIZIO$_\mu$ $\approx$
Risolvere

$$\lg \ln x^2 = 0$$

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

$$\lg \ln x^2 = 0 \quad \Big/ 10\hat{}$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$\ln x^2 = 10^0$$

$$\ln x^2 = 1 \quad \Big/ \exp$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$x^2 = \mathrm{e}$$

$$x = \pm\sqrt{\mathrm{e}}$$

e ricordando che e $\approx$ 2,718

$$\boxed{\approx \pm 1{,}649}$$

Nota 1. In qualche equazione coi logaritmi per così dire "capricciosa" può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2\,x) = 0$$

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2\,x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perchè lg non esiste per argomenti negativi. Ma i passaggi svolti per risolvere l'esercizio iniziale, $\lg \ln x^2 = 0$, sono di quelli "sicuri", che non introducono soluzioni spurie ovvero fittizie.

Nota 2. Non è una buona idea cercare di risolvere l'equazione con la proprietà del logaritmo della potenza

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\, \mathrm{LOG}(x^{\alpha}) = \alpha\, \mathrm{LOG}(x)$$

(ove LOG indica 2 volte 1 stesso logaritmo in qualunque base) perchè essa, come si vede scritto, vale per $x > 0$, e di fatto, incautamente applicandola in questo esercizio, fa perdere la soluzione negativa. (Per x negativo la formula $\mathrm{LOG}(x^{\alpha}) = \alpha\, \mathrm{LOG}(x)$ non ha senso).
Piuttosto, si potrebbe applicare la proprietà degli esponenti pari, aggiungendo il valore assoluto.

17 Esponenziali e logaritmi – IV parte

17.1 Rappresentazioni in scala logaritmica

Talvolta su un asse reale si rappresentano non i valori che vengono considerati bensì i loro logaritmi decimali, per favorire una chiara visione d'insieme quando molti valori siano piccoli e atri grandissimi, di interi ordini di grandezza più grandi. Per esempio se vogliamo rappresentare su un asse delle ascisse i valori

20 30 40 1 000 000

con l'usuale rappresentazione cartesiana i primi 3 punti risulteranno indistinguibili su un normale foglio A4 o su uno schermo di computer. (Sarebbero distinguibili su un foglio di dimensioni ciclopiche). Con la rappresentazione in scala logaritmica invece rappresenteremo i loro logaritmi decimali

$\approx 1.30 \quad \approx 1.48 \quad \approx 1.60 \quad 6$

ben distanziati e distinguibili con dimensioni ragionevoli della rappresentazione grafica.

La rappresentazione in scala logaritmica può essere applicata a 1 o 2 degli assi del piano cartesiano (ci sono 3 casi denominati lin-log, log-lin e log-log). Per esempio in questo diagramma (semplificato) delle fasi dell'acqua, la scala logaritmica è applicata ai valori della pressione sull'asse delle ordinate.

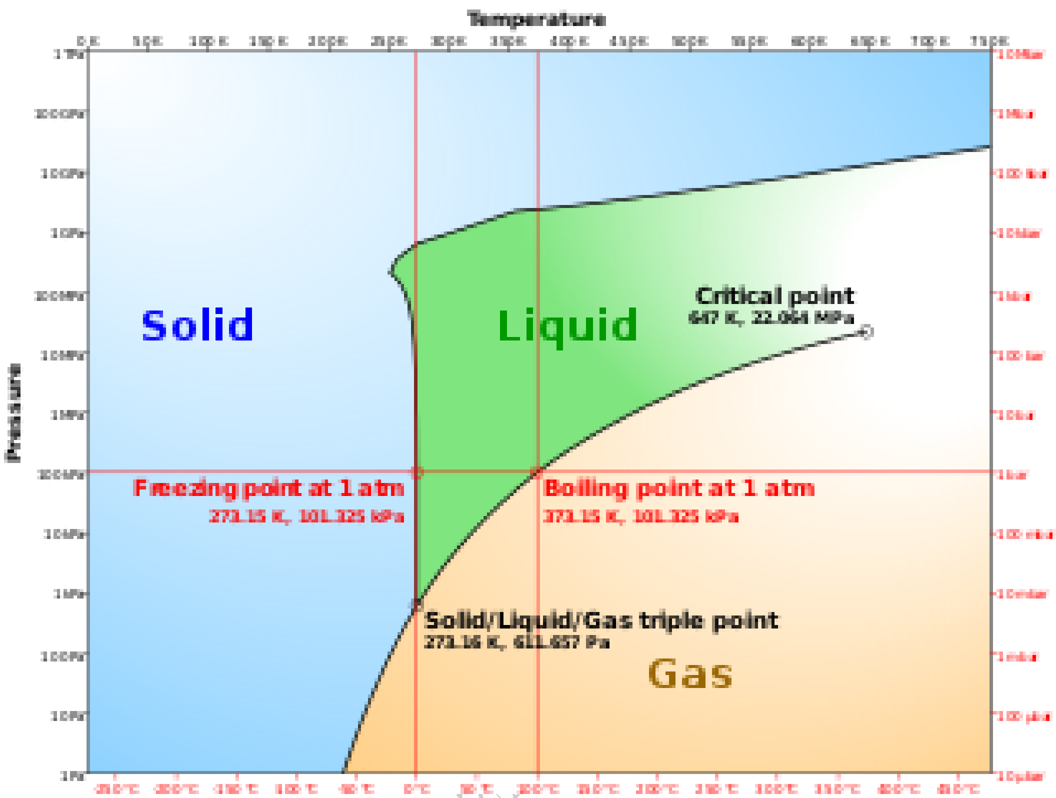


Figure 18: Diagramma di fase dell'acqua, semplificato. By Cmglee, in Wikimedia

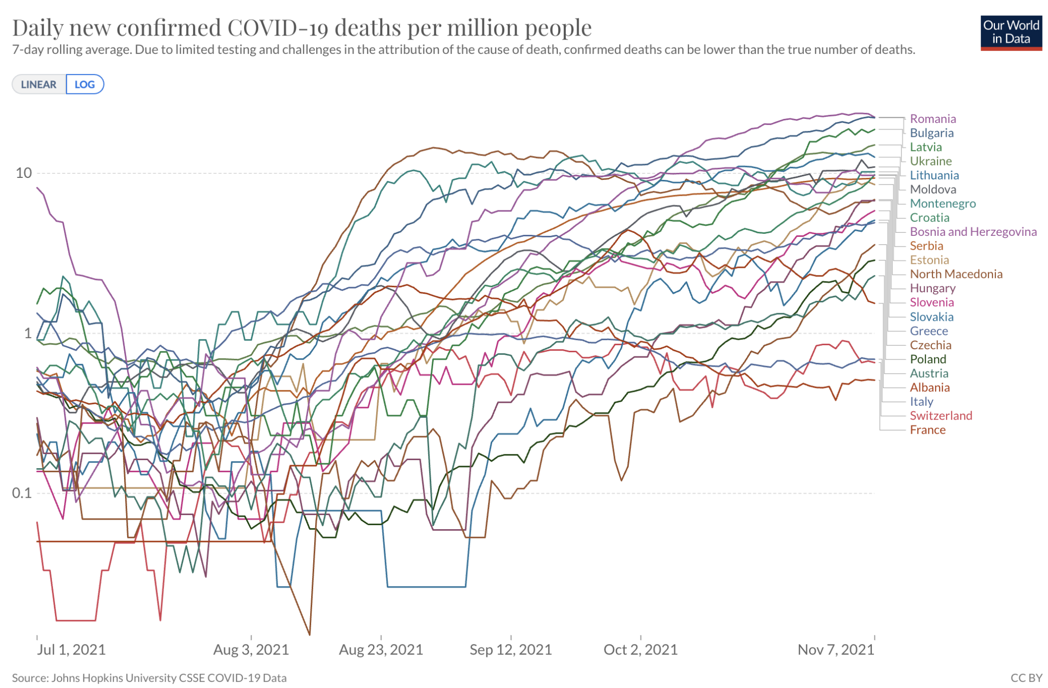


Figure 19: Decessi covid-19 giornalieri, media mobile a 7 giorni

Nota 1. Nella figura sono considerati tutti gli stati confinanti con l'Italia settentrionale (Francia, Svizzera, Austria, Slovenia) e in più quelli di una vastissima area, dal Friuli Venezia Giulia fino ai confini di Russia e Bielorussia.
In un normale diagramma cartesiano sarebbero praticamente indistinguibili i grafici di Italia, Francia e Svizzera, ben distinti nel log plot.
Questi 3 stati hanno mortalità covid giornaliera, all'inizio di novembre 2021, sotto l'1 per milione, gli altri stati considerati sopra 1 e alcuni di molto.
Nota 2. Come si verifica facilmente, i primi 3 stati considerati hanno avuto una drammatica prima ondata della pandemia nella primavera del 2020, mentre nessuno degli altri l'ha avuta, iniziando ad avere grandi numeri solo dopo l'estate 2020. Osserviamo poi che anche il Friuli Venezia-Giulia ha avuto una lieve prima ondata nella primavera 2020; e che esso è geograficamente più contiguo a quella vastissima regione dalla Slovenia ai confini russi e bielorussi sopra considerata, piuttosto che al resto dell'Italia; e ancora, che ciò è ancor più vero per la provincia di Trieste, che ha un piccolissimo confine col resto d'Italia.
Tutte questo ci induce a fare una cosa azzardata: una previsione. Sebbene, come disse un grande stratega militare, le previsioni a tre mesi valgono zero.

Previsione – 9 novembre 2021

Nel periodo novembre 2021 - marzo 2022 la pandemia colpirà molto di più il Friuli Venezia-Giulia e soprattutto Trieste che il resto d'Italia.

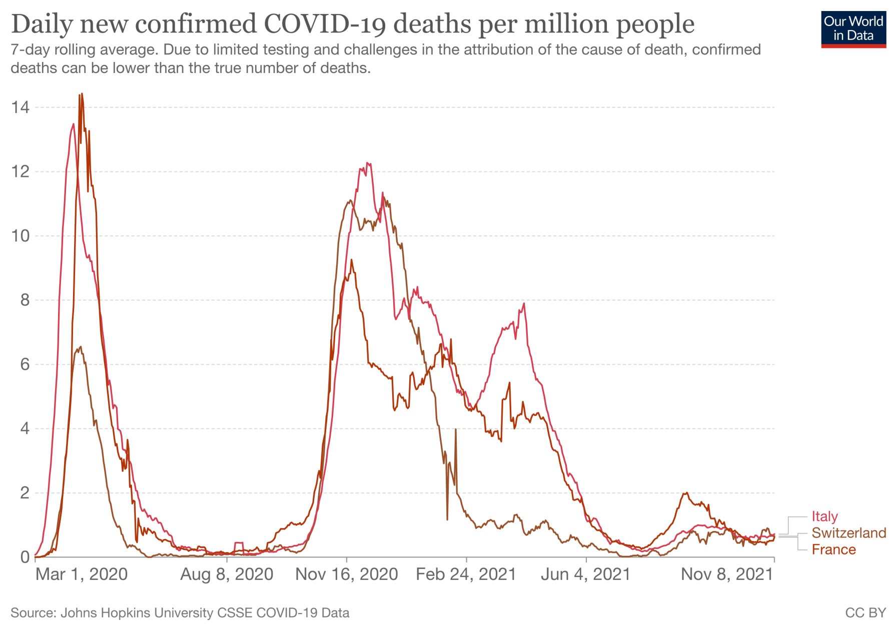


Figure 20: In Italia e sul suo confine nord-occidentale (Francia e Svizzera) c'è stata un'imponente prima ondata nella primavera 2020.

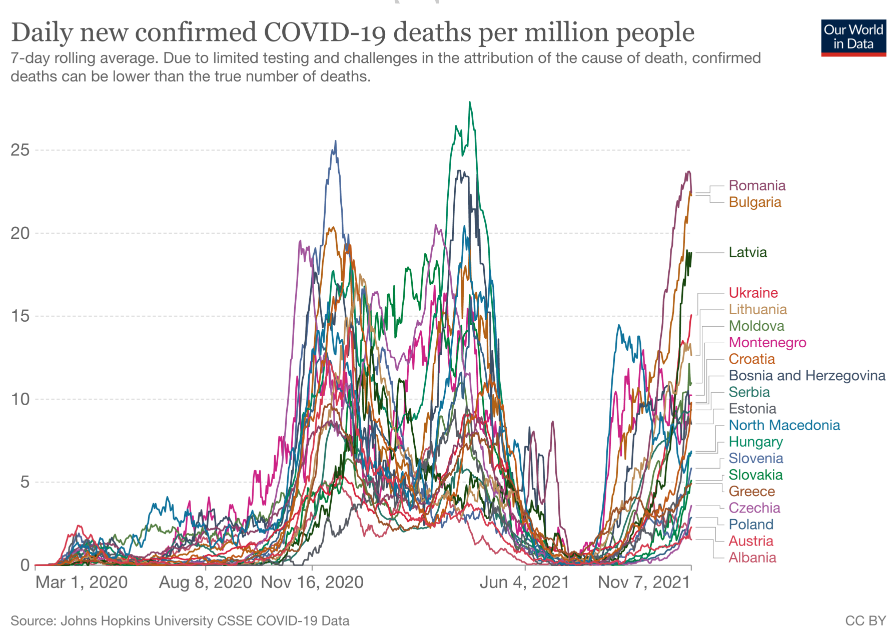


Figure 21: In Italia e sul suo confine nord-orientale (Austria e Slovenia) e fino ai confini di Russia e Bielorussia non c'è stata un'imponente prima ondata nella primavera 2020, ma si manifesta una nuova significativa ondata nel novembre 2021.

Aggiornamento della situazione all'inizio dicembre 2021

La previsione finora si realizza pienamente.

> "Per quanto riguarda l'incidenza dei nuovi casi per 100.000 abitanti, nell'ultima settimana Trieste segna ancora una volta il valore più alto tra le province italiane: 635. Gorizia, terza dopo Bolzano, registra 496, Udine 252, Pordenone 219. Secondo il monitoraggio della Fondazione, la popolazione che ha completato il ciclo vaccinale in Fvg è pari al 76% (media Italia 77,1%), a cui si aggiunge un ulteriore 2,2% (media Italia 2,6%) solo con prima dose; il tasso di copertura vaccinale con terza dose è del 21,6% (media Italia 31,8%)."
> (Il Piccolo, online, 2 dicembre 2021, https://ilpiccolo.gelocal.it/trieste/cronaca/2021/12/02/news/gimbe-trieste-resta-la-40986616)

17.2 Ordine di grandezza di un numero positivo

Come abbiamo già detto, ogni numero positivo x ammette una scrittura

$$x = a \cdot 10^n$$

con $1 \leq a < 10$ e n intero: ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...
Adesso aggiungiamo che n si chiama **ordine di grandezza** di x e che

$$n = \lfloor \lg x \rfloor$$

cioè

$$\textit{ordine di grandezza di } x \ = \ \textit{parte intera di } \lg x$$

Ma altri Autori definiscono con condizioni su a diverse da $1 \leq a < 10$. (Wikipedia in inglese ne dà altre 2).
Qualunque definizione di ordine di grandezza si usi per 2 numeri positivi,

se hanno ugual ordine di grandezza il massimo non supera il decuplo del minimo cioè sono simili almeno molto molto vagamente, e

se hanno ordini di granbdezza m e $m+1$ il massimo non supera il centuplo del minimo (ma in generale sarà molto molto vagamente il decuplo)

5 è l'ordine di grandezza del numero di capelli di una persona

11 è l'ordine di grandezza del numero di neuroni di un uomo

11 è l'ordine di grandezza del numero di stelle della Via Lattea

13 è l'ordine di grandezza del numero di globuli rossi di un uomo (3.0×10^{13})

Quindi il numero di globuli rossi di un uomo è molto vagamente il centuplo dei suoi neuroni (2 ordini di grandezza di differenza) e del numero di stelle della Via Lattea.

L'ordine di grandezza è molto usato nelle Scienze applicate per fissare le idee sulla grandezza approssimativa di un numero, per agili confronti, semplificandolo all'estremo in un singolo numero intero, spesso fra -20 e 20.
Ma la grossolanità dell'approssimazione è mostata dal fatto che

9 è l'ordine di grandezza del numero di persone del mondo come se fossero un miliardo e invece sono quasi 8 miliardi.

17.3 Altri esempi interessanti ma non banali

Esempio$_\mu$ La successione di Fibonacci, che modellizza l'espansione di una popolazione animale – almeno nelle fasi iniziali – è sì definita per ricorrenza (e solo su $\mathbb{N}$) ma è approssimata con una funzione esponenziale in base φ, la sezione aurea:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \tag{29}$$

per esempio $a_{10} = 55 \approx 55.0036$.
Dopo quanti mesi (se t indicia i mesi) la popolazione raggiunge il valore 135 301 852 344 706 746 049, oppure anzi, uscendo dall'esattezza ideale del problema, un valore $1.35 \cdot 10^{20}$?

Abbiamo l'equaziona approssimata

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^n \approx 1.35 \cdot 10^{20} \qquad /\lg$$

$$\lg\frac{1}{\sqrt{5}}+n\,\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx\lg(1.35\cdot 10^{20})\qquad \Big/+\lg\sqrt{5}$$

$$n\,\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx\lg(1.35\cdot 10^{20})+\lg\sqrt{5}\qquad \Big/:\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\approx\frac{\lg(1.35\cdot 10^{20})+\lg\sqrt{5}}{\lg\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

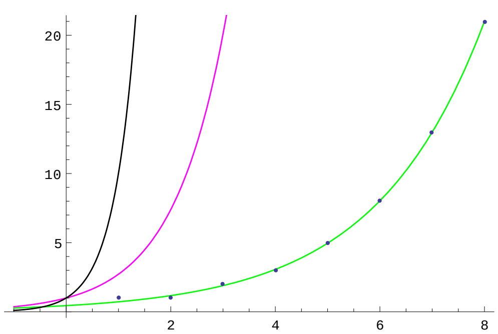
$$\approx\frac{\lg(1.35\cdot 10^{20})+\lg 2.23607}{\lg 1.61803}$$

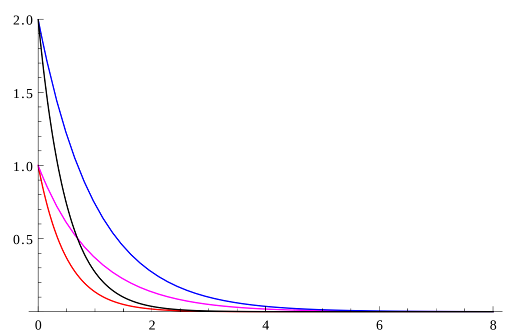
e insomma ci servono i valori (approssimati) dei logaritmi decimali di 3 numeri (fra 1 e 10).
Con l'approssimazione prima vista si ha

$$\approx\frac{20+0.130+0.35054}{0.2089}\approx 98.04$$

e calcolando con pazienza si troverà che il 98-esimo numero di Fibonacci è proprio 135 301 852 344 706 746 049. (Oppure con WolframAlpha: `Fibonacci[98]`).
Nella figura a sinistra si vedono:

(blu) la successione (n, a_n) essendo a_n la successione di Fibonacci
(verde) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^x$
(magenta) e^x
(nero) 10^x





Esempio$_\mu$ Il piombo nelle ossa ha un'emivita – supponiamo esponenziale il suo scomparire, com'è ragionevole in questi casi – di (circa) 10 anni. In quanto tempo si riduce del 75%? E del 90%? E del 95%? E del 97%?

La riduzione <u>del</u> 75% è la riduzione <u>al</u> 25%, cioè ai $\frac{25}{100}$ ovvero $\frac{1}{4}$ e allora corrisponde a 2 dimezzamenti: allora ci vogliono 20 anni.
Per il 90% è meno immediato.
Illustriamo una famiglia (insieme) di funzioni con l'esponenziale, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è espressa dai vari Autori in 2

modi diversi, con una costante negativa (che qua sarà k) oppure con una costante positiva (che qua sarà r) preceduta dal segno meno:

$$u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{k\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad k < 0$$

$$u(t) = u_0\, \mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad r > 0$$

e la costante k ovvero r dipende da caso a caso.
Questa è l'equazione che esprime in funzione del tempo la concentrazione di piombo, che si attenua; e un'infinità di altri fenomeni.
Nella figura a destra si vedono 4 casi, con diversi valori di u_0 e r:
(rosso) $\mathrm{e}^{-2\,x}$
(magenta) e^{-x}
(nero) $2\,\mathrm{e}^{-2\,x}$
(blu) $2\,\mathrm{e}^{-x}$
E in questo caso possiamo calcolare la costante r dall'emivita di 10 anni:

$$u(emivita) \overset{DEF}{=} \frac{u(0)}{2} \overset{EQ}{=} u(0)\,\mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \qquad \Big/ : u(0)$$

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \qquad \Big/ \ln$$

$$\ln\frac{1}{2} = -r\,10\,anni$$

$$-\ln 2 = -r\,10\,anni \qquad \Big/ : (-10\,anni)$$

$$r = \frac{\ln 2}{10\,anni}$$

ottenendosi così l'equazione dello scomparire del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

Ora ci si chiede quando sarà ridotto del 90% ovvero al 10%, cioè $u(t) = 0.1\,u(0)$:

$$0.1\,u(0) \overset{EQ}{=} u(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \qquad \Big/ : u(0)$$

$$0.1 = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \qquad \Big/ \lg$$

$$-1 = \lg \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t}$$

$$-1 = -\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t\,\lg \mathrm{e}$$

$$t = \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e} \cdot \ln 2} \approx \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e} \cdot \frac{\lg 2}{\lg \mathrm{e}}} = \frac{10\,anni}{\lg 2} \approx \frac{10\,anni}{0.3}$$

≈ 33.3 anni (valore che, nella pratica, possiamo stare sicuri che verrà riportato come 33 anni).

Si risolvano gli altri quesiti posti associatamente a questo appena risolto. Con 95% si dovrà calcolare $\lg 0.05 = \lg\left(\frac{1}{2}\cdot 0.1\right) = \lg\frac{1}{2} + \lg\frac{1}{10} = -\lg 2 - \lg 10 \approx -0.3 - 1 = -1.3$.

Esempio$_\mu$ – In farmacia misuriamo l'udito...
...cercando di capire l'intensità sonora. L'intensità sonora in decibel è definita sostanzialmente come

$$\text{intensità sonora} := 10\left(\lg \frac{\text{energia passante in 1 s per 1 m}^2}{\text{una prefissata energia passante in 1 s per 1 m}^2}\right) dB$$

dove la prefissata energia passante in 1 s per un m^2 è la (piccolissima) $1pW/m^2$. (L'argomento dei logaritmi e degli esponenziali è sempre adimensionale, cioè un numero puro, senza unità di misura: non esiste il logaritmo di 3 metri o 4 secondi).
Allora come funzione dell'energia è del tipo

$$a\ \lg\frac{x}{c} \quad = a\,(\lg x - \lg c) \quad = a \lg x + d \quad (\text{con } d := -a\lg c)$$

(e si faccia ben attenzione a distinguere la soprastante scrittura dalla $a\lg(x + d)$). Il grafico è proprio come quello di $\lg x$, riscalato da a sull'asse delle ordinate e traslato verticalmente di d.

Calcoliamo di quanti decibel aumenta l'intensità sonora raddoppiando l'energia.
Detta E l'energia considerata e $2\,E$ il suo doppio, si ha

$$\text{intensità\_sonora}(2E) - \text{intensità\_sonora}(E) =$$

$$= 10\ \lg\frac{2\,E}{1pW/m^2} - 10\ \lg\frac{E}{1pW/m^2} =$$

ricordando che $\lg(x/y) = \lg x - \lg y$

$$= 10\Big(\lg(2\,E) - \lg E\Big) = \quad (\text{mentre } \lg(1pW/m^2) \text{ si elide})$$

$$= 10\ \lg\frac{2\,E}{E} = 10\ \lg 2 \approx 10\cdot 0.3 = 3$$

cioè **ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento approssimativo di 3 decibel**.

17.4 Esercizi su logaritmi ed esponenziali

ESERCIZIO$_{\mu 2020}$
$\star \approx$ Risolvere l'equazione

$$e^{2\,x^3} - e^{2\,\lg^6(2\lg 100)} = 0$$

SVOLGIMENTO
Ovviamente $\lg 100 = 2$

$$e^{2\,x^3} = e^{2\,\lg^6(2\cdot 2)} \quad \Big/ \ \ln$$

$$2\,x^3 = 2\,\lg^6 4 \quad \Big/ \ :2$$

$$x^3 = \lg^6 4 \quad \Big/ \ \sqrt[3]{\cdot}$$

$$x = \lg^2 4 =$$

che è la soluzione esatta, e infine con le proprietà dei logaritmi e la nota approssimazione $\lg 2 \approx 0{,}3$

$$= \lg^2 2^2 = (\lg 2^2)^2 = (2\,\lg 2)^2 \approx (2\cdot 0{,}3)^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$$

$$\boxed{\lg^2 4 \approx 0{,}36}$$

(Un valore più preciso è 0,3625, come si può verificare per esempio online su WolframAlpha con `Log[10,4]^2`).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che dev'essere

$$\underline{x > 0}$$

perché x è argomento di un logaritmo. (Ovviamente $1 + x^2 > 0$ sempre). Ricordando le $\log_b u + \log_b v = \log_b(u\,v)$ e $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$ e $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \qquad \Big/ 10^\wedge \qquad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{200\,x}{1 + x^2} = 100 \qquad \Big/ \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2\,x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che è > 0).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast \approx$ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2 + 10} + \log_{10} \frac{x^2 + 10}{10^2} = 1$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\underline{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente $\log_{10} 0$). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perché per $x \neq 0$ gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).
Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10} \left(\frac{x^2}{x^2 + 10} \cdot \frac{x^2 + 10}{10^2} \right) = 1$$

e semplificando

$$\log_{10} \frac{x^2}{10^2} = 1 \quad \Big/ \, 10^\wedge \qquad \leftarrow \textit{potenza in base } 10; \textit{elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{x^2}{10^2} = 10^1 \quad \Big/ \cdot 10^2$$

$$x^2 = 10^2 \cdot 10^1$$

$$x = \pm\sqrt{10^2 \cdot 10} = \pm\sqrt{10^2}\,\sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione $x \neq 0$ ci faccia escludere qualche valore)

$$\boxed{x = \pm 10\sqrt{10} \approx \pm 31.623}$$

oppure con un decimale in meno

$$\boxed{x = \pm 10\sqrt{10} \approx \pm 31.62}$$

ESERCIZIO$_\mu$
$\ast \approx$ Risolvere l'equazione $4\lg(100\,x) = 9$.
SVOLGIMENTO

$$4\lg(100\,x) = 9 \qquad \Big/ : 4$$

$$\lg(100\,x) = \frac{9}{4}$$

e per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$\lg 100 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg 10^2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg x = \frac{9}{4} - 2$$

$$\lg x = \frac{9-8}{4}$$

$$\lg x = \frac{1}{4} \qquad \Big/ 10^\wedge$$

$$x = 10^{\frac{1}{4}}$$

ovvero

$$\boxed{\sqrt[4]{10} \approx 1{,}778\,28}$$

(La radice quarta si calcola con la calcolatrice come radice quadrata della radice quadrata: $\sqrt[4]{z} = \sqrt{\sqrt{z}}$)

IV – Statistica descrittiva

Citazione

Leggiamo in “Matematica per le scienze della Vita”([70]):

> Capire i dati è un processo che richiede diversi passi:
>
> 1. raccogliere i dati;
> 2. riassumere dati;
> 3. analizzare i dati;
> 4. interpretare i risultati e presentarli.
>
> (...) La fase 2 del processo (riassumere i dati) è quella della “statistica descrittiva”, in cui l’obiettivo è di astrarre dai dati alcune proprietà per poterli meglio interpretare.
> (...) La fase 3 del processo coinvolge tipicamente l’area della“statistica inferenziale”, che consiste nella stima dei parametri e nel testare le ipotesi.

Ci sono tre livelli di gravità delle menzogne: le bugie ufficiose (“non ho studiato perchè il criceto stava male”), le bugie calunniose, e infine la statistica.

[70] Di Erin N. Bodine, Suzanne Lenhart, Louis J. Gross, a cura di Gabriella Caristi, Maurizio Mozzanica, Giacomo Tommei, 2017, UTET Università, titolo originale Mathematics for the Life Sciences, trad. Patrizia Ferreri

18 Introduzione alla Statistica Descrittiva

La Statistica Descrittiva si occupa essenzialmente della
rilevazione
e sintesi
di dati. È cosa ben diversa, più semplice e storicamente antica, dalla Statistica Inferenziale che verrà trattata fra le Matematiche dell'Incertezza.

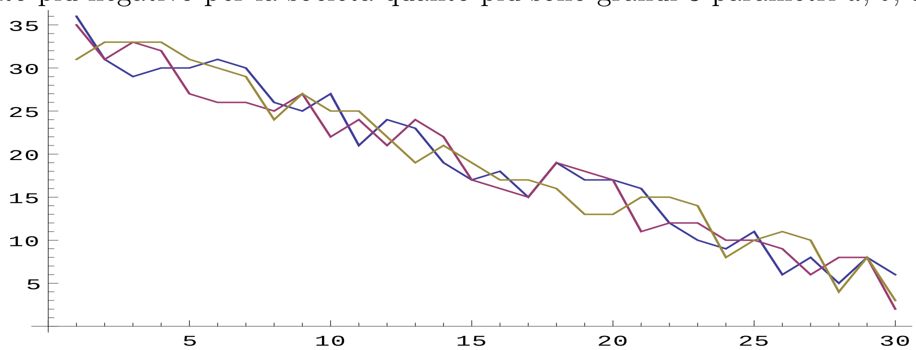
In una trattazione elementare della Statistica Descrittiva non si distingue fra *popolazione* e *campione*: abbiamo i dati che abbiamo, e quelli consideriamo popolazione, anche se in effetti sono un campione di una popolazione più ampia. La distinzione diventa invece essenziale nella Statistica Inferenziale.

In questo testo elementare, verrà tralasciata la questione della rilevazione materiale dei dati – con tutta la sua problematicità.

E in questa lezione **verrà trattata solo la sintesi** dei dati, ovvero la rappresentazione dei dati in una forma umanamente comprensibile e *trattabile*, cosa particolarmente utile se i dati sono più di una dozzina.

Si vuole riassumere i dati con 1 diagramma oppure 1 o pochi valori, per
comprenderli
confrontarli ← cosa fondamentale per i farmaci
divulgarli
e, a livello eticamente discutibile, presentarli manipolativamente (cosa che viene fatta amplissimamente: un fenomeno in *diminuzione* si trova sempre come presentarlo, almeno a livello di titolo riassuntivo, come *aumento*, se si vuole, usando artifici statistici formalmente legittimi).

Esempio. Consideriamo un fenomeno in evoluzione da un giorno 1 a un giorno 30, tanto più negativo per la società quanto più sono grandi 3 parametri a, b, c.



Un *ingenuo* direbbe che la situazione sta migliorando: i parametri negativi diminuiscono. Invece i media del posto invece scrivono, a beneficio del *popolo bue*:

Giorno 2 Aumenta il tal parametro!
Giorno 3 Aumenta il tal parametro!
Giorno 4 Aumenta il tal parametro!
Giorno 5 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 6 Aumenta il tal parametro!
Giorno 7 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 8 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 9 Aumenta il tal parametro!
Giorno 10 Aumenta il tal parametro!
Giorno 11 Aumenta il tal parametro!
Giorno 12 Aumenta il tal parametro!
Giorno 13 Aumenta il tal parametro!
Giorno 14 Aumenta il tal parametro!
Giorno 15 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 16 Aumenta il tal parametro!
Giorno 17 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 18 Aumenta il tal parametro!
Giorno 19 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 20 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 21 Aumenta il tal parametro!
Giorno 22 Aumenta il tal parametro!
Giorno 23 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 24 Il Governo valuta la preoccupante situazione
Giorno 25 Aumenta il tal parametro!
Giorno 26 Aumenta il tal parametro!
Giorno 27 Aumenta il tal parametro!
Giorno 28 Aumenta il tal parametro!
Giorno 29 Aumenta il tal parametro!

Giorno 30 Il Governo valuta la preoccupante situazione

L'insieme dei dati $x_1, ..., x_n$ (che spesso sono numeri ma non sempre) si chiama *dataset* e non è un insieme in senso matematico perché le ripetizioni dei valori sono ammesse e non vanno elise.

Si considerano dataset, via via più trattabili matematicamente:

• *nominali*: per esempio con valori in { pari, dispari }
pari, pari, dispari, pari, dispari, dispari (è un dataset)
oppure con valori in { integro, spezzato, bifido }
integro, spezzato, spezzato, bifido, integro, integro (è un dataset)

• *ordinali*: per esempio, per valutare un farmaco antidepressivo potremmo considerare questi valori non numerici
morte
grande peggioramento
medio peggioramento
lieve peggioramento
stabile
lieve miglioramento
medio miglioramento
grande miglioramento
e dopo il *trial clinico* avere un dataset di – per esempio – 172 valori di quel tipo.

• *numerici*: 3, 1, 2, 4, 6, 1000, 6. Quelli che più ci interessano.

Anche nei dataset ordinali si potrà fissare una corrispondenza con numeri, ma non avrà alcun senso fare la media fra 3 soggetti con: lieve miglioramento, medio miglioramento, morte. Se invece la "perdita infinita" viene esclusa, una media in qualche modo si potrà anche fare, con opportuna trasformazione in valori numerici. (E alla fin fine – di necessità in virtù – qualcosa riusciranno a fare anche con la perdita infinita).

Fra le variabili nominali si distinguono quelle *dicotomiche* ovvero *binarie*, con 2 soli valori, come pari/dispari, vivo/morto, successo/fallimento, 0/1: Link->

Considereremo 2 capitoli della Statistica Descrittiva: FIGURA MANCANTE??? ⋄ le *rappresentazioni grafiche*: Lezioni 19, 20; v. p.es. Figura 18;
⋄ le *statistiche di sintesi*, funzioni $f(x_1, ..., x_n)$ con un numero n a priori indeterminato di argomenti. Inizieremo da queste.

Ecco alcune statistiche di sintesi per un dataset:
• il minimo: $\min(x_1, ..., x_n) \leftarrow$ per un dataset almeno ordinale;
• il massimo: $\max(x_1, ..., x_n) \leftarrow$ per un dataset almeno ordinale;
• la somma: $x_1 + ... + x_n \leftarrow$ per un dataset numerico.
Il significato delle soprastanti statistiche di sintesi è ovvio. Si calcolino quei 3 valori per questo dataset: $\frac{1}{\pi}$, $\frac{2}{7}$, 0.3, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, e, e^{-1}, $\frac{1}{3}$.

Per esempio (ipotetico, di farmacologia veterinaria) è immensamente più significativo dire che fra 100 000 ostriche sono state trovate perle con un minimo di 0 e un massimo di 4 in ogni esemplare per un totale di 41 320 perle, piuttosto che elencare il numero di perle 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1... di ciascuno degli esemplari. Abbiamo riassunto 100 000 numeri con 3, minimo massimo e somma, e capiamo perfino meglio la situazione che con pagine di numeri! E soprattutto possiamo meglio *confrontarla* con la situazione di un'altra vasca di 100 000 ostriche, magari nutrite/trattate diversamente, che analogamente riassumeremo con quei 3 indici.

Più in dettaglio considereremo queste altre statistiche di sintesi:
• gli indici di posizione:

∘ quelli che vorrebbero riassumere in 1 solo valore "medio" il complesso dei dati, e saranno l'argomento di questa Lezione 18.3;

∘ quelli che vorrebbero riassumere in 5 valori o corrispondentemente 1 diagramma il complesso dei dati, Lezione 20;
• gli indici di dispersione ovvero variabilità, Lezione 21, che vorrebbero quantificare con 1 numero la non omogeneità di dati numerici.

⋄ Esiste anche 1 indice numerico, la *skewness*, che con una complicata formula misura quantitativamente l'asimmetria dei dati, che però noi tratteremo solo qualitativamente.

Ed esistono altri indici che non tratteremo (come la *curtosi*).

18.1 Medie

Media (aritmetica). Da ora consideriamo un dataset $\{x_1, ..., x_n\}$.

$$M(x_1, ..., x_n) := \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Esempio.

In https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/bollettino/Report-COVID-2019_4_ottobre.pdf leggiamo

> Dati al 7 settembre 2020 (...) da 4190 deceduti per i quali è stato possibile analizzare le cartelle cliniche. Il numero medio di patologie osservate in questa popolazione è di 3,4

Facile e bello, ottimo anche per i voti, ma il reddito medio di questi

$$3, 1, 2, 4, 6, 1000, 6$$

è 146, non poi così espressivo della situazione globale, a causa dell'*outlier* 1000, valore anomalo ovvero aberrante.

Tratteremo in seguito la questione dei valori anomali ma anticipiamo che talvolta vengono semplicemente *eliminati*.

Media geometrica. Per n numeri positivi (invece la media aritmetica non lo richiede), è la radice n-esima del loro prodotto:

$$GM(x_1, ..., x_n) := (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} .$$

Nell'esempio numerico soprastante ≈ 7.05.

Alcuni Autori ritengono che la media geometrica sia meno sensibile agli outlier della media aritmetica, ma questo non può essere affermato con certezza matematica, dipende da ogni singolo dataset.

Riguardo alle applicazioni non lontane dalle Scienze Biomediche, leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Geometric mean":

> starting from 2010 the United Nations Human Development Index did switch to this mode of calculation, on the grounds that it better reflected the non-substitutable nature of the statistics being compiled and compared:
>
> > The geometric mean decreases the level of substitutability between dimensions [being compared] and at the same time ensures that a 1 percent decline in say life expectancy at birth has the same impact on the HDI as a 1 percent decline in education or income. Thus, as a basis for comparisons of achievements, this method is also more respectful of the intrinsic differences across the dimensions than a simple average.

In pratica, se un Paese porta l'aspettativa di vita da 40 a 60 anni, questo verrà ben rilevato facendo la media geometrica con il reddito pro-capite; se invece si facesse la media aritmetica, l'incremento di reddito da 4 000 a 4 040 dollari peserebbe di più: l'incremento è di 40 invece che 20, ma è solo l'1%, mentre da 40 a 60 è del 50%. La media geometrica appare migliore quando dobbiamo riassumere dati che variano su scale molto diverse. E anche in altri casi.

Media (aritmetica) ponderata (o pesata). Dati dei *pesi* $a_1, ..., a_n$, di somma 1, la media pesata del dataset $\{x_1, ..., x_n\}$ è $a_1x_1 + ... + a_nx_n$.
(Detto semplificatamente) pesi a_k maggiori di $\frac{1}{n}$ sono associati a dati che si vuol far "pesare" di più nella considerazione finale.

Per esempio nella media pesata

$$0.4\,voto\_Matematica + 0.4\,voto\_Chimica + 0.2\,voto\_Marketing$$

il voto nell'esame di Marketing pesa/conta metà di ciascuno degli altri voti.

Per il lettore interessato: esistono varie altre "medie".

Mediana. Il numero centrale dei dati riordinati, adesso 4: $1, 2, 3, \underline{4}, 6, 6, 1000$. E se i dati sono in numero pari, si considera la media dei 2 centrali. La mediana è definita anche per valori *ordinali*.

Moda. Il valore più frequente. Nel nostro esempio è 6 ma in generale non è definita perché i numeri sono tutti diversi o perché 2 o

più valori sono ripetuti ugualmente. Ecco per esempio un dataset *bimodale*: $6, 6, 6, 6, 7, 7.5, 7.5, 8, 8, 8, 8, 8.5, 8.5, 9, 9.5, 10, 10.$
La moda è definita anche per dati *nominali*, neppure ordinali, per esempio in ogni nazione c'è un cognome più frequente.

Confronto fra media, mediana e moda.
Su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Mode (statistics)" troviamo questo significativo esempio:
1, 2, 2, 3, 4, 7, 9; media=4, mediana=3, moda=2.

Media, mediana e moda sono 3 valori che possono presentarsi in qualunque ordine fra loro: dipende dal dataset.

Media interquartile. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Central tendency:

> The method is best explained with an example. Consider the following dataset:
> 5, 8, 4, 38, 8, 6, 9, 7, 7, 3, 1, 6
> First sort the list from lowest-to-highest:
> 1, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 38
> There are 12 observations (datapoints) in the dataset, thus we have 4 quartiles of 3 numbers. Discard the lowest and the highest 3 values:
> ~~1 ,3 ,4 ,~~ 5, 6, 6, 7, 7, 8, ~~8 ,9 ,~~38
> We now have 6 of the 12 observations remaining; next, we calculate the arithmetic mean of these numbers:
> xIQM = (5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8) / 6 = 6.5
> This is the interquartile mean.
> For comparison, the arithmetic mean of the original dataset is
> (5 + 8 + 4 + 38 + 8 + 6 + 9 + 7 + 7 + 3 + 1 + 6) / 12 = 8.5
> due to the strong influence of the outlier, 38.

(Che 38 vada considerato outlier è opinabile).

Con artifici si definisce per un numero di dati non quadruplo.

Detto grezzamente, consideriamo il reddito medio delle persone medie, al netto di mendicanti e ricconi, che quelli ci sono comunque dappertutto.

ES. 2$_{\mu 2019}$

≈ Il carbonio risulta avere – almeno secondo alcuni Autori: non possiamo qua garantirlo in forma assoluta e fare Chimica o Fisica; si veda Wikipedia in inglese alla voce *Isotopes of carbon* – 12 isotopi non reperibili in natura (oltre a 3 reperibili in natura) con queste emivite approssimative:

$3,5 \times 10^{-21}$ s, 126,5 ms, 19,3 s, 20,364 min, 2,45 s, 0,747 s,

193 ms, 92 ms, 46,2 ms, 16 ms, <30 ns, 6,2 ms.

Dopo aver convertito minuti, millisecondi e nanosecondi in secondi con le note formule

1 min=60 s, 1 ms=0,001 s, 1 ns=$0,000\,000\,001$ s,

determinare la media interquartile delle emivite.

SVOLGIMENTO

Con la conversione in secondi le emivite sono, nell'ordine iniziale dei dati,

$3,5 \times 10^{-21}$ s, 0,126 5 s, 19,3 s, $1\,221,84$ s, 2,45 s, 0,747 s,

0,193 s, 0,092 s, $0,046\,2$ s, 0,016 s, $< 0,000\,000\,030$ s, $0,006\,2$ s.

Ovvero, in ordine crescente, omettendo l'unità di misura,

$3,5 \times 10^{-21}$ → questo e il seguente potrebbero doversi scambiare

$< 0,000\,000\,030$ → vedi nota alla linea precedente

$0,006\,2$

$0,016$

$0,046\,2$

$0,092$

0,126 5

0,193

$0,747$

$2,45$

$19,3$

$1\,221,84$.

I 12 valori ordinati sono 4 terne di valori, ed eliminate la prima terna (coi valori più bassi) e l'ultima (coi valori più alti), i 6 valori centrali sono

$0,016$

$0,046\,2$

$0,092$
$0{,}126\,5$
$0{,}193$
$0,747$
e la loro media è il valore cercato, la media interquartile, in secondi:

$$\mathrm{IQM} = \frac{0,016 + 0,046\,2 + 0,092 + 0,126\,5 + 0,193 + 0,747}{6} = \frac{1,220\,7}{6} =$$

$$\boxed{\approx 0,203\ \mathrm{s}}$$

(IQM (acronimo di InterQuartile Mean) è un simbolo classicamente usato per la media interquartile; anche iqm e x_{IQM}).

Nota 1. Se veramente siamo interessati a produrre
(1) un valore in qualche modo "medio" dei dati
(2) che prescinda dai casi/valori *eccezionali*
allora
- mediana e
- media interquartile

– sono decisamente valide
+ ma solo la mediana è *sempre* facilmente calcolabile
∗ invece la media aritmetica richiede di escludere gli outlier:
⋄ se i dati sono pochi si può fare a mano ma lasciandoci dubbi
⋄ se i dati sono moltissimi non si può proprio fare a mano però
> si può fare informaticamente con varie regole che definiscono gli outlier, ma in diversi modi a seconda degli Autori.

Esempio: media e mediana.
Citiamo da *Caratteristiche dei pazienti deceduti positivi all'infezione da SARS-CoV-2 in Italia*, Istituto Superiore di Sanità, 5 ottobre 2021:

> "caratteristiche di 130.468 pazienti deceduti e positivi a SARS-CoV-2 in Italia dall'inizio della sorveglianza al 5 ottobre 2021 riportati dalla Sorveglianza Integrata

> COVID-19 coordinata dall'Istituto Superiore di Sanità (ISS). L'età media dei pazienti deceduti e positivi a SARS-CoV-2 è 80 (...) mediana 82".

Nota 2. Non ci si illuda: non esiste alcun tipo di statistica di sintesi che riassuma bene con 1 solo numero **ogni** dataset, neppure in assenza di outlier. Spesso la mediana rappresenta bene il soggetto "tipico", ma non sempre: in un cortile con 6 cani e 6 galline, la media e la media interquartile e la mediana del numero di zampe per animale è 3. Che non rappresenta alcun caso tipico. (E la media geometrica è ≈ 2.83, di male in peggio). Nemmeno l'*unimodalità* rappresenta una garanzia per la mediana, pur in generale così valida: con 1 grillo, 5 cani e 6 galline

$$6,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2 \quad (\textit{moda} = 2)$$

la mediana è ancora 3.

Nota 3. WolframAlpha calcola online
la media con `mean` seguito dalla lista di numeri: `link->`
la mediana con `median` seguito dalla lista di numeri: `link->`
la media geometrica con `geometricmean` seguito dalla lista di numeri: `link->`

18.2 Sul trasformare dati ordinali in dati numerici

La trasformazione di dati ordinali in numerici introduce elementi di arbitrarietà. Vediamo un esempio.

Supponiamo che un'organizzazione raccolga dati sulla soddisfazione degli utenti sulle prestazioni di un suo organo: per esempio un'università, sull'insegnamento di un suo docente – caso reale in Italia. L'utente può scegliere, per valutare il suo grado di soddisfazione, fra

no
più no che sì

più sì che no
sì

Un'università trasforma i valori ordinali in numerici con lo schema
2
5
7
10

e un'altra con quest'altro, altrettanto legittimo:
1
2
3
4

Consideriamo i giudizi sui famosi Professori Pinco e Pallino, dati dai loro 2 studenti per ciascuno:

Pinco: più no che sì, sì: 5+10=15 oppure 2+4=6

Pallino: più sì che no, più sì che no: 7+7=14 oppure 3+3=6.

Col primo schema Pinco figura meglio di Pallino, 15 a 14, e col secondo sono pari, 6 a 6.

18.3 Le medie creano illusioni percettive

In https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/bollettino/Report-COVID-2019_4_ottobre.pdf leggiamo

> Dati al 7 settembre 2020 (...) L'età media dei pazienti deceduti e positivi a SARSCoV-2 è 80 anni

e come abbiamo visto, coi dati al 5 ottobre 2021 è ancora 80 anni. Eppure dall'aprile 2021 al settembre 2021 l'età media dei morti è molto più bassa, come si vede in Figura 3 di https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/bollettino/Report-COVID-2019_5_ottobre_2021.pdf. Addirittura, dal grafico vediamo che nel giugno 2020 l'età media era circa 84 anni e nel giugno 2021 (poco meno di) 76. Niente di strano: i morti del periodo estivo sono pochi nel 2020 e molti di più ma comunque pochi nel 2021, la

media la fanno principalmente i morti di marzo-aprile 2020 e poi novembre-maggio.
FIGURA MANCANTE???

ESERCIZI SULLA LEZIONE

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$*$ Considerato il seguente dataset

$$19.68\ 19.20\ 19.63\ 18.94\ 18.81\ 18.10\ 18.63\ 18.85\ 0.01\ 19.51\ 19.54$$

che possiamo supporre misurazioni di parametri corporei, si determini la mediana dopo avere eliminato un outlier.

SVOLGIMENTO
Chiaramente 0.01 è l'outlier preannunciato. (Potrebbe ragionevolmente provenire da un momentaneo malfunzionamento di una macchina che ha prodotto i dati).
I 10 dati rimanenti riordinati in modo crescente sono

$$18.10\ 18.63\ 18.81\ 18.85\ 18.94\ 19.20\ 19.51\ 19.54\ 19.63\ 19.68.$$

I 2 centrali ovvero mediani sono il 5° e il 6°, eliminando 4 da ogni parte:

$$18.94 \quad 19.20$$

la cui media aritmetica è il risultato cercato:

$$\boxed{19.07}$$

(Se non si eliminasse l'outlier – talvolta non è poi così evidente che qualche valore vada scartato – la mediana sarebbe alquanto simile, 18.94, mentre nei 2 casi le medie aritmetiche sono molto più diverse fra loro, rispettivamente 19.089 e 17.3536; la mediana ha il pregio di risentire poco degli outlier, il che in casi complessi con migliaia o milioni di dati, e magari nessuna certezza su quanti e quali sarebbero da considerare outlier, è molto significativo).

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
$\approx$ Si supponga di avere questi dati di un ospedale in anni successivi, relativi ai consumi di un certo farmaco:

1907 4257
1908 3956
1909 3936
1910 4183
1911 4114
1912 4525
1913 4188
1914 4111

1915 4404
1916 4180
1917 0
1918 0
1919 4361
1920 4035
Dopo aver eliminato gli outlier, determinare la media interquartile dei dati sul consumo del farmaco. (Si approssimi all'intero più vicino).
SVOLGIMENTO
Gli outlier sono i due 0 (verosimilmente dovuti alla guerra).

Ordiniamo il dataset rimanente, che ha 12 elementi:
3936, 3956, 4035, 4111, 4114, 4180, 4183, 4188, 4257, 4361, 4404, 4525
Eliminiamo i primi 3 e gli ultimi 3 valori

$$\Big[3936, 3956, 4035, \Big]4111, 4114, 4180, 4183, 4188, 4257\Big[, 4361, 4404, 4525\Big]$$

e la media dei 6 rimanenti è

$$\approx 4172.17$$

e approssimiamo come richiesto:

$$\boxed{4172}$$

Nota. Mostriamo la straordinaria insensibilità della media interquartile agli outlier rispetto alla media aritmetica. I 12 valori non nulli provenivano da una variabile aleatoria più o meno normale, e poi erano stati aggiunti 2 zeri in corrispondenza ad anni di guerra. Ora, in questo caso è ben evidente che si tratta di outlier per una serie di motivi:
molto diversi dagli altri valori
valori esattamente 0
corrispondenza con anni di guerra.
Ma in altri casi non è così evidente quali valori considerare outlier, per eliminarli "a mano". Allora potremmo fare la media aritmetica di tutti i valori, che però verrebbe fortemente influenzata dagli outlier. Invece la media interquartile dei 12 valori degli ultimi 12 anni, dal 1909 al 1919, senza escludere gli zeri,
1909 3936
1910 4183
1911 4114
1912 4525
1913 4188

1914 4111
1915 4404
1916 4180
1917 0
1918 0
1919 4361
1920 4035

è 4135, alquanto simile a quella di prima. Gli zeri sono finiti nelle porzioni scartate.
Insoma la media interquartile ci mostra di cogliere il *vero valore "medio"* della variabile aleatoria retrostante al fenomeno quando esso avviene *normalmente*, e lo fa in un modo *automatico*, con una formula, che non richiede l'esclusione a mano degli outlier, cosa impossibile se i dati sono milioni.
La media aritmetica 3503 invece è molto minore (essenzialmente a causa dei 2 zeri) della media 4188 dei 12 valori non nulli iniziali (e qua si vede la sensibilità della media aritmetica agli outlier).
Sarebbe bello mostrare che similmente avverrebbe considerando tutti i 14 valori iniziali, ma sfortunatamente la definizione di media interquartile per campioni con un numero non quadruplo di elementi non è facilissima per un calcolo a mano.

19 Bar chart, istogrammi, e altri diagrammi

19.1 Diagrammi a torta

Il *diagramma a torta* ha un ovvio significato: gli angoli o equivalentemente le aree sono proporzionali contemporaneamente ai valori assoluti o alle frazioni percentuali da rappresentare. (La proporzionalità agli uni è equivalente alla proporzionalità alle altre). Si veda in questo `link->` un diagramma a torta di interesse farmaceutico coi valori assoluti riportati (le percentuali no, sono lasciate all'occhio del lettore che vede le fette della torta; può essere un'utile esercizio calcolarne qualcuna).
(Più complessa è la situazione in cui oltre alle percentuali relative a 2 o più casi, il che necessita di 2 diagrammi a torta, si voglia rappresentare anche un altro dato per ciascuno dei casi, e allora si faranno diagrammi a torta di diverse dimensioni).
Gli angoli si misurano col goniometro; ma anche a occhio si può fare qualcosa.
Il diffuso software Excel fa i diagrammi a torta.
Funzionano veramente bene solo se i valori da rappresentare sono molto pochi, magari 2 o 3, e specialmente se sono molto diversi fra loro, come 66% e 32% e 2% – ma non di più di 2 ordini di grandezza: valori come 90%, 9.9%, 0.07% e 0.03% (l'ultimo ha solo circa 1 decimo di grado e il penultimo 2 e mezzo) non saranno concretamente apprezzabili su un normale foglio a stampa, o schermo di computer.

Spesso si raggruppano in una classe i valori più piccoli, o più grandi.

Si veda un esempio in `https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/sars-cov-2-decessi-itali` `2` dove in una stessa classe sono i casi "3 o più".

Si evitino come la peste gli ingannevoli diagrammi a torta tridimensionali in rappresentazione prospettica.

19.2 Istogrammi a barre o bar chart, e istogrammi

I diagrammi a colonne ovvero bar chart ovvero istogrammi a barre, e gli istogrammi – purtroppo con ambiguità nominalistiche nei vari testi – sono diagrammi per la visualizzazione di dati. Nei bar chart l'altezza di ogni colonna – o la lunghezza se disposta orizzontalmente – rappresenta un valore, negli istogrammi l'area rappresenta un valore:

bar chart – altezza ovvero lunghezza – valore

istogramma – area – valore

Spesso in italiano chiamano istogrammi quelli che in questo testo più precisamente chiamiamo bar chart.

Mostriamo un istogramma, nel senso di questo testo (area=valore), e poi ci occuperemo maggiormente di bar chart: LINK->
Si noti che la grandezza sull'asse delle ascisse è continua e non potrebbe essere che così.

Torniamo dunque ai bar chart.

Si noti che è possibile che una colonna rappresenti, per così dire, un valore medio di dati già considerati in altre colonne, per esempio in questo LINK->

Le varie barre possono avere colori che le associano fra loro: LINK->

Ma si faccia attenzione nell'interpretare le statistiche perché molto dipende da come si raggruppano i dati. Nel linkato diagramma sulle cause di morte il cancro compare poco perché è stato disaggregato in vari tipi di cancro. Considerandoli tutti, il cancro è la seconda causa di morte, dopo le malattie cardiocircolatorie. Addirittura qua disaggregando i tumori in tanti tipi diversi fa apparire il covid come prima causa di morte in Italia, datato 3 maggio 2020: LINK->

If you torture the data long enough, it will confess to anything.
(In questo LINK-> è in articolo su PubMed).

Si faccia attenzione nell'interpretare i bar chart in scala logaritmica perché le altezze rappresentano sì i valori ma non in modo proporzionale ad essi: LINK->

I bar chart possono rappresentare anche valori negativi: LINK->

Naturalmente si faccia attenzione a distinguere i valori assoluti dai valori relativi; per esempio di vari stati o regioni si possono considerare i morti di covid come numero assoluto, o come morti per milione o centomila abitanti. Vediamo un esempio in cui i valori sono già opportunamente scalati sul migliaio di abitanti in questi spettacolari diagrammi a bolle interattivi: LINK->

Si vedano vari tipi di bar chart di interesse specificamente farmaceutico in questo LINK->
Quella sorta di pelucchi che si vedono su certi bar chart rappresentano le deviazioni standard, concetto che vedremo, e che in sostanza rappresentano la variabilità della grandezza rappresentata, all'interno del campione da cui proviene.

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
≈ In un articolo scientifico[71] della rivista Neuropsychopharmacology leggiamo

> Patients were treated two to three times per week with high-frequency MST (i.e., 100 Hz) (N=24), medium frequency MST (i.e., 60 or 50 Hz) (N=26), or low-frequency MST (i.e., 25 Hz MST) (N=36)

Si disegni un istogramma a barre (bar chart) coi valori N_i denominando N l'asse delle ascisse, con barre denominate (lo si scriva entro esse)

high-frequency MST

medium frequency MST

low-frequency MST
e all'estremità di ogni barra si scriva la frequenza relativa, cioè N_i/N_{tot}, espressa percentualmente, con 1 decimale.

- Considerato il dataset

$$2, 3, 1, 4, 1, 5, 3, 4, 7, 1, 2, 4, 5, 9, 4, 8$$

[71] *Magnetic seizure therapy (MST) for major depressive disorder*, Neuropsychopharmacology (5 September 2019), Zafiris J. Daskalakis, Julia Dimitrova, Shawn M. McClintock, Yinming Sun, Daphne Voineskos, Tarek K. Rajji, David S. Goldbloom, Albert H. C. Wong, Yuliya Knyahnytska, Benoit H. Mulsant, Jonathan Downar, Paul B. Fitzgerald & Daniel M. Blumberger

se ne rappresenti il bar chart. Poi si rappresenti l'istogramma con intervalli $[0, 2.5[$, $[2.5, 5[$, $[5, 7.5[$, $[7.5, 10[$, e poi con intervalli $[0, 2.5[$, $[2.5, 5[$, $[5, 10[$.

19.3 Eventuali asimmetrie nei dataset: skewness

Una distribuzione coi dati più "addensati" verso i valori bassi che quelli alti si dice *right skewed*, e si intuisce com'è una distribuzione *left skewed*. (Queste *non* sono definizioni rigorose[72] ma permettono di decidere nella generalità dei casi non particolarmente "capricciosi").
Si provi con un diagramma a colonne coi dati

12.2 20%,
12.4 30%
12.6 25%
12.8 12.5%
13.0 5%
13.2 7%
13.4 3.5%
13.6 2%

19.4 Funzioni a campana varie

Facendo un bel po' di istogrammi a barre di dati presi dalla realtà sensibile, si troverà che spesso le barre si dispongono a formare più o meno una campana.

Praticamente dietro quasi ogni fenomeno della realtà sensibile c'è in qualche modo una funzione più o meno a campana. Imparare a riconoscere queste configurazioni a campana aumenta enormemente la comprensione della realtà.

La campana può avere 2 significati principali: una densità, la classica

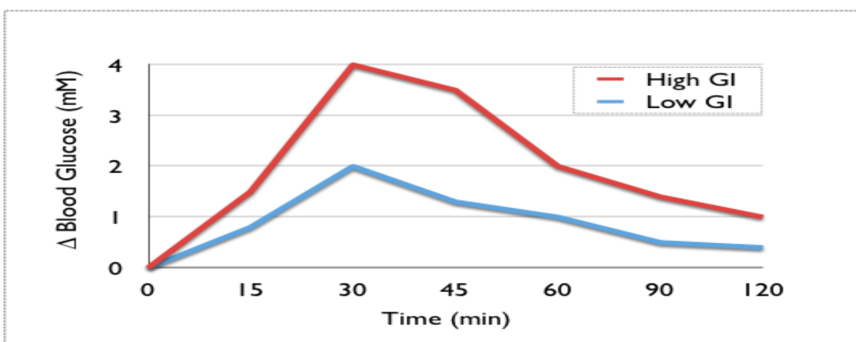
[72] Il lettore interessato cercherà sulla rete la *formula*, piuttosto complessa, che quantifica la skewness.

“distribuzione più o meno a campana”,
coi suoi casi estremi rari e quelli medi più comuni,
oppure,
se in ascissa abbiamo il tempo, talvolta rappresenta (quantitativamente) la classica
“parabola della vita”,
valida anche per una comunità microbica, per la potenza dell’Impero Romano, per la concentrazione di un farmaco immesso nel sangue, il numero di malati in un’epidemia, o quant’altro: sorgere, ascendere, declinare, finire.

Qua stiamo parlando di curve “più o meno a campana” mentre con “curva a campana” *di solito* si intende proprio la *campana gaussiana*, grafico della *densità normale standard* $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, la forma più “pura” di curva a campana del primo tipo.

Curve più o meno a campana del primo tipo, cioè densità, (della Microbiologia) sono in questo link->.

Curve più o meno a campana del secondo tipo, cioè evoluzioni di una quantità nel tempo, sono in questa figura.([73])



Altre, relative ad epidemie di influenza, sono queste([74])

[73]Immagine di pubblico dominio tratta da Wikimedia Commons.

[74]Tratte da Mid-season real-time estimates of seasonal influenza vaccine effectiveness in persons 65 years and older in register-based surveillance, Stockholm County, Sweden, and Finland, January 2017. Euro Surveill. 2017 Feb 23;22(8). pii: 30469. doi: 10.2807/1560-7917.ES.2017.22.8.30469. By Hergens MP et al. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5356437/. “This is an open-access article distributed under the terms of

?????FIGURA MANCANTE

Un'altra, (della Microbiologia) è in questo `link->` e un altro (della Farmacocinetica) in questo `link->` e un altro a pagina 44 di questo `link->`.

Leggiamo nel Fedone, XXXIX (IV secolo a.C.), di Platone, citato in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Variabile casuale*:

> Credi forse che sia tanto facile trovare un uomo o un cane o un altro essere qualunque molto grande o molto piccolo o, che so io, uno molto veloce o molto lento o molto brutto o molto bello o tutto bianco o tutto nero? Non ti sei mai accorto che in tutte le cose gli estremi sono rari mentre gli aspetti intermedi sono frequenti, anzi numerosi?

Nota. Naturalmente nelle Scienze Applicate ricorrono anche grafici ben lontani dall'avere una forma a campana, pur così ubiqua. Già abbiamo visto sigmoidi e sinusoidi... Ma la realtà sensibile è ancora più ricca, per esempio si veda il grafico a questo `LINK->`.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 19

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
[*disegno*] In relazione all'elemento sodio (Na), definite le cellule
ipo-sodiche: con contenuto di sodio fra 0 e < 1 000 unità
normo-sodiche: con contenuto di sodio fra 1 000 e < 10 000 unità
iper-sodiche: con contenuto di sodio fra 10 000 e < 20 000 unità
(unità che non specifichiamo, essendo ininfluente) un macchinario esamina 52 000 cellule (tutti numeri arrotondati per semplicità) trovandovi
6 000 ipo-sodiche, 36 000 normo-sodiche, 10 000 iper-sodiche.
Rappresentare la situazione con un istogramma. (Non è il bar chart).

SVOLGIMENTO
Nell'istogramma – che purtroppo alcuni Autori scambiano col bar chart ma qua veniamo avvertiti della differenza – le grandezze sono proporzionali alle aree dei rettangoli (invece nei bar chart alle lunghezze delle aste, eventualmente strisce rettangolari).
Avremo quindi 3 rettangoli, con basi che si estendono su un asse orizzontale
da 0 a 1000 lunga 1 000
da 1 000 a 10 000 lunga 9 000
da 10 000 a 20 000 lunga 10 000.
(Non vi è alcuna questione problematica fra valori compresi o esclusi).
Le altezze le otteniamo dividendo le aree
6 000, 36 000, 10 000 (o numeri ad essi rispettivamente proporzionali)
per le lunghezze delle basi corrispondenti, ottenendo:
6 unità
4 unità
1 unità
Come unità si può prendere per esempio 1 centimetro, o su carta a quadretti 1 o 2 o 3 quadretti, o anche altre unità.
Ecco l'istogramma, coi 3 rettangoli ed una legenda:

```
A--------------------
A-------------------- A=ipo-sodiche, 6 000
ABBBBBBBBB----------- B=normo-sodiche, 36 000
ABBBBBBBBB----------- C=iper-sodiche, 10 000
ABBBBBBBBB-----------
ABBBBBBBBBCCCCCCCCCC
!!-------!----------!
0 1000    10000        20000
```

• Considerato il dataset $\sin\left(k\frac{\pi}{6}\right)$, $k = 0, ..., 10$, se ne rappresenti ll bar chart. Poi si rappresenti l'istogramma delle frequenze dei valori con intervalli $[0, 0.3[$, $[0.3, 0.6[$, $[0.6, 0.9[$, $[0.9, 1.2[$, e poi con intervalli $[0, 0.6[$, $[0.6, 0.9[$, $[0.9, 1.2[$.

- Si rappresenti il diagramma a torta per questa situazione:
  tifosi dei Gialli: 66
  tifosi dei Neri: 132
  tifosi dei Blu: 198.

20 Quartili e box-plot

Vogliamo riassumere molti numeri in un modo più ricco rispetto alla sola media: aggiungeremo 4 numeri, o, corrispondentemente, con essi faremo 1 diagramma.

20.1 Quartili e riassunto dei 5 numeri

Si abbia il dataset numerico $x_1, .., x_n$ e lo si riordini in modo crescente: $y_1, ..., y_n$ *sono gli stessi numeri ma in ordine crescente*.

Il valore intermedio,

o la media dei 2 intermedi se n è pari,

sappiamo che è la mediana,
che da adesso chiameremo anche *secondo quartile*,
e lo indicheremo con

$q_{0.5}$ oppure

$q_{1/2}$ oppure

$q_{50\%}$.

Diviso così il dataset in 2 parti uguali,
la mediana della prima parte si chiama *primo quartile*,

e lo indicheremo con $q_{1/4}$ oppure

$q_{0.25}$ oppure

$q_{25\%}$,

e la mediana della seconda parte si chiama *terzo quartile*,

e lo indicheremo con $q_{3/4}$ oppure

$q_{0.75}$ oppure

$q_{75\%}$.

Si ha poi il quartile di indice 0, che è il minimo del dataset,

q_0 oppure

$q_{0\%}$

e quello di indice 1, che è il massimo del dataset:

q_1 oppure

$q_{100\%}$

Si hanno così 5 quartili. Ma purtroppo la loro definizione non è perfettamente univoca nei vari testi e software[75] e inoltre, di fatto, spesso si trova denominato *quartile* l'insieme di valori *fra* 2 quartili – come sopra definiti – e in questo senso, i quartili sono 4.

I 5 numeri detti, $q_{0\%}$,...,$q_{100\%}$, sono una statistica di sintesi (vettoriale[76]) che si chiama *riassunto dei 5 numeri* (o *five number summary*).

Due esempi tratti da Wikipedia, l'enciclopedia libera, riscritti:

per un dataset $x_1, ..., x_{10}$, riordinato in $y_1, ..., y_{10}$,
i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, $\frac{y_5+y_6}{2}$, y_8, y_{10};

per un dataset $x_1, ..., x_{11}$, riordinato in $y_1, ..., y_{11}$,
i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, y_6, y_9, y_{11}.

Applicazione: un valore è tanto o poco? Secondo Scimago, la rivista scientifica *Journal of Pharmacy and Pharmacology* ha – in un determinato momento – l'H index, che è un indicatore bibliometrico, di 107: è tanto o poco? Se avessimo la lista di tutte le riviste scientifiche catalogate per Pharmacology da Scimago, e ciascuna col suo H index, avremmo la risposta, salvo che sarebbe scarsamente leggibile per eccesso di numeri. Un riassunto dei 5 numeri ci permetterebbe di contestualizzare bene quel valore 107. Scimago fa una cosa del genere, magari non esattamente con l'H index (usa un suo indice interno, il *SCImago Journal Rank* ovvero *SJR indicator*) ma la sostanza è la stessa. Salvo che chiama primo quartile quello più alto, cioè dal terzo quartile (numero) al quarto quartile (numero). Scopriamo così che la rivista considerata, per la disciplina scientifica Pharmacology è solo nel terzo quartile nel 2018, non poi così bene (e invece per la categoria Pharmaceutical Science è nel secondo, molto meglio). Invece la rivista *British Journal of Pharmacology* risulta nel primo quartile, il migliore, dal 1999 al 2018.

---

[75] Leggiamo in questo link accademico: "Molti software hanno diversi algoritmi per calcolare i quantili."

[76] *Vettoriale* perché produce una cinquina di numeri e non un solo numero. È solo una questione definizionale.

20.2 Box-plot ovvero diagramma a scatola e baffi

Il *box-plot* ovvero *diagramma a scatola e baffi* è un diagramma molto usato in ambito Biomedico per rappresentare tutti i quartili di un dataset, ovvero il riassunto dei 5 numeri.

Iniziamo vedendo sulla rete alcuni esempi di pertinenza delle Scienze Mediche e Farmaceutiche seguendo questo `link->`, con immagini tratte da PubMed.

Precisiamo subito che di questa rappresentazione grafica
• esistono varianti, sulla lunghezza dei "baffi"[77], ma non solo[78]
• considereremo (quasi) solo la versione più semplice
• chi pubblica un box plot dovrebbe specificare[79] i dettagli su come intenderlo.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Diagramma a scatola e baffi":

> il diagramma a scatola e baffi (o diagramma degli estremi e dei quartili o box and whiskers plot o box-plot) è una rappresentazione grafica [...] Viene rappresentato (orientato orizzontalmente o verticalmente) tramite un rettangolo diviso in due parti, da cui escono due segmenti. Il rettangolo (la "scatola") è delimitato dal primo e dal terzo quartile, $q_{1/4}$ e $q_{3/4}$, e diviso al suo interno dalla mediana, $q_{1/2}$. I segmenti (i "baffi") sono delimitati dal minimo e dal massimo dei valori. In questo modo vengono rappresentati graficamente i quattro intervalli ugualmente popolati delimitati dai quartili.

[77] Si veda per esempio questo link.

[78] Per esempio in questo link vediamo una crocetta: possiamo ragionevolmente ipotizzare che rappresenti un decesso.

[79] Per esempio in questo link leggiamo "the whiskers show the smallest and highest value within 1.5 box lengths from the box", che è una variante comune.

Possiamo realizzare i box-plot su WolframAlpha, per esempio questo:

```
BoxWiskerChart[Table[1/(Pi-k),{k,1,11}]]
```

Esercizi$_\mu$ Si disegni il box-plot dei primi 10 numeri primi.
Talvolta gli outlier vengono rappresentati isolati. Si faccia così per il dataset 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,..., $\frac{1}{11}$, $\sqrt{7}$; e poi senza $\frac{1}{11}$.

Su Nature.com, un sito web di altissimo livello per le Scienze Biomediche (e Naturali), seguendo questo `link<--` troviamo una descrizione dei box plot, in cui leggiamo fra l'altro

> Whiskers are conventionally extended to the most extreme data point that is no more than 1.5 è IQR from the edge of the box (Tukey style) or all the way to minimum and maximum of the data values (Spear style).

In questa trattazione abbiamo scelto il secondo dei due standard qua sopra detti, più semplice.
La IQR, che è $q_{0.75} - q_{0.25}$, la vedremo meglio in seguito.

Applicazione. Abbiamo 1000 soggetti ciascuno con 1 valore fisiologico – glicemia, peso, qualunque cosa – su cui vogliamo intervenire, e gli diamo un farmaco. Diciamo, la glicemia.
Una settimana abbiamo 1000 valori nuovi, o piuttosto, in generale – nella realtà concreta – un po' meno (qualcuno può essere morto, o irraggiungibile, o non ne vuole più sapere di noi), diciamo 980.
La media dei valori iniziali e la media dei valori iniziali, certo sono un'indicazione importante.
Per fissare le idee supponiamo che il parametro si voleva diminuirlo.
Supponiamo che la media sia diminuita: bene!
Gli altri 4 numeri ci indicheranno più chiaramente come si è evoluta la situazione. (Del solo parametro controllato, ovvio, e questo è un problema generale della Medicina e della Farmacologia: *cosa* stiamo misurando? La glicemia, la mortalità, il benessere, i soldi... possono variare *indipendentemente*).
Per esempio potremmo avere una situazione iniziale i questo tipo

```
.......-------------!0000000!00000000!---------
```

e una finale di questo primo tipo o quest'altro tipo:

```
........------------!000000!0000000!------
```

```
.....-------------!00000000!00000000000!-----------
```

con media ridotta e valori addensati nel primo caso

oppure

con media ridotta ma valori diradati nel secondo caso.

Non faremo qua Medicina, ma è ovvio che la seconda può essere pericolosa, nonostante il miglioramento della media.

Si noti – e questo è un problema generale – che molta parte di verità può sfuggirci nascosta nei soggetti che non abbiamo potuto misurare la seconda volta. Si potrebbe dire: bene, nel primo diagramma rappresentiamo solo i soggetti di cui abbiamo anche la seconda misurazione. Sì, ma il problema resta, perché la mancanza della seconda misurazione potrebbe essere causata in tutto o in parte proprio dal farmaco: morte, irreperibilità per cure all'estero, grave delusione del soggetto. (In parte, è il problema dei *morti per altra causa*).

Si vuole sperare che lo studente abbia apprezzato i riferimenti a Wikipedia, PubMed, Nature... (Si pensi che qualche decennio fa, internet non c'era...)

ESERCIZI SULLA LEZIONE 20

Esercizio$_\mu$ Si disegni il box-plot del dataset

$$x_k := \frac{1}{\pi - k} \qquad 1 \leq k \leq 11$$

rappresentando con un pallino l'outlier, escludendolo quindi dal calcolo del massimo. Similmente poi con $1 \leq k \leq 12$.

21 Variabilità, covarianza e correlazione

21.1 Indici di dispersione ovvero variabilità

[...] seconno le statistiche d'adesso
risurta che te tocca un pollo all'anno:
e, se nun entra nelle spese tue,
t'entra ne la statistica lo stesso
perché c'è un antro che ne magna due. [Trilussa]

Gli indici dispersione ovvero variabilità cercano di quantificare con 1 numero la non omogeneità di dati numerici.

Sono statistiche di sintesi $f(x_1, ..., x_n)$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, con n a priori indeterminato, proprio come le varie medie, viste in precedenza. È ovvio che dataset diversi possono avere diversi gradi di "disomogeneità", che vogliamo quantificare, anche se hanno la stessa media e/o mediana. Per esempio i 2 dataset, qua già ordinati,

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \qquad 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

hanno uguale media, e perfino mediana, sempre 8, ma è chiaro che i valori del secondo dataset variano meno, ovvero sono più addensati intorno alla media. Si pensi a dei redditi per esempio.

Campo di variazione, o *range*.

$$range(x_1, ..., x_n) := \max(x_1, ..., x_n) - \min(x_1, ..., x_n) .$$

Che vale 12 e rispettivamente 6 nei 2 dataset considerati.
Il range è molto sensibile agli eventuali outlier.

Differenza interquartile. Ben poco sensibile agli outlier:

$$iqr(x_1, ..., x_n) := q_{3/4} - q_{1/4} .$$

Varianza, deviazione standard, coefficiente di variazione.

Detta $\bar{x}$ la media aritmetica del dataset $x_1, ..., x_n$ si definiscono

$$\boxed{\textit{population variance} \qquad \sigma_X^2 = Var(x_1, ..., x_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2} \tag{30}$$

$$\textit{population standard deviation}$$

$$\boxed{\sigma_X = sd(x_1, ..., x_n) := \sqrt{Var(x_1, ..., x_n)}} \tag{31}$$

$$\textit{ovvero} \;\; = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\textit{coefficiente di variazione ovvero deviazione standard relativa}$$

$$\boxed{se\ \bar{x} \neq 0: \quad \sigma_X^* = cv(x_1, ..., x_n) := \frac{\sigma_X}{\bar{x}}} \tag{32}$$

e dell'ultima si può avere la forma percentuale moltiplicando per 100%, ottenendo la *deviazione standard percentuale*.
Alcuni Autori dividono per $|\bar{x}|$ invece che $\bar{x}$.

Si trova scritto sia σ che sd che SD; e sia σ_X^* che cv che CV.

Questi indici sono tutti sensibili agli outlier.

La varianza ha un'unità di misura diversa da quella del dataset.

Si noti il fattore $\frac{1}{n}$ nella varianza, e allora poi negli altri indici da essa dipendenti. Certi testi e software danno $\frac{1}{n-1}$. La questione sarà approfondita in Statistica Inferenziale, ma anticipiamo la questione, peraltro numericamente poco influente per n grande:

> If the values instead were a random sample drawn from some large parent population (for example, they were 8 marks randomly and independently chosen from a class of 2 million), then one often divides by 7 (which is $n-1$) instead of 8 (which is n) in the denominator of the last formula. In that case the result of the original formula would be called the sample standard deviation. Dividing by $n-1$ rather than by n gives an unbiased estimate of the variance of the larger parent population. This is known as Bessel's correction.[(80)]

[80] da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce Standard deviation, in https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation, il 24 ottobre 2019

Nota. Grande varianza ovvero deviazione standard: valori dispersi. Piccola varianza ovvero deviazione standard: valori addensati presso la media.

La deviazione standard può essere considerata piccola oppure grande relazionandola alla media.

Per la varianza, esistono varianze più piccole (valori più addensati) o più grandi di altre (valori più dispersi) ma non ha molto senso considerare grande o piccola una singola varianza. Similmente la deviazione standard.

Esempio 1.

> the average height for adult men in the United States is about 70 inches (177.8 cm), with a standard deviation of around 3 inches (7.62 cm).([81])

Esempio 2. In un articolo scientifico([82]) hanno confrontato, mediante le deviazioni standard, la variabilità dell'ora dell'andare a dormire con l'ora dell'alzarsi in popolazioni di tipo primitivo, trovando maggior variabilità nel primo orario:

> The SD of sleep onset times exceeded the SD of sleep offset times

Il confronto fra due deviazioni standard di grandezze omogenee è ben sensato.

- Per i dataset visti in precedenza si calcolino i 5 indici sopradetti.

21.2 Covarianza; correlazione; retta di regressione

Dati 2 dataset numerici di uguale numerosità

$$X : x_1, ..., x_n \qquad Y : y_1, ..., y_n$$

[81] da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce Standard deviation, in `https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation`, il 24 ottobre 2019

[82] "Natural sleep and its seasonal variations in three pre-industrial societies", by Yetish G, Kaplan H, Gurven M, Wood B, Pontzer H, Manger PR, Wilson C, McGregor R, Siegel JM8. Curr Biol. 2015 Nov 2;25(21):2862-2868. doi:https://it.overleaf.com/project/6179b2b3c248087503c542f9 10.1016/j.cub.2015.09.046. Epub 2015 Oct 17.

si definisce la loro *covarianza* (ovvero *covarianza di 2 n-uple di numeri*, ovvero *covarianza osservata*)

$$Cov(x_1,...,x_n;y_1,...,y_n) := \frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+...+(x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})}{n}$$

dove $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono le medie dei 2 dataset. Si trova denotata anche anche $\sigma_{X,Y}$, oppure con $cov($... minuscolo. Si definisce anche l'*indice di correlazione di [Bravais-]Pearson*, o *indice di correlazione lineare* (e al posto della parola *indice* altri scrivono *coefficiente*)

$$\rho_{X,Y} := \frac{Cov(x_1,...,x_n;y_1,...,y_n)}{\sqrt{Var(x_1,...,x_n)Var(y_1,...,y_n)}} \qquad = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

e questo dà un'idea di come varino le y_j relativamente alle x_i: un indice prossimo a 1 suggerisce che al crescere delle x_i crescano linearmente le y_i, un indice prossimo a -1 suggerisce che al crescere delle x_i decrescano linearmente le y_i, e un indice prossimo a 0 indica la non presenza di tali relazioni approssimate. In ogni caso

$$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1 \ .$$

Coi dataset X : 2, 7, 4, 3, e Y : 3, -1, 0, 2 si calcoli l'indice di correlazione, e si rappresentino sul piano cartesiano i punti (x_i, y_i).
In un senso non banale, una retta $y = mx + q$ si avvicina meglio ai punti se ha coefficienti

$$m := \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X^2} \qquad q := \bar{y} - m\bar{x} \quad \text{equivalentemente: } m := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{X,Y}$$

e in questo caso si chiama *retta di regressione* (dietro, vi è il *metodo dei minimi quadrati*, che non approfondiamo).
Per esempio per i punti $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,-1)$, ovvero per i dataset X: $2,1,3$ e Y: $1,3,-1$, si trova $y = -2x+5$, che passa *esattamente* per i punti. è $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 1$, $\sigma_X^2 = \frac{2}{3}$, $\sigma_{X,Y} = -\frac{4}{3}$. E con $y_2 :=$ 3.14159265 si trova $y \approx -2.07x + 5.19$. Si facciano i disegni.

22 Note finali sulla Statistica Descrittiva

Ad un livello basico, nella Statistica Descrittiva **si vuole riassumere molti valori (*dataset*) con 1 valore o pochi valori, e/o con un diagramma**.

Quest'opera di sintesi non è banale.

Viene fatta per comprendere i dati, divulgarli, confrontarli. Alcuni lo fanno perfino per presentarli manipolativamente; allora noi dovremo attrezzarci conoscitivamente per non essere tratti in inganno.

Questo è centrale in Farmacia. Basta ridefinire 1 soglia, e qualche miliardata di persone da sane potrebbero trovarsi riclassificate come malate, verosimilmente bisognose di farmaci.
Leggiamo su un articolo([83]) del British Medical Journal:

> There's a lot of money to be made from telling healthy people they're sick. Some forms of medicalising ordinary life may now be better described as disease mongering: widening the boundaries of treatable illness in order to expand markets for those who sell and deliver treatments. Pharmaceutical companies are actively involved in sponsoring the definition of diseases and promoting them to both prescribers and consumers. The social construction of illness is being replaced by the corporate construction of disease.

22.1 Bugie, bugie cattive, e statistica

Da più di un secolo si dice "lies, damned lies, and statistics". Ai numeri si può far dire quel che si vuole o quasi.

[83] Moynihan R, Heath I, Henry D. Selling sickness: the pharmaceutical industry and disease mongering. BMJ. 2002 Apr 13;324(7342):886-91. doi: 10.1136/bmj.324.7342.886. PMID: 11950740; PMCID: PMC1122833.

Attenzione!

PARTE I – DATI VERI

22.2 La scelta dei parametri. Cosa misurare?

In questa trattazione elementare siamo sempre partiti da dati numerici, ma a monte c'è il problema di quali numeri considerare in una data situazione.

Se consideriamo un quadrato di lato 2 ovvero area 4, e 2 quadrati di lato 5 ovvero area 25, e volessimo rappresentare un "quadrato medio", facendo la media dei lati abbiamo 4 (con area 16), invece facendo la media delle aree abbiamo 18 (con lato $3\sqrt{2} \approx 4.24$).

Qual è il senso di quelle tabelle che mettono ai primi posti il peperoncino per contenuto di vitamina C? Il peperoncino si mangia, eventualmente, a grammi, mica a etti come certa frutta, che, certo, contiene meno vitamina C *all'etto*, ma ne contiene di più *per porzione* (*ragionevole*, per quanto ciò possa significare). La scelta di un diverso parametro cambia completamente l'impostazione della questione.

"Il Molise ultimo per decessi covid"

sì ne aveva solo 31, ad una certa data, meno di ogni altra regione, ma ha anche pochi abitanti. Considerando i decessi per 100mila abitanti ne aveva 10, più della Basilicata che ne aveva 8, pur avendo un numero maggiore di decessi. Non è più ultimo.

Se leggiamo

La regione X prima per tumori

potremmo farci l'idea che la regione X sia più inquinata, o meno assistita medicalmente, magari peggio governata da quel noto partito che ha la maggioranza nella regione X – associazioni d'idee che magari sono il motivo reale per cui è stato pubblicato quell'articolo sui media – ma il contenuto informativo di quel titolo è seminullo, e quelle argomentazioni che ci sorgono istintivamente sono

praticamente insensate. Potrebbe ben essere che nella regione X i tumori siano 10 volte meno probabili *per ogni singolo residente* che nella regione Y, ma la regione X ha più del decuplo di abitanti della regione Y, per cui *il numero assoluto di casi* della regione X sopravanza quello della regione Y, molto più inquinata e meno assistita medicalmente.
Nella situazione considerata, altrettanto legittimo sarebbe stato il titolo

La regione Y prima per tumori

e in un caso numerico estremo potrebbe essere vero addirittura

*Nella regione X la **minima** incidenza di tumori*

(Per una disamina del termine *incidenza*: `->Link`).

Anche qua la scelta di un diverso parametro cambia completamente l'impostazione della questione.

Numero assoluto dei morti: non dice nulla su inquinamento, malasanità...

Tasso di mortalità: serio indizio, su varie possibilità.

Il numero assoluto, spesso espresso da cifre ad alto impatto emotivo ("milioni di tumori"), da un punto di vista medico e farmaceutico ci dice meno della frequenza relativa, che in generale si potrà misurare in casi per 1 000 residenti, o per 100 000, o per milione. (Per evitare scritture come 0.000077, scarsamente leggibili: molto più chiaro, come nell'esempio del link sopra riportato, 7.7 casi per 100 000).
Si noti che la frequenza relativa corrisponde alla probabilià, per 1 singolo residente preso a caso. Per esempio 50 casi ogni 1000 abitanti dà una probabilità di $\frac{1}{20}$. Si tratta della concezione frequentista della probabilità.
La frequenza assoluta ha una diversa importanza: corrisponde alla *dimensione economica* complessiva della questione: è ovvio che se in un certo luogo ci sono più casi di una malattia usualmente trattata con un certo farmaco, là c'è un maggior *mercato* per quel farmaco.

In ambito medico e farmaceutico. Ragionando con la logica comune – sbagliata – trovare una riduzione nelle aritmie che causano morte è un buon risultato per un farmaco, e si verifica abbastanza facilmente; verificare la sopravvivenza a lungo termine è molto più oneroso (e in passato ha dato risultati opposti).

La sopravvivenza a 5 anni dalla diagnosi di cancro è un indice di altissimo valore ma richiede molto tempo e denaro; la riduzione della massa tumorale in un breve tempo si verifica prima.

Cosa misuriamo è un serio problema generale della Medicina e della Farmacologia.
Vogliamo massa tumorale ridotta? A 2 mesi o a 6 mesi o a 1 anno dall'inizio del trattamento, o quando? O vogliamo diminuita mortalità, ma, di nuovo, quando misurata? O vogliamo aumentata sopravvivenza complessiva? Oppure aumentata *progression-free survival*? O migliore *response rate*, tasso di risposta del tumore alla terapia valutato misurando qualche *biomarker*? O diminuita spesa? (Che anche quello conta). O migliorata qualità della vita? (Sotto-problema: misurata come?) O un po' tutto, con una media pesata con coefficienti da decidere? In ognuno di quei casi si otterranno risultati in generale diversi.
Leggiamo sul Journal of Clinical Oncology([84])

> produce results that are clinically meaningful to patients (ie, significantly improved survival, quality of life [QOL], or both)

(La riduzione della massa tumorale, così tanto usata, appare per certi versi la cosa che *meno* possa interessare il paziente).
Lo stesso discorso vale praticamente per ogni patologia.

Icasticamente:

L'operazione è riuscita ma il paziente è morto

[84] American Society of Clinical Oncology Perspective: Raising the Bar for Clinical Trials by Defining Clinically Meaningful Outcomes. By: Lee M. Ellis et al. DOI: 10.1200/JCO.2013.53.8009 Journal of Clinical Oncology 32, no. 12 (April 20, 2014) 1277-1280.

Leggiamo in un articolo scientifico:([85])

> The last few years have seen an increase in the number of randomized controlled trials (RCTs) of new agents in metastatic solid tumors using progression-free survival (PFS) as the primary end point. Some trials showing improvement in PFS, without a corresponding increase in overall survival (OS), have led to approval of new drugs and/or changes in standard of care. This suggests a growing belief in the oncology community that delaying progression in metastatic disease is a worthy goal, even if OS is not improved. But is a new treatment that improves PFS really an advance for patients? Or is it only lowering the bar to declare active some of our much-heralded new molecular targeted therapies?

22.3 Rispetto a quale standard fare le statistiche?

Una fonte di problematicità è quale standard scegliere. Se per esempio volessimo vedere se la carenza di una certa sostanza nel sangue è statisticamente correlata ad una malattia, avremmo – oltre al problema della diagnosi della malattia nei soggetti, problema medico che non considereremo – il problema di quali soggetti considerare carenti e quali no, in base alle analisi chimiche del sangue: infatti ci sono molti standard per i vari livelli delle sostanze nel sangue, e in generale per i parametri biomedici, come l'essere sovrappeso, e come la mortalità infantile e l'aspettativa di vita alla nascita, standard che variano nel tempo e nelle grandi entità scientifiche, sanitarie e/o geopolitiche ragionevolmente considerabili: Ministero della Salute italiano, Comunità Europea, OMS (Organizzazione Mondiale della Sanità), ONU, USA (NIH, CDC...), la rivista scientifica The Lancet e molte altre...

L'aspettativa di vita delle donne in Italia, e il ranking dell'Italia per essa, sarebbe([86])

[85] Progression-Free Survival: Meaningful or Simply Measurable? By: Christopher M. Booth, Elizabeth A. Eisenhauer. DOI: 10.1200/JCO.2011.38.7571 Journal of Clinical Oncology 30, no. 10 (April 01, 2012) 1030-1033. https://ascopubs.org/doi/full/10.1200/JCO.2011.38.7571

[86] Si veda Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce List of countries by life expectancy.

86.49 – 3^ secondo l'ONU (luglio 2015), dati 2010-2015
85.6 secondo l'OECD (2016), che considera solo stati OECD
85.1 – 12^-13^ secondo The World Factbook (2017)
84.8 – 7^ secondo l'OMS (maggio 2016), dati 2015
83.90 – 7^ secondo (un articolo di) The Lancet (2012).
Abbastanza variabilità per fare affermazioni molto diverse, pure autorevoli, specialmente usando il dato del ranking, molto fuorviante: per esempio San Marino viene considerato solo nella lista del World Factbook.

Gli standard variano nel tempo, e a seconda delle agenzie che li fissano, pur autorevoli.

Esempio. Attualmente (giugno 2019) leggiamo su sito governativo statunitense a proposito dell'anilina, in `https://www.atsdr.cdc.gov/substances/toxsubstance.asp?toxid=79`

> Cancer Classification: EPA: Probable human carcinogen. IARC: Not classifiable as to carcinogenicity to humans. NTP: Not evaluated

(Si veda per esempio il `Link ->`).

22.4 Illusioni percettive nella presentazione dei dati

In questo paragrafo usiamo sia lo standard del punto decimale che della virgola decime.

La dose giornaliera raccomandata di vitamina C è stata portata da 60 milligrammi a 90 milligrammi:
possiamo dire che adesso è del 50% maggiore
possiamo che prima era del 33% minore.
Ovviamente col primo modo diamo l'impressione di una variazione maggiore, almeno al lettore poco esperto di numeri.

L'epidemia di influenza del 2016/17 ha fatto circa 25 000 morti, circa il 28% in meno della prima ondata del covid-19 nel 2020 che ha fatto circa 35 000 morti, il 40% in più...

In linea generale, i titoli faranno più conseguenze dei testi sottostanti.

Se il partito dei Vispi Volpini un anno riceve lo 0,6% e l'anno dopo lo 0,9% (è un partito piccolo...) la televisione dirà che è cresciuto dello 0,3%, ma il Corriere dei Vispi Volpini dirà che il loro elettorato è aumentato del 50%, il che è vero.
(Magari anche un telegiornale lo dirà, chissà chi è il direttore...)

N.d.A. Ricordo, decenni fa, un esempio di presentazione fuorviante dei risultati elettorali del tipo "il partito A scende dal ...% al ...%, il partito B prende il ...% contro il ...% della volta precedente" dove nel profluvio di cifre e decimali l'ascoltatore medio ricorda solo che A *scende* e B *prende*, ma in effetti B scendeva più di A...

Fare raffronti con dati collaterali può permettere di titolare "aumento" un articolo che poi parla di un fenomeno in diminuzione, ma moltissimi si limiteranno a leggere il titolo.

In ambito medico, affermare che con diagnosi precoci si allunga la speranza di vita dalla diagnosi può essere molto fuorviante: "Una volta il paziente viveva mediamente due anni dalla diagnosi, adesso dodici anni"... ma facendo la diagnosi mediamente quanti anni prima?

Attenzione alle fallacie della memoria: vi pare di ricordare che secondo l'Organizzazione Mondiale della Sanità ogni anno 12.6 milioni di persone muoiono a causa dell'inquinamento, e adesso leggete che ogni anno 4.2 milioni di persone lasciano questo mondo a causa dell'inquinamento dell'aria? Basta rileggere con attenzione.

Attenzione soprattutto alle rappresentazioni grafiche.
Iniziare un diagramma a colonne o un grafico da un certo tempo invece che da un tempo precedente può permettere di fare affermazioni completamente diverse, magari entrambe formalmente vere, ma che genereranno emozioni e poi reazioni completamente diverse.
Grafici che sull'asse delle ordinate non iniziano da 0 possono dare l'impressione di variazioni enormi, anche raddoppi o dimezzamenti, a variazioni minuscole.
Diagrammi a torte tridimensionali in rappresentazione prospettica possono far apparire più grandi certi dati rispetto agli altri.

22.5 Di cosa parliamo?

Diamo solo un cenno di un argomento ciclopico. Ogni persona vive immersa in un flusso di informazioni che gli arrivano, in base al quale costruisce la sua percezione della realtà, che lui crede vera.
Anche se tutte quelle informazioni fossero vere (per ipotesi assurda, ovvio) l'immagine complessiva che l'individuo si forma è in generale (molto!) distorta: una *diversa scelta* di informazioni *altrettanto vere*, da far arrivare coi media – dal livello più basso fino agli articoli scientifici – creerebbe in quella stessa persona un'immagine del mondo completamente diversa, per molti versi quasi opposta.

Supponiamo qua in via ipotetica che sul pianeta Kepler-22 b, simile alla Terra, il danno, in qualche modo misurato, delle sigarette si disponga a campana gaussiana, con un'ampia zona mediana di un danno medio per un grande generalità di fumatori. E che il danno delle sigarette elettroniche si disponga analogamente, ma più a sinistra sull'asse delle ascisse, cioè con un danno mediamente minore. Per quanto il danno sia mediamente minore, in moltissime persone è grave, per molte addirittura gravissimo, per

alcune perfino maggiore di quello medio delle sigarette. Ecco, dai, invece di fare alcuni milioni di articoli su quelli mediamente meno danneggiati (impossibile a farsi), e invece di dire che in media il danno è minore (chi mai ci obbliga?) facciamo un bell'articolo titolando "ragazzo fuma sigarette elettroniche e ha i polmoni devastati".
La gente dirà: ecco, vedi, non serve, soldi buttati, meglio continuare con le sigarette normali!
È impressionante quante persone ragionino per casi singoli, appresi dai media, senza garanzia che siano rappresentativi di situazioni medie invece che eccezionali.

22.6 Cherry picking – bias di selezione

Affine alla questione precedente. Scegliere le prove favorevoli a una tesi e ignorare quelle contrarie. Se un proprietario di media volesse sostenere la tesi che bisogna chiudere le scuole per evitare il propagarsi del covid, potrebbe cercare di citare affermazioni favorevoli alla sua tesi, al livello autoritativo maggiore possibile, trascurando le prove contrarie; e similmente se vuole far passare la tesi opposta. Troveràrticoli scientifici per qualunque dei 2 desiderata. L'articolo di review sistematica in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8375447/ considera decine articoli scientifici di alto livello (dopo averne scartati migliaia di altri) e verifica che metà trovano che la chiusura delle scuole ha ridotto la diffusione del contagio, e metà hanno trovato che non l'ha ridotto.

Mentre le funzioni elementari di base della Matematica hanno andamenti molto regolari, come x^2 o x^3, e similmente le successioni propriamente dette come quella di Fibonacci e quella dei fattoriali, le successioni di valori numerici rappresentativi di fenomeni reali normalmente presentano nel tempo fluttuazioni, alternando crescite a diminuzioni.

Esempio, morti in Italia:

2013 600 000
2014 599 000 −1 000 rispetto all'anno precedente
2015 653 000 +53 000
2016 616 000 −37 000
2017 650 000 +34 000
2018 632 000 −18 000
2019 645 000 +13 000

Consideriamo per esempio il grafico *Sperimentazioni autorizzate dall'Autorità competente* a pagina 10 del documento La Sperimentazione Clinica dei Medicinali in Italia – 17° Rapporto Nazionale – Anno 2018 dell'AIFA, Agenzia Italiana del Farmaco. L'ultimo dato è del 2017 e relativamente ad esso potremmo dire *veridicamente*

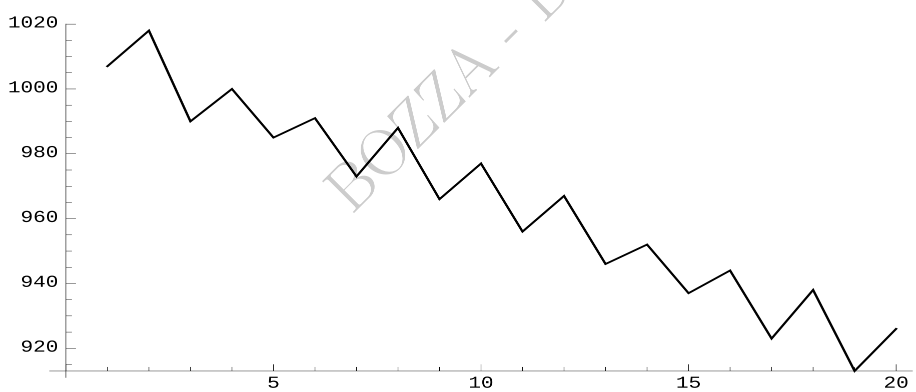
aumentate rispetto al 2000

aumentate rispetto a 15 anni prima

diminuite rispetto all'anno precedente

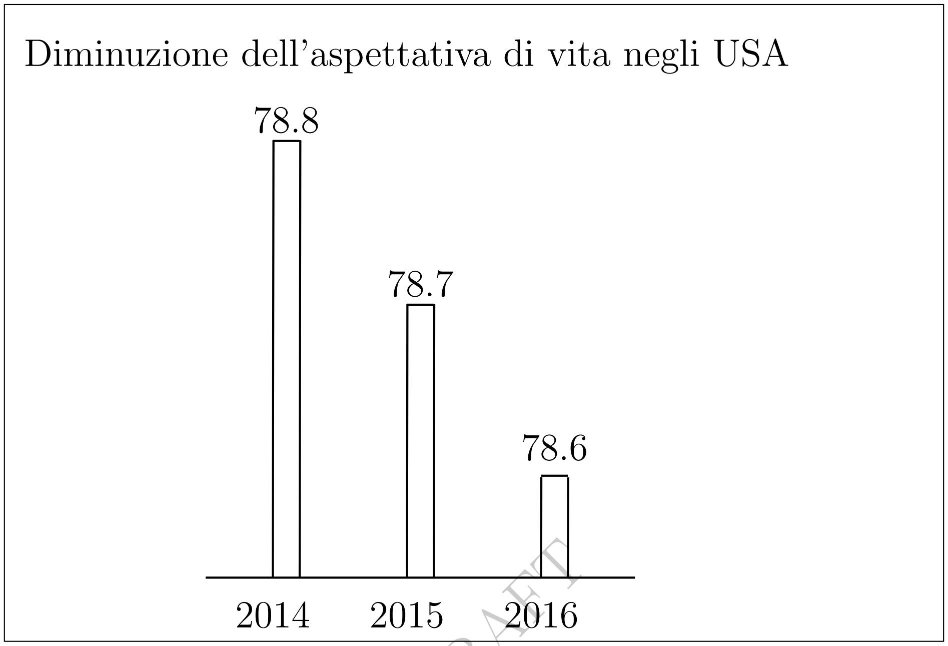
al livello minimo da 10 anni

ottenendo nel lettore emozioni diverse, che potranno supportare interventi decisionali diversi.
Si noti che anche in situazioni di palese diminuzione sostanziale sul lungo periodo, tali fluttuazioni possono permettere in vari anni di parlare di aumento. E negli anni in cui proprio non si può dirlo... si può parlare della situazione dell'anno precedente, che magari vedeva un aumento rispetto all'anno precedente – mica il lettore sa qual è l'ultimo dato rilasciato, in generale. Agendo così, si potrà *ogni anno* parlare di *aumento* in questo esempio di evidente *sostanziale diminuzione*:



22.7 Illustrazione di un triplice esempio reale

Aumento dell'aspettativa di vita negli USA: link<--



Aumento del tasso di mortalità negli USA:

2009	7.9
2010	8.0
2011	8.1
2012	8.1
2013	8.2
2014	8.2
2015	8.4
2016	8.5
2017	8.6

Capire questi diagrammi richiede:

1) conoscere la Statistica Descrittiva, notando in particolare che
   il diagramma considera solo gli ultimi 3 anni;
   il diagramma ha una linea base posta a circa 78.5 anni.

1 bis) conoscere la Demografia, che possiamo considerare semplificatamente una branca specialistica della Statistica Descrittiva. Questo ci farebbe capire che non è per nulla strano che si alzino da tempo i tassi di mortalità, anche prima della riduzione dell'aspettativa di vita. Il tasso di mortalità può ben alzarsi mentre l'aspettativa di vita si alza, proprio perché la popolazione mediamente invecchia, in compresenza di un fattore demografico completamente diverso: la scarsità di nuovi nati.

2) Conoscere la situazione reale il che è completamente diverso dal guardare questi numeri o grafici.
Per una parziale spiegazione della situazione reale dietro alla diminuzione dell'aspettativa di vita negli USA si segua questo link<--.

22.8 Conclusioni

Pensare di aver capito una situazione perché si è vista una qualche statistica o lista di numeri è in generale *ingenuo*, e i grafici sono, per le persone non istruite, perfino più fuorvianti. Le parole, poi, possono essere ancora più ingannevoli anche se sembrano esprimere dati oggettivi, numerici: aumento, diminuzione...

È necessario acquisire una buona competenza statistica per non essere tratti in inganno. Sia da errori fatti in buona fede, che da manipolazioni volontarie, fatte da soggetti interessati.

Superato il problema della comprensione formale di statistiche e grafici, il problema
delle statistiche
e dei grafici,
e perfino dei dati grezzi/completi,
è che ce ne possono sempre essere altri, che non stiamo vedendo ovvero non ci stanno mostrando, che cambierebbero completamente la nostra prospettiva sui fenomeni considerati.

In linea generale, le statistiche economiche dei media non valgono la carta su cui sono scritte. Per le statistiche scientifiche, non è vietato sperare una maggiore oggettività.

Molti testi divulgativi affermano che *la maggior parte* dei contagi da toxoplasmosi non avvengono dai gatti ma dalla sporcizia. Anche se questa statistica –

praticamente impossibile da verificare – fosse vera, quegli Autori magari trascurano di dire, nei loro articoli divulgativi, che sebbene il toxoplasma si trovi in tanti animaletti, si riproduce solo nei felini, per cui se tutti i gatti venissero inceneriti (orrore!) la toxoplasmosi semplicemente sparirebbe dall'Italia, dove praticamente l'unico felino che frequenta l'uomo è il gatto.

I gattofili non costituiscono una lobby molto pericolosa e allora qua possiamo prendercela scherzosamente con loro senza rischi, per spiegare cosa vuol dire comunicare una statistica fuorviante perché omette fatti che cambierebbero radicalmente la prospettiva.
Ma la triste verità per uno statistico è che le notizie di statistica medica che arrivano al grande pubblico dalla televisione e dai media *lasciano a desiderare*, diciamo così.

Ulteriori problematiche si presentano nella Statistica Inferenziale.

If you torture the data long enough, it will confess to anything. (In questo `link<--` è in articolo su sito governativo statunitense).

PARTE II – DATI QUASI VERI (QUASI FALSI)

Già abbiamo visto in 18.2 le problematiche del trasformare dati ordinali in dati numerici. Nella pratica, se abbiamo già il dataset ordinale ma siamo ancora liberi nel fissare le corrispondenze numeriche, possiamo largamente manipolare il risultato.

22.9 Il valore anomalo: outlier

Per un'infinità di motivi, in un dataset ci può essere qualche valore che il ricercatore ritiene *assurdo*, e tenderà ad eliminarlo prima di procedere con qualunque analisi dei dati stessi, per non comprometterla.

Questi *outlier*, valori anomali ovvero aberranti, provengono da risposte scherzose a questionari, truffe ("reddito zero"...), malfunzionamento di apparati, confusione fra punto decimale e virgola decimale, confusione fra milligrammi e microgrammi, eccetera. Ma talvolta sono dati *veri* benché *eccezionali*.

La decisione di quali valori siano da considerare outlier ed eventualmente da eliminare, può essere

soggettiva

oppure dettata da formule, che comunque non considereremo, e in ogni caso è problematica, anche perché ce ne sono sono varie. In una ricerca seria *et* onesta, si *dovrebbe* avvertire se sono stati eliminati outlier.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce "Outlier", e non è chi non veda le pericolose conseguenze di ciò:

> There is no rigid mathematical definition of what constitutes an outlier; determining whether or not an observation is an outlier is ultimately a subjective exercise. There are various methods of outlier detection. (...) Deletion of outlier data is a controversial practice

22.10 Omissione di dati ritenuti poco significativi

Dati ritenuti poco significativi vengono talvolta omessi, per esempio San Marino da molte statistiche; facendoli rientrare si possono ottenere affermazioni molto diverse, ma per certi versi effettivamente meno significative.

22.11 "Fatta la legge, trovato l'inganno."

Fissato uno standard per valutare statisticamente un qualche aspetto della realtà, qualcuno trova conveniente, diciamo così, fare azioni che migliorano di molto la valutazione statistica con scarso o nullo miglioramento della realtà. Se per esempio una legge attribuisce ai *"comuni montani"* particolari finanziamenti, fissando ad una certa altitudine del municipio la denominazione di "comune montano", state sicuri che qualche comune sposterà la sede del municipio, più a monte... *et voilà*, il comune – esattamente lo stesso di prima – diventa "montano" (e ottiene i finanziamenti).

In ambito scientifico e biomedico in particolare, a rischio, diciamo così, sono le statistiche che valutano la *credibilità percepita* ("impact factor") delle riviste scientifiche; si veda per esempio *A user's guide to inflated and manipulated impact factors*, di John P. A. Ioannidis e Brett D. Thombs, European Journal of Clinical Ivestigation (17 giugno 2019) Link->

22.12 Traslazioni e confusioni linguistiche

Spesso le statistiche vengono presentate con quelle che potremmo considerare "traslazioni di linguaggio".
Per necessità di sintesi, soprattutto nei titoli – a non voler pensare male.

I cani non sono la terza causa di morte nel mondo, no. Sono, più precisamente, la terza causa di morte *fra quelle causate da animali*, dopo zanzare e serpenti.

Titolo (vero, al momento ancora reperibile in rete, ottobre 2020):

Piene al 150% le rianimazioni in Abruzzo, prima Regione in Italia ad esaurire i posti letto

ATTUALITÀ / REGIONE ABRUZZO Venerdì 16 Ottobre 2020

Più discretamente la prestigiosa agenzia di stampa ANSA, nel testo di un articolo, non nel titolo, e con qualche parola in più:

> Secondo il report settimanale dell'Alta Scuola di Economia e Management dei Sistemi Sanitari dell'Università

> Cattolica, campus di Roma (Altems) l'Abruzzo ha saturato il 150% dei posti letto aggiuntivi implementati

Dunque, vediamo che hanno saturato dei posti letto *aggiuntivi*, non quelli ordinari che avevano già prima della crisi.
Un'attenta analisi delle fonti che nessun normale lettore farà rivela che si tratta di 10 posti in terapia intensiva – non sappiamo quanti eventualmente per covid, di cui parlano gli articoli considerati, o incidenti stradali o altro – su 7 di certi posti definiti "aggiuntivi", aggiunti per la crisi covid, mentre *molti più di 100 restavano non occupati.*

È stato tremendo, ho fatto 3 ore di straordinario
(Nelle 8 ore lavorative ordinarie riposavo)

Naturalmente questi titoli e queste notizie, oltre all'incalcolabile danno di ansia e paura che possono procurare alle persone fragili – in un determinato tempo e luogo nell'epidemia covid del 2020 si è constatato un *triplicamento* degli infarti, forse almeno in parte dovuti alla paura di morire – manipolano il consenso popolare verso una o l'altra azione politica, che decreterà questo o quell'altro *spostamento di risorse* o, addirittura, determinate limitazioni alla vita delle persone.

22.13 Il problema della discrezionalità

Nella rilevazione dei dati può essere presente un ampio margine di discrezionalità: classificare al microscopio cellule in "regolari/irregolari", "simmetriche/asimmetriche"...

Esempio lampante di discrezionalità:[(87)]

> "Moribund larvae were considered dead and included in the analyses."

[87] Nartey, Rita et al. "Use of Bacillus thuringiensis var israelensis as a viable option in an Integrated Malaria Vector Control Programme in the Kumasi Metropolis, Ghana." Parasites & vectors vol. 6 116. 22 Apr. 2013, doi:10.1186/1756-3305-6-116

Le cause di morte

Si consideri la problematica dei referti di causa di morte: le persone in generale giungono alla morte con diverse patologie concomitanti (si veda *comorbidità*).
E alcune muoiono pure dissanguate in incidenti automobilistici, in realtà causati dalle loro patologie (non è il dissanguamento la "vera" causa, a monte). Si pensi per esempio all'incidente automobilistico da crisi ipoglicemica.

Freddie Mercury è morto di polmonite (causa formale) o di AIDS (causa sostanziale)?
Anche alcol e droga forse non gli hanno fatto molto bene. Ma la causa di morte non viene ripartita in percentuali.

Il problema diventa critico per concomitanti patologie entrambe registrabili come causa di morte. Se sul piano di verità entrambe hanno favorito la morte, nelle statistiche ufficiali una sola l'ha causata, e quelle statistiche hanno conseguenze sulle politiche sanitarie e farmaceutiche – magari con la mediazione dei media.

Si pensi all'enorme difficoltà che può esserci dietro questa scelta:
morto per leucemia ma con morbillo
morto con leucemia ma per morbillo.

La decisione di cosa scrivere spetta a persone che sono generalmente molto competenti, tuttavia la situazione talvolta può essere complessa.

A proposito del Coronavirus un virologo avrebbe (2020) affermato:

> Tutte e 7 le vittime avevano anche altre patologie, quindi sarebbe più opportuno parlare di Coronavirus come concausa non come causa diretta.([88])

Molto problematico da un punto di vista statistico questo passaggio di Repubblica:

[88] Matteo Bassetti, direttore della clinica di malattie infettive dell'ospedale policlinico San Martino di Genova, citato in https://www.primocanale.it/notizie/vittime-coronavirus-l-esperto-con-l-influenza-probabilmente-sarebbero-morti-lo-stesso--216491.html, letto il 28 febbraio 2020

> Si tratta in gran parte inoltre - viene precisato - di pazienti contagiati dal virus nei mesi scorsi, nel frattempo negativizzatisi, ma che su indicazione del Ministero della Sanità vanno registrati comunque come soggetti con infezione da Covid.

Per capire meglio la complessità della questione, su un sito internet del Ministero della Salute leggiamo([89])

> il virus influenzale non viene identificato o perché **non ricercato** o perché il decesso viene attribuito a polmoniti generiche.

(Enfasi aggiunta).
L'attribuzione di una causa di morte piuttosto che un'altra può avere grandi ripercussioni nelle decisioni di politica sanitaria, sostenuta dalle istanze dei cittadini, mediate o indirizzate dai media.

PARTE III – DATI FALSI

22.14 La falsificazione dei dati

Finora abbiamo considerato solo dati *veri*, magari presentati con omissioni o in modo fuorviante ma comunque veri: nella realtà pratica, esiste anche la falsificazione dei dati.
Per esempio leggiamo([90])

> Giugno 2019 [...] Scienziati impegnati nella ricerca sul cancro hanno manipolato le immagini dei loro studi, riuscendo così a ottenere successo, carriera, nuovi fondi per le loro ricerche. La Procura (...) ha appena concluso un'indagine lunga e complessa, che fornisce un quadro devastante

e volendo troviamo([91]) molti dettagli fra cui

[89] In https://www.epicentro.iss.it/influenza/sorveglianza-mortalita-influenza, accesso il 9 marzo 2020.
[90] In https://www.ilfattoquotidiano.it/in-edicola/articoli/2019/06/30/ricerca-\sul-cancro-risultati-ritoccati-per-ottenere-milioni/5291204/
[91] https://codacons.it/ricerca-sul-cancro-risultati-ritoccati-per-ottenere-\milioni/

la procura deve archiviare (...) non è reato

Dal punto di vista giuridico, le cose stanno nei termini seguenti.
Le *bugie* possono essere eventualmente immorali, ma non sono illegali, tranne in alcune fattispecie elencate dalla legge: il falso in atto pubblico, il falso in bilancio, il falso ideologico, eccetera, ma assolutamente non è compreso il falso in articolo scientifico, che quindi è assimilabile a una bugia fra privati cittadini – anche se l'articolo contiene descrizioni di esperimenti mai avvenuti, cioè non semplici *errori* ma falsità scritte con dolo.
Naturalmente, un cittadino che ritenesse che dalla pubblicazione di affermazioni false in un articolo scientifico gliene sia conseguito un danno economico, o un danno biologico, potrebbe ipotizzare una querela, o una denuncia – ma si capisce bene che in generale sarà impresa ardua, specialmente per articoli scientifici che non dicono bene di farmaci specifici, ma facciano *Scienza di Base*.
Tuttavia, l'autore truffaldino rischia pur sempre qualcosa.
Se egli è, come avviene quasi sempre, dipendente di un'istituzione scientifica (per esempio un'università), o anche solo affiliato scientificamente ad essa, è ben probabile che la pubblicazione di dati deliberatamente falsificati sia contraria al codice deontologico dell'istituzione. Allora al falsario l'istituzione può comminare una sanzione disciplinare in base al proprio regolamento, per violazione del codice deontologico (comunque solo in base a regolamenti e non a leggi, e quindi ad un livello molto più basso: le pene detentive sono escluse per la violazione di regolamenti).
Inoltre se la falsificazione diviene di dominio pubblico, l'istituzione può rivalersi contro il truffaldino per avere il risarcimento per danno di immagine - con una denuncia o querela (e quindi al livello di legge).
Si noti comunque che mentre la Giustizia tende a perseguire le violazioni delle leggi (cioè i reati), l'istituzione scientifica avrebbe in generale tutto l'interesse a occultare o almeno a minimizzare la violazione del regolamento (avvenuta con la falsificazione dei dati) per evitare un danno d'immagine, e ciò fa intuire come verosimilmente andrebbero le cose.

Esercizio$_{\mu}$ Si afferma che un intervento del 1845 ha causato una rapida diminuzione del parametro X, e si presenta questo diagramma a colonne:

```
1845 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1846 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1847 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1848 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
1849 XXXXXXXXXXXXXXXXX
1850 XXXXXXXXXXXXXX
```

È plausibile quell'affermazione? Ecco un dataset più completo:

1842 7.68
1843 6.14
1844 4.92
1845 3.93
1846 3.19
1847 2.58
1848 2.09
1849 1.69
1850 1.37

(Risposta: no, non è plausibile. Infatti fino al 1845 il parametro diminuiva circa del 20% annuo e poi circa del 19%).

Sezione A2 – Calcolo Infinitesimale

Il Calcolo Infinitesimale comprende essenzialmente:

- ⋄ La teoria dei limiti (delle successioni e delle funzioni)
- ⋄ La teoria delle derivate, o Calcolo Differenziale
- ⋄ La teoria delle serie (numeriche, e di funzioni)
- ⋄ La teoria dell'integrale

V – Limiti e derivate

23 Limiti di successioni

Vogliamo esprimere il comportamento di una successione (per esempio a_n) quando il suo indice (in questo caso n) cresce indefinitamente, definendo il concetto di limite (della successione, e, nella lezione successiva, di una funzione).

23.1 Un caso tipo: il comportamento del fattoriale

Sappiamo che il fattoriale di, per esempio, 1, è 1, e di 5, per esempio, è 120, e di 10, per esempio, è 3 628 800. Chiedersi quanto fa in $n = +\infty$ di per sè non ha senso perchè l'infinito non è un numero naturale, tuttavia vogliamo fare proprio qualcosa del genere: esprimere il comportamento di $n!$ per n ´´grandissimo". Diremo che il limite di $n!$ per n che tende a $+\infty$ è $+\infty$ e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

Faremo molte precisazuioni ed estensioni ma quresta è la sostanza: esprimere il comportamento di una successione quando il suo indice cresce indefinitamente.

23.2 Le successioni e il loro eventuale limite

In questa Lezione consideriamo successioni, cioè funzioni definite su $\mathbb{N}$, o sue semirette come $n \geq 1$ oppure $n \geq 2$. Piuttosto che indicarle con $f(n)$ oppure $g(k)$ oppure $s(m)$, che comunque si potrebbe, le indicheremo con x_n, a_m, b_k o simili scritture.
Per esempio, con l'indice n: $x_n := n!$, $a_n := n^2$, $b_n := \frac{1}{n}$.
Ci interessa il "comportamento limite" per n che tende all'infinito:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \qquad \text{(Altri scrivono } {}_{n\to\infty} \text{ invece di } {}_{n\to+\infty}\text{).}$$

Nella Lezione successiva considereremo non solo funzioni a_n ovvero $f(n)$ con n che varia in $\mathbb{N}$, cioè le successioni, ma funzioni $f(x)$ definite in $\mathbb{R}$ o suoi sottointervalli, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, e allora sarà possibile considerare x che tende a $-\infty$ oppure a un numero.

Torniamo allora alle sole successioni, e n tenderà sempre a $+\infty$.

Semplificando al massimo, le successioni di interesse in Farmacia sono di 4 tipi che ora vedremo.

Esempio 1 del tipo I: successioni ricorrenti. Consideriamo ora la successione a_n di Fibonacci, a suo tempo definita per ricorrenza:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...$$

Ci sembra, ed è vero e si potrebbe dimostrare, che i valori supereranno qualunque soglia, crescendo indefinitamente. Scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

e il senso del limite $+\infty$ è

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, M)\, (\exists\, \bar{n})\; n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M.$$

Consideriamo ora lo spazio che ha a disposizione ogni microbo nel volume iniziale fisso, diciamolo 1 in qualche opportuna unità di misura, per esempio il centimetro cubo, il pollice cubo, o una unità di misura da noi inventata in modo che valga proprio 1:

$$\frac{1}{a_n}$$

I valori sono

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13} \dots \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che a_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

Più in generale si dà il caso, con altra successione x_n, e $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L \qquad \text{(o invece di n, qualunque variabile, p. es. } k\text{)}.$$

Il significato è di un indefinito avvicinamento, con o senza raggiungimento del limite L. Più precisamente

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \bar{n})\; n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon\, .$$

Cioè, fissato un numer(ett)o positivo, chiamiamolo ε, da un certo punto in poi x_n dista dal limite meno di ε.

Esperienza pratica. Si provi con la calcolatrice a fare la radice quadrata di un numero scelto a piacere, poi a fare la radice quadrata del risultato, e così via: a quale limite tende la successione dei valori? (Tende a 1).

Esempio 2 del tipo I: successioni ricorrenti – il Modello Malthusiano. La popolazione – di microbi o quant'altro – si espande nel tempo scandito da n, proporzionalmente alla sua numerosità (detto semplificatamente: a molti microbi seguono quegli stessi microbi più molti figli di microbi, proporzionalmente al tasso di accrescimento):

$$a_{n+1} := a_n + c \cdot a_n \qquad a_0 := \text{popolazione iniziale}$$

con c il *tasso di accrescimento*. Ecco per esempio il caso $c := 2$:

$$a_0,\ 3\,a_0,\ 9\,a_0,\ 27\,a_0...$$

per esempio con $a_0 := 1000$

$$1\,000, 3\,000, 9\,000, 27\,000...$$

Si può dimostrare che la successione a_n ammette una rappresentazione *in forma chiusa*

$$a_n = (c+1)^n\, a_0$$

(che è funzione "di tipo esponenziale", in inglese si parla di *exponential functions*) e se $c > 0$ si ha un vero e proprio accrescimento verso $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{se } c > 0$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello prima detto.
Invece se $-1 < c < 0$ il comportamento è molto diverso, per esempio con $c := -\frac{1}{2}$ abbiamo i valori

$$a_0,\ \frac{1}{2}a_0,\ \frac{1}{4}a_0,\ \frac{1}{8}a_0...$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che a_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$$

e il senso del limite 0 è quello prima detto per L, numero.

> Si provi con stessa successione del Modello Malthusiano a scrivere i primi 7 valori numerici con $a_0 := 100\,000$, prima con $c := -0.3$ e poi con $c := 0.3$.

E ovviamente con $c := 0$ abbiamo un equilibrio fra nati e morti ovvero tasso di accrescimento nullo e in quel caso la popolazione resta costante:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0 \qquad \text{se } c = 0.$$

Nota sull'accrescimento di Fibonacci o Malthus. Una popolazione microbica o altra, che si espandesse con quelle leggi, tenderebbe ad un'espansione infinita; nella realtà ad un certo punto interverranno meccanismi che di fatto sospenderanno la validità della legge di Malthus o di Fibonacci nel rappresentare la numerostà della popolazione. Questo avviene, se non altro, perché gli organismi da un certo punto in poi inevitabilmente si ostacolano a vicenda in modo significativo, anche per mancanza di spazio, come visto nell'Esempio 1 del Tipo II.
Così, piuttosto che tendere all'infinito esponenzialmente, ad un certo punto l'accrescimento in generale rallenterà, producendo un tratto di sigmoide. Ed eventualmente poi decrescerà, fino ad estinguersi o quasi, producendo un grafico piò meno a campana: si veda la figura a questo `link->`.

Esempio del tipo II: successioni definite "coi puntini".
Il fattoriale

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

assume i valori

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040\ldots$$

Si ha

$$\forall\, n > 0 \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \geq n$$

e già n tende a $+\infty$, e allora anche $n!$ che come appena visto gli sta sopra:

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello sopra esposto, valido per qualunque successione.
(Il fattoriale ricorre ampiamente nel Calcolo delle Probabilità).

Esempio 1 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1)^n$ ha i valori

$$+1, -1, +1, -1, +1...$$

e non esiste il limite:

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n.$$

Questa successione consente nella programmazione informatica – per esempio con l'onnipresente in campo commerciale e scientifico Excel – di distinguere i numeri pari dai numeri dispari. (Esistono anche altri modi). In particolare

$$\frac{3 + (-1)^n}{2}$$

produce, a partire da $n := 1$, i valori

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1...$$

che può consentire per esempio di produrre i turni in farmacia di Aldo e Bianca nei vari giorni dell'anno, alternandoli secondo il numero ordinale del giorno (per esempio al 1 febbraio corrisponde il numero 32, pari: lavora Bianca). Oppure per programmare con un software l'apertura automatizzata di sportellini 1 e 2, a giorni alterni, in un allevamento di animaletti.

Esempio informatico. Si consideri il display ai LED programmabile della farmacia *Al Cuore Vispo* che dispone della funzione

`ordinalNumberOfDay`

e vuole esporre a giorni alterni i messaggi

```
STRING(1):=Buongiorno, allegro ti sia il giorno!
STRING(2):=I nostri clienti campano cent'anni!
```

Ciò si potrà ottenere programmando qualcosa come

```
display(STRING((3+(-1)^ordinalNumberOfDay)/2))
```

Esempio 2 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1)^n \cdot n$ ha i valori

$$+1, -1, +2, -3, +4, -5, +6, -7, +8, -9, +10...$$

e alcuni Autori dicono che va a ∞, l'infinito senza segno, ma in questa trattazione elementare diremo invece che il limite non esiste

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot n$$

e similmente diremo per successioni che oscillano senza "assestarsi".

Esempio 3 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $\frac{(-1)^n}{10^n}$ ha i valori, per $n \geq 1$,

$$-0.1, +0.01, -0.001, +0.0001...$$

e si capisce bene che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Similmente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

e similmente il limite è 0 se il numeratore è *limitato* (cioè si mantiene fra 2 numeri), e il denominatore $\to +\infty$.

Successioni del tipo IV: prolungabili ai numeri reali. Per successioni come

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

che potrebbero essere prolungate ovvero "estese" ai numeri reali

$$f(x) := \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

(si noti che ciò non si può fare banalmente per i tipi I, II e III) il limite a $+\infty$ sarà trattato nella prossima lezione.

=====================POSTILLA=====================

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Ordine di grandezza di un numero positivo Come abbiamo già detto, ogni numero positivo x ammette una scrittura

$$x = a \cdot 10^n$$

con $1 \le a < 10$ e n intero: ...−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...
Adesso aggiungiamo che n si chiama **ordine di grandezza** di x e che

$$n = \lfloor \lg x \rfloor$$

cioè

$$ordine\, di\, grandezza\, di\, x \;=\; parte\, intera\, di\, lgx$$

Ma altri Autori definiscono con condizioni su a diverse da $1 \le a < 10$. (Wikipedia in inglese ne dà altre 2).
Qualunque definizione di ordine di grandezza si usi per 2 numeri positivi,

se hanno ugual ordine di grandezza il massimo non supera il decuplo del minimo

cioè sono simili almeno molto molto vagamente, e

se hanno ordini di granbdezza m e $m+1$ il massimo non supera il centuplo del minimo (ma in generale sarà molto molto vagamente il decuplo)

5 è l'ordine di grandezza del numero di capelli di una persona

11 è l'ordine di grandezza del numero di neuroni di un uomo

11 è l'ordine di grandezza del numero di stelle della Via Lattea

13 è l'ordine di grandezza del numero di globuli rossi di un uomo (3.0×10^{13})

Quindi il numero di globuli rossi di un uomo è molto vagamente il centuplo dei suoi neuroni (2 ordini di grandezza di differenza) e del numero di stelle della Via Lattea.

L'ordine di grandezza è molto usato nelle Scienze applicate per fissare le idee sulla grandezza approssimativa di un numero, per agili confronti, semplificandolo all'estremo in un singolo numero intero, spesso fra -20 e 20.
Ma la grossolanità dell'approssimazione è mostata dal fatto che

9 è l'ordine di grandezza del numero di persone del mondo

come se fossero un miliardo e invece sono quasi 8 miliardi.
==============FINE===POSTILLA================@

24 Limiti e continuità

Ci occupiamo del comportamento di una funzione $f(x)$

$$f : I \to \mathbb{R}$$

essendo I

intervallo (p.es. $]a, b[$ o $[a, b[$ con eventualmente b infinito) oppure

unione finita di intervalli (per esempio l'unione di $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$) oppure

unione infinita non troppo "capricciosa" di intervalli (per esempio $\operatorname{dom} \tan x$)

quando $x \to +\infty$, com'era nelle successioni, oppure

$x \to -\infty$ oppure

$x \to x_0 \in \mathbb{R}$, cioè un "numero finito":

$$\lim_{x \to qualcosa} f(x)$$

Esempi.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{x} = 0 \qquad \text{esempio termodinamico: } V = \frac{cost}{p} \text{ (isoterma)}$$

al tendere all'infinito della pressione il volume andrebbe a 0, se il gas restasse ideale.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{10}{x} = +\infty \qquad \text{esempio termodinamico: } p = \frac{cost}{V} \text{ (isoterma)}$$

al tendere a 0 del volume la pressione andrebbe all'infinito, se il gas restasse ideale.

La scrittura $x \to x_0^+$, qua sopra, significa che x tende a 0 da destra ovvero da valori maggiori di x_0. E similmente esiste $x \to x_0^-$.

Dai grafici apprendiamo che

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e similmente	$x^1, x^3 ... x^\alpha$ *con* $\alpha > 0, \sqrt{x}, \sqrt[n]{x}$
$\lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty, \qquad b > 1$	e 0 se $0 < b < 1$
$\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0$	$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0, \qquad b > 1$	e $+\infty$ se $0 < b < 1$
$\lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to0} \lg x = -\infty$	$\lim_{x\to0} \ln x = -\infty$ (0^+ in effetti)
$\lim_{x\to-\infty} x^{dispari\,positivo} = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[dispari\,positivo]{x} = -\infty$
$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$	similmente $-\infty$, *e* cos *e* tan

Esempio 1. Guardando il grafico, per la campana gaussiana vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

e similmente per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

e scriveremo i 2 limiti insieme in questo modo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

Esempio 2. La concentrazione del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0)$$

al tendere del tempo t all'infinito:

$$\lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} =$$

per proprietà delle potenze

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(\left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^{-1}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

per proprietà dei logaritmi

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

per definizione della potenza con esponente intero negativo

$$= \lim_{t\to+\infty} u_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10\,anni}} =$$

ed essendo la base fra 0 e 1 esclusi, e l'esponente va a $+\infty$,

$$= 0$$

Cioè la concentrazione va a 0 al tendere del tempo t all'infinito.

24.1 Limiti di successioni prolungabili ai numeri reali

Di successioni come

$$\ln n \qquad 2^n$$

$$\varphi^n \quad \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n$$

cioè prolungabili ovvero "estendibili" da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, per il limite a $+\infty$ considereremo il corrispondente limite delle funzioni prolungate

$$\ln x \qquad 2^x$$

$$\varphi^x \quad \left(1 - \tfrac{1}{x}\right)^x$$

cioè considereremo il limite in $\mathbb{R}$, ottenendo lo stesso risultato perché (teorema) è

$$\text{se} \lim_{x\to+\infty} f(x) = u \quad \text{allora} \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = u$$

Per esempio esiste un limite classico, di difficile dimostrazione matematica e ampia ricorrenza in Calcolo delle Probabilità,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

spesso detto, in una delle 2 forme soprascritte (Primo, oppure Secondo) Limite Fondamentale, e da esso con complicati calcoli segue

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

che ritroveremo, nella prima forma, in questioni di Farmacia.

Esempio 1.

$$\lim_{x\to+\infty}(7x^2 - x + 1) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(7 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) =$$

che per "grandi" x è il prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 7

$$= +\infty.$$

Esempio 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) =$$

prodotto di 2 numeri "grandi"

$$= +\infty$$

oppure $= x\,(1-\frac{1}{\sqrt{x}})$, prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 1: in ogni caso il limite è $+\infty$.

Tutto ciò costituisce il *calcolo dei limiti*, che comunque può raggiungere più alti livelli di sottigliezza:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x^3+6-\mathrm{e}\sqrt{x}}{3x^3-\frac{1}{x}-2x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^4}-\frac{\mathrm{e}}{x^3\sqrt{x}}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^5}-2} = -\frac{3}{2}\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-5x^3+6-\mathrm{e}\sqrt{x}}{3x^3-\frac{1}{x}-2x^4} = \ldots = -\frac{3}{2}$$

Si dimostrano

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10^x}{x} = +\infty$$

$$\text{e in effetti} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty \qquad b > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$$

$$\text{e in effetti} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x} = 0 \qquad 0 < b \neq 1.$$

24.2 Limiti verso un numero finito

Consideriamo il limite di f per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, anche distinguendo x_0^+ e x_0^-, e ci sono 2 casi:

◇ $x_0 \notin \operatorname{dom} f$, p. es. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

◇ $x_0 \in \operatorname{dom} f$ e ci sono 2 sottocasi:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$: la f **si dice continua** in x_0 e si noti che le funzioni elementari sono continue nei domini, e allora per esse sempre limite=valore calcolato, p. es. $\lim_{x\to 0} e^x = 1$;
- $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$: la f si dice discontinua in x_0 e questo può essere con funzioni non elementari come $\operatorname{sgn}(x)$ e $\lfloor x \rfloor$.

Allora per le funzioni elementari sono significativi solo i limiti dove la funzione "smette di esistere": gli estremi, finiti o no, degli intervalli che compongono il dominio, non appartenenti ad esso:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \text{[forma 0 su 0]} \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \text{ [funzione elementare, limite=valore] } = \frac{1}{2}.$$

Si dice *limitata* una f tale che esistono 2 numeri M e N tali che $M < f(x) < N$, per esempio $\sin x$. Limitata $\not\Rightarrow$ $\exists$ limite.

Si dice *infinita* una funzione che tende a $+\infty$ o $-\infty$ e *infinitesima* una che tende a 0 (per $x \to u_0$ finito o no).
Per esempio sono infinite per $x \to +\infty$ le b^x con $b > 1$, e infinitesime per $0 < b < 1$; viceversa per $x \to -\infty$. Infinite le $\log_b x$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

Esempio: logistica. Consideriamo il caso ultra-semplificato:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^t}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Una forma più generale dà, con costanti positive K, q, r,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1+q\,\mathrm{e}^{-r\,t}} = K$$

(Si veda Wikipedia alla voce *Equazione logistica*).

24.3 Teoremi sui limiti

Risolveremo i limiti un po' in modo intuitivo, come abbiamo già ampiamente fatto, anche guardando il grafico, e anche esaminando "a pezzetti" le espressioni delle funzioni; in questa trattazione elementare non possiamo fare una teoria dei limiti molto approfondita.
Tuttavia qua formalizziamo le "regole" di calcolo dei limiti, che in parte abbiamo già usato.

Con le definizioni dei limiti (con ε, M...) si dimostra che:

- limite somma=somma limiti se finiti: $\lim_{x\to\pi}(\mathrm{sign}(x) + \lfloor x \rfloor) = 4$
- limite prodotto=prodotto limiti se finiti: $\lim_{x\to-\pi} \mathrm{sign}(x)\lfloor x \rfloor = 4$
- limitata fratto infinita, $\to 0$, p.es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\log_{\frac{1}{2}} x} = 0$
- limitata + infinita>0, $\to +\infty$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}(\cos x + \sqrt{x}) = +\infty$

• reciproca di tendente a $L \neq 0$ tende a $\frac{1}{L}$, p.es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\arctan x} = \frac{2}{\pi}$
• reciproca d'infinita $\to 0$, p.es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log_{10} x} = 0$
• reciproca d'infinitesima > 0, $\to +\infty$, p.es. $\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$
• reciproca d'infinitesima < 0, $\to -\infty$, p.es. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$
• per quanto gli infiniti non siano numeri e le espressioni seguenti siano scorrette matematicamente, valgono come mnemonici:
$+\infty + \infty = +\infty$ e analogamente $-\infty + (-\infty) = -\infty$
$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ e analoghe 3 coi $-$ e il prodotto dei segni.
⋄ Nelle prossime 3 indichiamo con L un limite finito:
$+\infty + L = +\infty$ p.es. $\lim_{x\to+\infty}(x^3 + \arctan x) = +\infty$
$-\infty + L = -\infty$, p.es. $\lim_{x\to+\infty}(\log_{4-\pi} x + (4-\pi)^x) = -\infty$
$+\infty \cdot L = +\infty$ se $L > 0$ e analoghe 3 per $L < 0$, e $-\infty$.

Restano fuori queste **forme di indecisione**, da risolvere caso per caso: $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Per esempio

$$\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x - x) =$$

$$\left[= +\infty - \infty\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) =$$

$$= \left[+\infty \cdot (+\infty) =\right]$$

$$= +\infty.$$

Tutte le funzioni considerate in questa lezione sono definite in singoletti o intervalli o unione (finita o non troppo "capricciosa" se infinita) di singoletti e/o intervalli.
I singoletti non hanno rilevanza per quanto riguarda i limiti.
Sono significativi solo gli intervalli del dominio delle funzioni.
Per esempio la funzione $\frac{1}{x}$ è definita nell'unione dei 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Considereremo i limiti a quegli estremi: $-\infty$, 0^-, 0^+, $+\infty$.

Similmente consideremo quei 4 limiti, e soprattutto quelli a 0^+ e $+\infty$, per

$$\frac{1}{x^2}$$

Questa sopra è una funzione che ricorre ampiamente in Fisica, per esempio l'attrazione fra 2 cariche di segno opposto è([92])

$$F = C\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

essendo q_1 e q_2 i valori, senza segno, delle 2 cariche, ovvero come funzione della sola distanza (cioè per cariche fissate)

$$F(r) = C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

(E dal punto di vista fisico è significativa solo per $r > 0$). Si ha

$$\lim_{r\to+\infty} C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2} = 0 \quad \text{forza nulla a distanza infinita}$$

$$\lim_{r\to 0^+} C \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{1}{r^2} = +\infty \quad \text{forza infinita a distanza nulla}$$

Esercizi. Per $x\sqrt[3]{x}$, $\log_2|2^x - 1|$, $\ln|x|$, $\sin 2^x$, $\cos \pi x$,

$\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$, $\dfrac{4+3x-x^2}{x^2-2x-8}$ questi 8 limiti: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$, $\lim\limits_{x\to-2^\pm}$, $\lim\limits_{x\to 0^\pm}$, $\lim\limits_{x\to 4^\pm}$.

Gli stessi 8 limiti per queste 3 funzioni: $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{3^x \pm 3^{-x}}$, $\quad \lg\left|1 - \dfrac{2}{x}\right|$.

[92] In modulo, non vettorialmente.

25 Derivate – I parte

Grossolanamente: derivata=pendenza

25.1 Derivata in un punto e funzione derivata

In questa trattazione elementare considereremo solo le derivate delle funzioni reali di variabile reale.

Essenzialmente, la derivata $f'(x)$ di una funzione f in un punto x, è un <u>numero</u> oppure $+\infty$ o $-\infty$ che se esiste rappresenta la pendenza del grafico in $(x, f(x))$. **E se non esiste vuol dire che in quel punto il grafico non ammette retta tangente, per qualche sorta di sua non liscezza. La derivata positiva o $+\infty$ corrisponde (con precisazioni che faremo) alla crescenza di f nel punto x e quella negativa o $-\infty$ alla decrescenza.**

Al variare di x nel dominio di f si ottiene una <u>funzione</u> $f'(x)$ ovvero $Df(x)$ che si chiama [funzione] derivata.

La derivata $f'(x)$ in un punto x uguaglia contemporaneamente,
— se finita:

• il coefficiente angolare m della retta tangente in $(x, f(x))$

• la tangente (goniometrica) $\tan\alpha$ dell'angolo della (retta) tangente con l'asse x:

$$\tan\alpha = f'(x) = m$$

— e sia se finita che infinita:

- questo limite, che usualmente viene preso per definirla:

$$f'(x) \coloneqq \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \quad \textit{ovvero} \ \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

per ogni x per cui i limiti (equivalenti) esistono, anche se infiniti. (Questa è la definizione della derivata intesa come valore).

Anticipiamo un esempio chiarificatore.
La derivata di x^2 è $2\,x$; scriveremo $Dx^2 = 2\,x$; anche $(x^2)' = 2x$.
In 1 la $2\,x$ vale 2 che è la pendenza del grafico di x^2 in 1.
In -1 la $2\,x$ vale -2 che è la pendenza del grafico di x^2 in -1.
In 0 la $2\,x$ vale 0 che è la pendenza di x^2 in 0.
Per $x > 0$ la $2\,x$ è > 0 dal che là la x^2 cresce (in ogni punto).
Per $x < 0$ la $2\,x$ è < 0 dal che là la x^2 decresce (in ogni punto).

La *funzione* derivata ha la stessa definizione ma solo per ogni x per cui i limiti esistono *finiti*.

L'argomento del secondo limite qua sopra si chiama *rapporto incrementale* di f in x.

(La maggioranza dei testi, trattando più separatamente le derivate come numero e come funzione, per il primo caso scrive $f'(x_0) \coloneqq \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ovvero $\coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, derivata in x_0).

Si dimostra (teorema) che se in $(x, f(x))$ esiste la tangente al grafico essa forma con l'asse x un angolo orientato α tale che $\tan\alpha = f'(x)$.
Da ciò segue, lasciando per adesso all'intuizione il significato di funzione crescente o decrescente in un punto, che

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decrescente in } x_0$$

(si tratta della crescenza e decrescenza **puntuali**, non quelle globali del paragrafo 6.6) e lasciando per adesso all'intuizione il significato di funzione "liscia" e di punto di massimo relativo e di minimo relativo

$$x_0 \text{ punto di massimo relativo di funzione liscia} \Rightarrow \ f'(x_0) = 0$$

$$x_0 \text{ punto di minimo relativo di funzione liscia} \Rightarrow \ f'(x_0) = 0$$

La derivata di $f'(x)$ è la *derivata seconda* $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$ eccetera.

Lasciando all'intuizione il significato di *concavità di una funzione*

fz liscia con $f''(x) > 0$ su un intervallo $\Rightarrow$ concavità verso l'alto
fz liscia con $f''(x) < 0$ su un intervallo $\Rightarrow$ concavità verso il basso

Detto flesso un punto in cui si inverte la concavità, com'è l'origine per x^3,

$$x_0 \text{ punto di flesso di funzione liscia} \Rightarrow \ f''(x_0) = 0$$

infatti la derivata seconda di x^3 si vedrà esser $6\,x$ che in 0 è 0.

Esempi.
Si trova facilmente che la derivata di $|x|$ è $\frac{x}{|x|}$ corrispondentemente all'inesistenza della tangente al grafico in 0 (ovvero, in $(0,0)$).

La funzione $\sqrt[3]{x}$ ha derivata $+\infty$ in 0, e corrispondentemente in $(0,0)$ il grafico ha tangente verticale.

Nota. Dopo $Dx^2 = 2\,x$, che lo studente è invitato a calcolare col limite del rapporto incrementale, non calcoleremo più le derivate col limite del rapporto incrementale: ciò è già stato[93] fatto, secoli fa: oggi usiamo tabelle e regole di derivazione.

25.2 Notazioni per la derivata prima

Ecco le principali notazioni usate per la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) \qquad D\,f(x) \qquad \dot{f}(x) \qquad \frac{d}{d\,x}\,f(x)$$

[93] per le funzioni base di utilità pratica in Farmacia, non per tutte le funzioni, che sono infinite.

25.3 Derivate delle funzioni elementari reali

Tutte queste formule valgono nell'intersezione dei domini della funzione derivanda e della funzione derivata. Per esempio $D\ \ln x = \frac{1}{x}$ vale per $x > 0$ sebbene $\frac{1}{x}$ esista anche per $x < 0$, e $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ vale per $x > 0$ sebbene la derivanda $\sqrt{x}$ esista anche per $x = 0$.

$$
\begin{array}{llcll}
\forall c & D\,c & = & 0 & \\
 & D\,x & = & 1 & \\
 & D\,x^n & = & n\,x^{n-1},\ n \text{ intero}, & \text{in particolare:} \\
 & & & & Dx^2 = 2x \\
 & & & & D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \\
 & D\,x^\alpha & = & \alpha\,x^{\alpha-1} \text{ con } x > 0 & \text{e } \alpha \text{ reale non intero,} \\
 & & & \quad \text{in particolare} & D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 & D\sin x & = & \cos x & \\
 & D\cos x & = & -\sin x & \\
 & D\tan x & = & \frac{1}{\cos^2 x} & = 1 + \tan^2 x \\
 & D\arctan x & = & \frac{1}{1+x^2} & \\
 & D\,\mathrm{e}^x & = & \mathrm{e}^x & \\
 & D\,10^x & = & \frac{10^x}{\lg \mathrm{e}} & \\
 & D\ \ln x & = & \frac{1}{x} & \text{e vale anche } D\ln|x| = \frac{1}{x} \\
 & D\ \lg x & = & \frac{\lg \mathrm{e}}{x} & \text{e vale anche } D\lg|x| = \frac{\lg \mathrm{e}}{x} \\
 & D\,\Phi(x) & = & \phi(x) & \text{ma } \Phi(x) \text{ non è elementare.}
\end{array}
$$

([94])

[94] Per lo studente interessato, ad un livello superiore si considerano anche:

$$
\begin{array}{llcll}
\forall a > 0 & D\,a^x & = & a^x \ln a & \\
\forall\, 0 < b \neq 1 & D\ \log_b x & = & \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b} & \\
 & D\,\mathrm{cotan}\,x & = & -\frac{1}{\sin^2 x} & = -1 - \mathrm{cotan}^2 x [= -\mathrm{cosec}^2\,x] \\
 & D\ \arcsin x & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\ \arccos x & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\
 & D\ \sinh x & = & \cosh x & \\
 & D\ \cosh x & = & \sinh x & \\
 & D\tanh x & = & \frac{1}{\cosh^2 x} & [= 1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2\,x] \\
 & D\,\mathrm{arsinh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \\
 & D\,\mathrm{arcosh}\,x & = & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \\
 & D\,\mathrm{artanh}\,x & = & \frac{1}{1-x^2} & [= D\,\mathrm{arcoth}\,x] \\
 & D\,|x| & = & \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} & [= \mathrm{sgn}\,x,\ \forall\, x \neq 0]
\end{array}
$$

25.4 Epidemie, curve sigmoidi, a campana, derivata

Le curve sigmoidi e le curve a campana , che così bene modellizzano in un'epidemia il numero cumulativo di morti e rispettivamente il numero di morti giornaliero, sono strettamente legate fra loro dalla derivata.

Detto ultrasemplificatamente,
la derivata di una curva sigmoide è una curva a campana
(affermazione che per essere matematicamente rigorosa richiederebbe varie ipotesi aggiuntive).

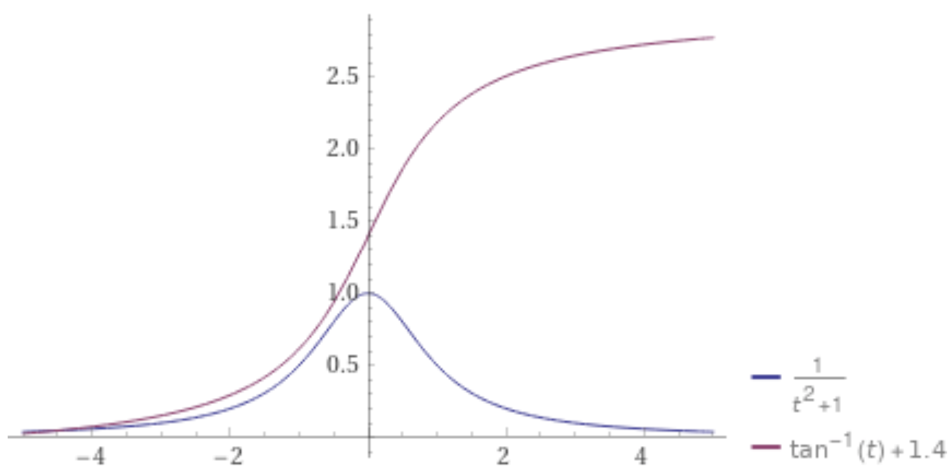


Figure 22: Una curva sigmoide e la sua derivata a campana (WolframAlpha)

In una curva sigmoide sufficientemente regolare riconosciamo:

crescita sempre più rapida, con la *concavità* verso l'alto	$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$
flesso	$f'(x_0) > 0$	$f''(x_0) = 0$
crescita sempre più lenta, con la *concavità* verso il basso	$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$

In una curva a campana sufficientemente regolare riconosciamo:

crescita sempre più rapida, con la *concavità* verso l'alto	$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$
flesso	$f'(x_1) > 0$	$f''(x_1) = 0$
crescita sempre più lenta, con la *concavità* verso il basso	$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$
la fz raggiunge un max (ordinata) in un punto di max (ascissa)	$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$
di decrescita sempre più rapida, con *concavità* verso il basso	$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$
flesso	$f'(x_2) < 0$	$f''(x_2) = 0$
decrescita sempre più lenta, con *concavità* verso l'alto	$f'(x) > 0$	$f''(x) = 0$

26 Derivate – II parte

26.1 Teoremi algebrici sulle derivate

In tutta questa Lezione, la somma è somma di funzioni, e così il prodotto e il quoziente: per esempio $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$.
La derivata della somma [di 2 funzioni] è la somma delle derivate [di quelle 2 funzioni]:

$$(f+g)' = f' + g'$$

che potremmo anche scrivere $D(f+g) = Df + Dg$ ma continueremo con la notazione dell'apice per la derivata prima.
La derivata del prodotto non è il prodotto delle derivate bensì

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \,. \text{ Da cui subito } (cf)' = cf',\ c \text{ costante}\,.$$

Derivata della [funzione] reciproca:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

e da questa e dalla precedente si ricava subito la derivata del quoziente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\,.$$

Derivata della funzione composta:[95]

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi. Con la prima, terza e quinta formula, ricordando la derivata dell'arcotangente, si troverà $D\Big(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big) = 0$.
Dalla quinta formula $Df^\alpha = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f'$ per ogni $\alpha \in I\!R$.

---

[95] Per lo studente interessato, quella formula consente la derivazione di f^g derivando l'equivalente $e^{g \cdot \ln f}$:

$$(f^g)' = f^g \cdot \Big(g' \cdot \ln f + \frac{g \cdot f'}{f}\Big)$$

ricordando la soprastante formula di derivazione del prodotto, e la derivata della funzione esponenziale e della funzione logaritmo.

Esempi di calcolo di derivate

$$D\sqrt{1+x^2} =$$

$$= D\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot D(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\,x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$D\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -(1) \cdot D\frac{1}{x^2} =$$

$$= -D\,x^{-2} =$$

$$= 2\,x^{-3} =$$

$$= \frac{2}{x^3}$$

26.2 Le funzioni elementari in Farmacia, e i modelli

L'uso delle funzioni elementari nella ricerca farmaceutica e in generale biomedica è *enorme*, per **modellizzare** i fenomeni.

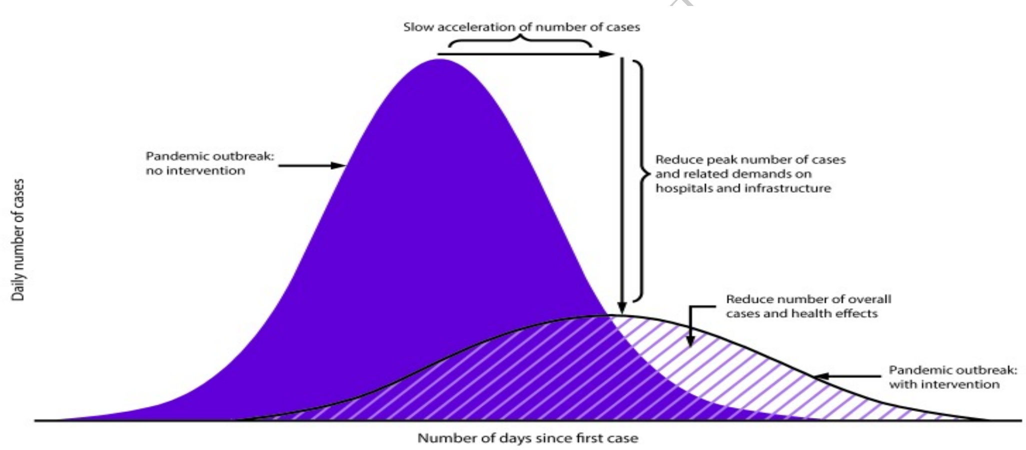
Avere in mano dei numeri, risultato di un esperimento, è *qualcosa*. Avere una funzione che li modellizza – anche se non rende conto *esattamente* di tutti i casi riscontrati – è *immensamente di più*. Per esempio perchè nel modello ci saranno dei parametri, come la concentrazione di qualche sostanza in un liquido di coltura, per fare un esempio, che si potrà ipotizzare di modificare, in un successivo esperimento, e così si procede.
Oppure, consideriamo un altro caso: in una regione hanno raccolto circa 20mila dati (peso, età in mesi) di bambini. Possiamo

avere un file Excel con 2 colonne di dati, che potrà servire per future ricerche, ma sarà inutilizzabile in farmacia per valutare quanto è normale il peso di un bambino di quella regione che entri in quella farmacia. Un enorme tabulato cartaceo sarebbe ancora più inutilizzabile. Invece è più utile una formula, col suo dominio di validità, come

$$height(\mathrm{cm}) = 78 \times age(\mathrm{months}) + 76(\mathrm{cm}) \quad (0 \leq age(\mathrm{months}) \leq 72)$$

che approssimi tutti quei valori, seppure imperfettamente.

Ecco per esempio nella figura una modellizzazione di epidemie:



From: Qualls N, Levitt A, Kanade N, Wright-Jegede N, Dopson S, Biggerstaff M, Reed C, Uzicanin A; CDC Community Mitigation Guidelines Work Group. Community Mitigation Guidelines to Prevent Pandemic Influenza - United States, 2017. MMWR Recomm Rep. 2017 Apr 21;66(1):1-34. doi: 10.15585/mmwr.rr6601a1. PMID: 28426646; PMCID: PMC5837128.

Come abbiamo già detto, nel suo progredire nel tempo e approfondirsi, in linea molto generale possiamo dire che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente queste fasi:

qualitativa ("bollendo *un po'* otterrai *un po' di* precipitato")
numeri
operazioni (numeriche)
funzioni (numeriche)← **qua siamo**
analisi statistica dei dati (numerici)

È allora fondamentale conoscere il comportamento – verrebbe quasi da dire la *psicologia* se non l'*anima* – delle varie funzioni elementari, il loro *modo* di crescere e decrescere e tendere all'infinito eccetera...
Limiti e derivate ne sanno molto, dell'anima delle funzioni.

Rivediamo una questione di importanza fondamentale.

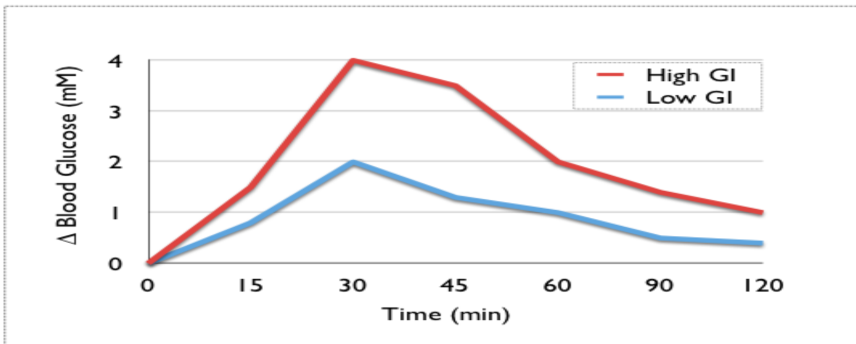
Praticamente dietro quasi ogni fenomeno della realtà sensibile c'è in qualche modo una funzione più o meno a campana. Imparare a riconoscere queste configurazioni a campana aumenta enormemente la comprensione della realtà.

La campana può avere 2 significati principali: una densità, coi suoi casi estremi rari e quelli medi più comuni, oppure, se in ascissa abbiamo il tempo, talvolta rappresenta (quantitativamente) la classica "parabola della vita", valida anche per una comunità microbica, per la potenza dell'Impero Romano, per la concentrazione di un farmaco immesso nel sangue, o quant'altro: sorgere, ascendere, declinare, finire.

Qua stiamo parlando di curve "più o meno a campana" mentre con "curva a campana" *di solito* si intende proprio la *campana gaussiana*, grafico della *densità normale standard* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Curve più o meno a campana del primo tipo, cioè densità, (della Microbiologia) sono in questo link->.

Curva più o meno a campana del secondo tipo, cioè evoluzioni di una quantità nel tempo, è in questa figura



Un'altra, (della Microbiologia) è in questo link-> e un altro (della Farmacocinetica) in questo link-> e un altro a pagina 44 di questo link->.

27 Prime applicazioni del Calcolo Differenziale

27.1 Cos'è molto o poco? Migliora o peggiora?

Il significato profondo delle derivate è che di una grandezza, sia essa $f(t)$, che varia nel tempo t, conta sia il valore, $f(t)$ appunto, sia il fatto che stia aumentando o piuttosto diminuendo.

L'uomo di un paese in via di sviluppo che prima viveva con 100 dollari all'anno e poi 110 e poi 120 e poi 130, magari è pure soddisfatto, nonostante la sua misera situazione economica. E su un piano più oggettivo, certamente se qualcosa del genere avviene non solo per lui ma per milioni di concittadini, qualcosa di buono può essere detto dei governanti di quella regione, le cui politiche di sviluppo stanno avendo un buon successo.

Una situazione di BMI 40.5 è gravissima considerata in sè ma un buon successo – eventualmente in parte anche farmacologico – se alla misurazione precedente era 41. (Per adesso è ancora un'*obesità di III classe*). (A livello personale potrà rattristarsi per la situazione o rallegrarsi per il miglioramento).

Se nella regione col tasso di positività al covid-19 più alto d'Italia quel valore diminuisce di giorno in giorno, qualcosa sta andando bene e (media permettendo) la gente magari ne sarà pure contenta – seppure la situazione vada ancora relativamente male (in confronto alle altre regioni).
Reciprocamente, nella regione col tasso più basso ma in aumento, la gente potrà venir spaventata dai media – per esempio affinchè mantenga il distanziamento sociale – insistendo sul peggioramento.
In questa riproduzione parziale di una tabella della prestigiosa Fondazione[96] Gimbe, l'Emilia Romagna ha una situazione piut-

[96] "si tratta di una fondazione nata nel 1996 con l'obiettivo di diffondere in Italia la medicina basata su prove di efficacia, attraverso iniziative di formazione, editoria e ricerca."

tosto negativa rispetto ad altri relativamente al parametro considerato nella prima colonna, ma è segnata in verde perchè, come spiegato in nota, quel parametro è in miglioramento.

Tabella 1. Indicatori regionali: settimana 27 ottobre-2 novembre 2021

Regione	Casi attualmente positivi per 100.000 abitanti	Variazione % nuovi casi	Posti letto in area medica occupati da pazienti COVID-19	Posti letto in te intensiva occup pazienti COVID
Abruzzo	149	21,3%	5%	5%
Basilicata	148	43,3%	7%	0%
Calabria	164	2,0%	10%	3%
Campania	160	34,9%	8%	4%
Emilia Romagna	170	23,7%	4%	3%
Friuli Venezia Giulia	187	70,0%	6%	10%
Lazio	169	22,4%	7%	6%
Liguria	82	45,8%	5%	5%
Lombardia	98	16,0%	5%	3%

Figure 23: Da Gimbe, https://coronavirus.gimbe.org/emergenza-coronavirus-italia/monitoraggio-settimanale.it-IT.html (screenshot 9 novembre 2021).

Bisogna imparare a vedere le grandezze che variano nel tempo in modo dinamico: sia valore che trend.

27.2 De/crescenza, min/max, concavità, flessi

Definizioni. Si dice che f *è crescente in* x_0 se in un intervall(in)o a sinistra di x_0 vale meno che in x_0 e in un intervall(in)o a destra di x_0 vale più che in x_0. (In simboli è alquanto complicato). Con ovvi mutamenti si definisce la funzione decrescente in un punto. Si dice che f è *crescente in un insieme* E se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Se E è un intervallo ciò equivale (si dimostra) alla crescenza in ogni punto di E. Simile equivalenza con la decrescenza, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, sugli intervalli.

Il punto x_0 si dice di *punto minimo relativo* per f se essa in un intervall(in)o a sinistra di x_0 e in un intervall(in)o a destra di x_0 vale *più* che in x_0. Se *meno*, si ha un *punto di massimo relativo*.

(https://it.wikipedia.org/wiki/Medicina_basata_sulle_evidenze)

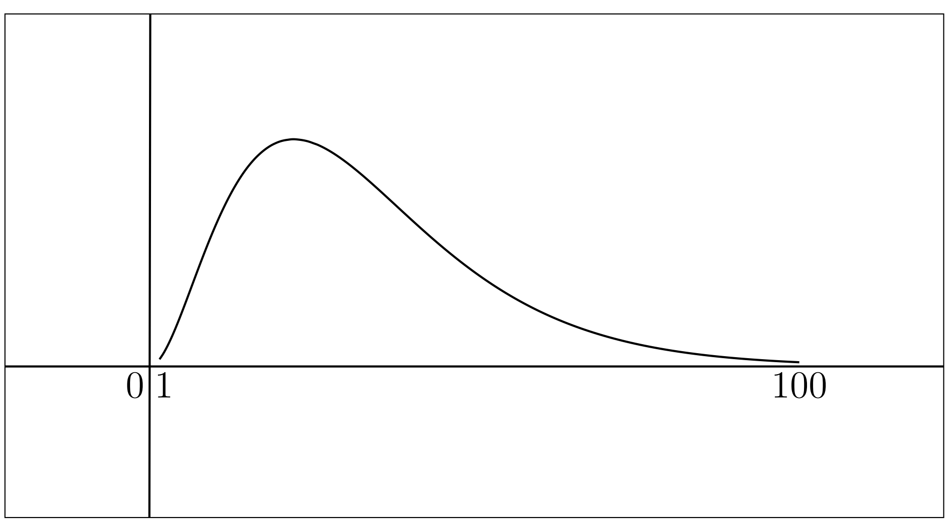
Se $\forall\, x \in \mathrm{dom} f$ è $f(x) \geq f(x_0)$, $f(x_0)$ si dice *minimo assoluto* di f, e *massimo assoluto* se $\forall\, x \in \mathrm{dom} f$ è $f(x) \leq f(x_0)$.
Attenzione a distinguere x_0 punto di massimo relativo da $f(x_0)$ massimo relativo. E similmente coi minimi.
Per esempio per il coseno 0 è punto di massimo relativo (e anche assoluto) e 1 è massimo relativo (e anche assoluto).

Il punto x_0 si dice di *punto di flesso* per f se essa in un intervall(in)o a sinistra di x_0 *volge la concavità verso l'alto* e in un intervall(in)o a destra verso il basso, oppure viceversa; $(x_0, f(x_0)))$ si dice *flesso*. Non diamo la complicata definizione analitica di *volgere la concavità*, concetto comunque ovvio se riferito al grafico.

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ $*$ Il numero di morti di un'epidemia viene modellizzato approssimatamente da

$$d(t) := 20\,t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \qquad 1 \leq t \leq 100$$

essendo t il tempo, in giorni, da 1 a 100. In quale giorno si ha il massimo numero di morti? (Più realisticamente, *intorno* a quale giorno; ma usiamo proprio il modello semplificato assegnato). (Ovviamente sono usati i nomi d come *deaths* e t come *time*; ma è irrilevante).
Si risolva con le derivate, sebbene si potrebbe risolvere calcolando i 100 valori di $d(t)$ per t da 1 a 100. Sarà utile ricordare che $D\,\mathrm{e}^{ct} = c\,\mathrm{e}^{ct}$ (che comunque si troverebbe subito con la regola di derivazione della funzione composta).



SVOLGIMENTO
Ricordando la derivazione del prodotto

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

e ricordando la derivazione di t^2 che dà $2\,t$, deriviamo la funzione $d(t)$ che è il prodotto $(20\,t^2) \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$ ottenendo la disequazione $d'(t) > 0$

$$d'(t) = (40\,t) \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right) + (20\,t^2) \cdot \left(-\frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right) > 0$$

$$\Big/ : t > 0 \qquad \text{(dividiamo per } t > 0 \text{ nel dominio)}$$

$$40\,e^{-\frac{t}{10}} - 2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0 \qquad \Big/ : \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$$

$$40 - 2\,t > 0$$

$$40 > 2\,t$$

$$t < 20$$

allora il numero di morti $d(t)$ in $[1, 100]$ cresce per $t < 20$ e decresce per $t > 20$ e allora raggiunge il massimo

$$\boxed{\text{al giorno } 20}$$

Nota. Il modello darebbe circa 1083 morti in quel giorno, calcolando $d(20)$, più precisamente 1082.68: ovviamente la funzione modellizza approssimatamente il numero di morti, che in generale sarà da aspettarsi con ampie fluttuazioni intorno al valore teorico.

27.3 Retta tangente a un grafico in un punto

Teorema 1. La **tangente** al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e allora si ha l'*approssimazione lineare*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall\, x \approx x_0$$

ovvero con $x = x_0 + h$ per h piccolissimo in valore assoluto

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \qquad |h| \ll \ .$$

Per esempio per $x \approx 0$ è $\sin x \approx x$, $\ln(1 + x) \approx x$, $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

Teorema 2. $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ **crescente** in x_0

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ decrescente in } x_0\,.$$

(Se $f'(x_0) = 0$ allora f in x_0 può essere crescente o decrescente o nè crescente nè decrescente: si considerino x^3, $-x^3$, x^2).

Teorema 3. Se f è crescente prima di x_0 e decrescente dopo x_0 allora x_0 è un punto di massimo relativo. Similmente scambiando *crescente* e *decrescente* si ha un **punto di minimo relativo**.

Teorema 4. Se $f''(x) > 0$ in un intervallo, in esso $f(x)$ *volge la* ***concavità*** *verso l'alto*, e verso il basso se < 0.

27.4 Approssimazioni delle potenze presso l'unità

L'approssimazione lineare prima detta

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \qquad |h| \ll$$

applicata in $x_0 = 1$

$$f(1 + h) \approx f(1) + f'(1) \cdot h \qquad |h| \ll$$

per le potenze della x

$$x^\alpha \text{ che in 1 vale 1} \quad \text{Derivata: } \alpha\, x^{\alpha-1} \quad \text{che in 1 vale } \alpha$$

dà

$$(1 + h)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot h \qquad |h| \ll$$

ottenendosi queste approssimazioni dei quadrati e dei cubi, e avanti

x_0 quadrato cubo
1.01 1.02 1.03
1.001 1.002 1.003
1.0001 1.0002 1.0003
1 parte su n 2 parti su n 3 parti su n.
Più in generale una funzione

$$c\,x^{\alpha}$$

in cui la x si assoggetti a un aumento percentuale di *pochi* punti percentuali, diciamo m punti percentuali, per esempio 2,
aumenta circa di $\alpha\,m$ punti percentuali
per α piccolo in valore assoluto. Similmente con le diminuzioni. Per esempio $\frac{4}{3}\pi r^3$ aumenta (o rispettivamente diminuisce) circa del 12% all'aumentare (o rispettivamente al diminuire) del 4% della r.
Tutto questo vale anche con α negativo, salvo che un aumento, per esempio, del −6%, è in effetti una diminuzione; per esempio $c\,x^{-2}$ diminuisce circa del 6% all'aumentare del 3% della x.

L'approssimazione è tanto migliore quanto più m e $|\alpha|$ sono piccoli. Con $m = 10$ e $\alpha = 3$ dà 30 invece di 33.1.
Tutto similmente coi "per mille", con maggior precisione.

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del m% il lato di una farmacia quadrata, l'area aumenta/diminuisce circa del $2\,m$%

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del m% il raggio ovvero il diametro di una compressa, il volume ovvero il peso aumenta/diminuisce circa del $3\,m$%

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del m% l'area di una farmacia quadrata,

il lato aumenta/diminuisce circa del $\frac{1}{2}\,m\%$ (radice quadrata, $\alpha = 1/2$)

Per piccolo m
aumentando/diminuendo del $m\%$ il volume di una compressa sferica, il diametro ovvero il raggio aumenta/diminuisce circa del $\frac{1}{3}\,m\%$ (radice cubica, $\alpha = 1/3$)

Fissato α coi valori usuali 2, 3, 1/2 oppure 1/3, e i loro opposti, tutto questo rimane vero coi "per mille", e ogni altra proporzione, purché la variazione sia complessivamente piccola; con 1 parte su 20 funziona bene, e diventano

2 parti su 20 (meglio detto 1 parte su 10) col quadrato,

3 parti su 20 col cubo,

1 parte su 40 con la radice quadrata,

1 parte su 60 con la radice cubica.

Per esempio, aumentando il volume di una sfera di 1 parte su 20, il raggio, che è proporzionale alla radice cubica del volume, aumenta di circa 1 parte su 60.

Invece con 1 parte su 3 l'approssimazione non funziona bene. Diciamo – tanto per dire – da 1 parte su 10 "in poi", che corrisponde al 10%, per potenze in valore assoluto non superiori a 3; e già qua la bontà dell'approssimazione è dubbia: col 10% e $\alpha = 3$ dà 30% invece di 33.1%.

Tutto questo rimane vero, salvo modificazioni linguistiche, anche per forme diverse, purché si conservi la similitudine geometrica, cioè tutte le dimensioni variano allo stesso modo.
Così un flacone di medicinale, all'aumentare del 10% delle sue dimensioni lineari (diametro, altezza) conservando la forma, vedrà aumentare il suo volume circa del 30%. Similmente per il diminuire. Un calcolo più preciso per il 10%, che non è poi tanto piccolo numero, darebbe circa 33%. Con 1% viene abbastanza bene 3%.

E non solo i flaconi: anche capsule “a forma di pillola” (invece che compresse sferiche), e anche cavie e altri animali: un gatto del 5% più lungo di una gatto “di ugual forma” pesa circa il 15% in più. Ma un gatto disegnato richiede il 10% di inchiostro in più.

27.5 Regola di de l’Hospital

In condizioni che non[97] approfondiamo, certi limiti del tipo

$$\frac{0}{0} \quad \text{oppure} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

si possono calcolare sostituendo
il numeratore con la sua derivata
e (anche!)

[97] Per lo studente interessato, qualche dettagio.
Detti u_0 e l due numeri o $+\infty$ o $-\infty$, se per $x \to u_0$

$$\left.\begin{array}{rl} & f(x) \to 0 \\ \wedge & g(x) \to 0 \\ \wedge & \frac{f'(x)}{g'(x)} \to l \end{array}\right| \quad \vee \quad \left|\begin{array}{rl} & f(x) \to \pm\infty \\ \wedge & g(x) \to \pm\infty \\ \wedge & \frac{f'(x)}{g'(x)} \to l \end{array}\right.$$

si dimostra (teorema detto Regola di de l’Hospital) che

$$\lim_{x \to u_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

se f e g sono “sufficientemente regolari” (come sono in genere le funzioni che ricorrono nelle Scienze Applicate, e negli esercizi elementari, anche di questa trattazione).
Si noti che l’eventuale inesistenza del limite del rapporto delle derivate non esclude l’esistenza del limite del rapporto iniziale.
Esempi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \left(= \frac{0}{0} \right) <=^{H} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

che si chiama **secondo limite fondamentale** (e per esso non vale *come dimostrazione* il calcolo soprastante, esiste una dimostrazione specifica; e proprio da quel limite si dimostra che $D \sin x = \cos x$, che quassù viene utilizzato).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) <=^{H} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty\,.$$

Da questi 2 limiti si ha questa sequenza di funzioni “sempre più infinite” in $+\infty$, cioè tali che il rapporto di una di esse con una precedente tende a $+\infty$: (lentissima) $\ln x$, x, e^x (velocissima). Il $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5e^x+\pi}{7x^3+3x^2+1}$ si risolverà con 3 applicazioni successive del teorema. Invece $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+\sin x+\cos x}{5x-\sin x+3\cos x}$ semplificando per x.

il denominatore con la sua derivata.

Ripetiamo: quoziente delle derivate. (Non derivata del quoziente).

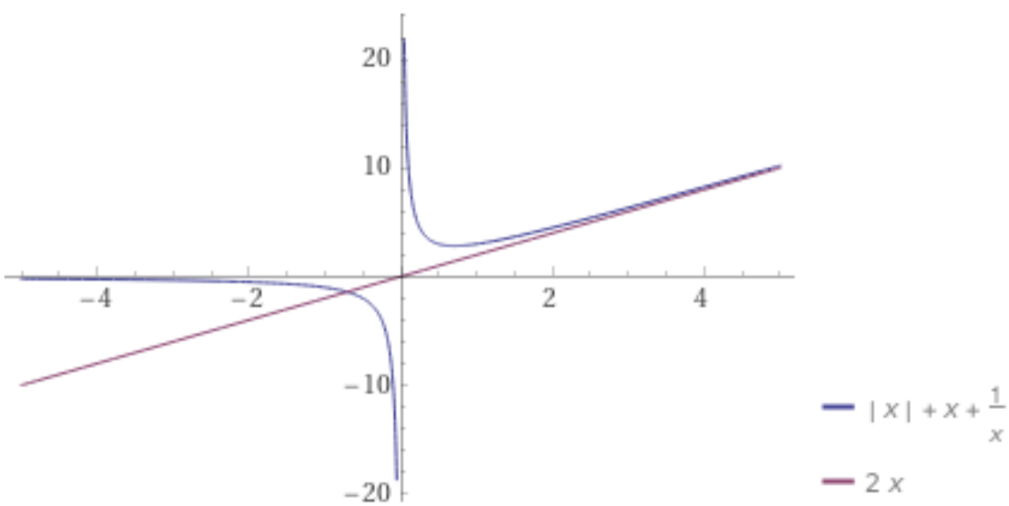
Esempio.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) <=^H \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \, .$$

27.6 Asintoti

L'asintoto è una sorta di retta tangente a un grafico in punti infinitamente lontani dall'origine.

Impariamo a riconoscerli per via grafica (con tutte le incertezze del caso). In questo disegno (screenshot da WolframAlpha) del grafico di $|x|+x+\frac{1}{x}$ vediamo l'asintoto verticale $x = 0$, l'asintoto orizzontale sinistro $y = 0$ e l'asintoto obliquo $y = 2\,x$.



Definizione 1.[98] Se x_0 è un numero [finito] e

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta verticale $x = x_0$ si dice ***asintoto verticale*** per f.

[98] Alcuni Autori ritengono inutile, non significativa, questa definizione.

Definizione 2. Se
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = cost$$
allora $y = cost$ si dice **asintoto orizzontale sinistro** per $f(x)$, o per $x \to -\infty$, e similmente si definisce quello **destro**, ovvero per $x \to +\infty$.

La definizione analitica di **asintoto obliquo** è più complessa([99]) e non la diamo. Riconosciamo – tentativamente – gli asintoti obliqui dal (disegno del) grafico.

Esempi.
La funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ ha asintoto verticale $x = 0$ e asintoto orizzontale $y = 0$: si trovano coi limiti a $-\infty$, $+\infty$, e 0^+ oppure 0^-.

La funzione $\tan x$ ha gli infiniti asintoti verticali $x = k\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Si troverà che $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro per $\arctan x$, e $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.

Si troverà che $y = 1$ è asintoto orizzontale destro per
$$\tanh x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$
e $y = -1$ è asintoto orizzontale sinistro.

[99]Per il lettore interessato: se esistono 2 numeri [finiti] m e q tali che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = q$$
allora la retta $y = mx+q$ si dice ***asintoto destro*** (oppure: *per* $x \to +\infty$) per f, in particolare *obliquo* se $m \neq 0$ e *orizzontale* se $m = 0$. Con $x \to -\infty$ si definisce l'eventuale ***asintoto sinistro***.
Si trova che $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro per $\ln(1 + e^x)$ e $y = x$ è asintoto obliquo destro.
Per $f(x) := \sqrt{x}$ si troverebbe $m = 0$ ma q infinito e allora non esiste asintoto destro. (E sinistro non c'è perché $\mathrm{dom} f = [0, +\infty[$).
Con la Regola di de l'Hospital per $\ln x$ si trova $m = 0$ ma q infinito e allora non esiste asintoto destro. (Sinistro escluso dal dominio).
Esercizi. Si trovino i 2 asintoti di questa funzione considerata da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Asymptote*:
$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x}$$
e con essi e qualche valore si disegni un grafico approssimativo. Similmente per la reciproca, che ha 3 asintoti.

La funzione $f(x) \coloneqq e^{\frac{1}{x}}$ ha asintoto verticale $x = 0$ che si trova col limite per $x \to 0^+$, e asintoto orizzontale [destro e sinistro] $y = 1$.

28 Teoria dello studio di funzione

28.1 La “ricetta” per lo studio di funzione; sup e inf

Fermo restando che una funzione molto “capricciosa” non può essere studiata con metodi elementari, è però vero che un'infinità di funzioni del tipo di quelle che tendono a capitare nelle Scienze Applicate può validamente studiarsi coi metodi visti finora.

Per quanto possibile si cercherà di seguire questa “ricetta”:

1) Dominio
2) Simmetrie e periodicità
3) Zeri [equazione $f(x) = 0$]
4) Segni [disequazione $f(x) > 0$]
5) Limiti [negli “estremi” (in senso lato) del dominio]
6) Asintoti
7) Derivata prima
8) Limiti della derivata prima [non se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$]
9) Crescenza/decrescenza, max/min, sup/inf [diseq. $f'(x)>0$]
10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]
11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi
12) Disegno del grafico

Le funzioni 2π-periodiche, si studino in $[0, 2\pi[$ o meglio $]-\pi, \pi]$. Analoghe riduzioni del dominio si attuino per altre periodicità.

sup e inf. Resta da vedere cosa sono $\sup f$, e $\inf f$. Se una funzione ha un massimo assoluto $\max f$, esso è l'*estremo superiore* $\sup f$. Tuttavia, consideriamo la funzione $\arctan x$. Essa per $x \to +\infty$ tende a $\frac{\pi}{2}$ ma senza mai raggiungerlo: vi si avvicina indefinitamente rimanendo sempre minore. In questo caso $\frac{\pi}{2}$ non è certo max – infatti per essere max ci vorrebbe un x_0 tale che arctan là vale prorio quel valore, il che non succede mai – ma si dice che è estremo superiore:

$$\sup \arctan = \frac{\pi}{2}$$

Similmente, si potrebbe definire l'estremo inferiore $\inf f$; in questo caso $\inf f = -\frac{\pi}{2}$. Ovvio poi è il significato di $\sup f = +\infty$, e di $\inf f = -\infty$. Per esempio

$$\sup \tan = +\infty$$

Le definizioni formali di sup e inf sono complicate e non le daremo.

Esempio 1: la campana gaussiana.

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

1) Dominio
   $\mathbb{R}$
2) Simmetrie e periodicità
   $f(-x) = f(x)$, allora la funzione è pari e allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
(Da ora basterebbe studiarla per $x \geq 0$, volendo "risparmiare").
3) Zeri [equazione $f(x) = 0$]
   La funzione non ha zeri
4) Segni [disequazione $f(x) > 0$]
   $f(x) > 0 \ \forall\, x \in \mathit{dom}\, f$
5) Limiti [negli "estremi" (in senso lato) del dominio]

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

6) Asintoti
   $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$
7) Derivata prima

$$f'(x) = D \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} D\left(-\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

8) Limiti della derivata prima [non se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$]

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{\sqrt{2\pi}\;\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}} = \left(=\frac{\infty}{\infty}\right) <=^{H}$$

con de L'Hospital

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}\;\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot x} = 0$$

9) Crescenza/decrescenza, max/min, sup/inf [diseq. $f'(x)>0$]

$$-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \quad \Big/ \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}} > 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

'schema formale di crescenza e decrescenza"

```
..........0.........
++++++++++|---------- f'(x) > 0
.....↗...|...↘.....
```

$f'(x) > 0$ per $x < 0$, funzione crescente
$f'(x) < 0$ per $x > 0$, funzione decrescente
$x = 0$ punto di max rel. e ass.
$\max f = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\inf f = 0$

10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]
Con qualche calcolo si trova

$$f''(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,(x^2 - 1)$$

Si risolva la corrispondente disequazione col > 0

$$\Big/ : \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0$$

$$x^2 - 1 > 0$$

producendo lo schema di concavità e convessità e trovando l'unico flesso in $x \geq 0$ ovvero, su tutto $\mathbb{R}$, i 2 flessi simmetrici.

11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi

12) Disegno del grafico
Lasciato al lettore. Si verifichi poi su WolframAlpha.

Esempio 2: il Potenziale di Lennard-Jones.

(È una funzione della Termodinamica, collegata alla Legge di van der Waals).

$$f(x) := \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6}$$

(In effetti rappresenta un potenziale solo per $x > 0$).
1) Dominio
$x \neq 0$
2) Simmetrie e periodicità
$f(-x) = f(x)$, allora la funzione è pari e allora il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Da adesso basta studiarla per $x \geq 0$.

3) Zeri [equazione $f(x) = 0$]
Equazione

$$\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} = 0$$

$$\frac{1}{x^{12}} = \frac{2}{x^6} \quad \Big/ \cdot x^{12} \neq 0 \, \textit{nel dominio}$$

$$1 = 2\,x^6 \quad \Big/ : 2$$

$$x^6 = 2^{-1} \quad \Big/^{\wedge\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x = \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$x = 2^{-\frac{1}{6}}$$

4) Segni [disequazione $f(x) > 0$]

$$\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} > 0$$

$$\frac{1}{x^{12}} > \frac{2}{x^6} \quad \Big/ \cdot x^{12} > 0 \, per \; x > 0$$

$$1 > 2\,x^6 \quad \Big/ : 2$$

$$x^6 < 2^{-1} \quad \Big/^{\wedge \frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x < \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$f(x) > 0$ per $0 < x < 2^{-\frac{1}{6}}$ (e poi sarà simmetricamente per $x < 0$)

5) Limiti [negli “estremi” (in senso lato) del dominio **(ora** $\mathbb{R}^+$**)**]

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \right) (= +\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^6} \cdot \left(\frac{1}{x^6} - 2 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

6) Asintoti
   $x = 0$ asintoto verticale
   $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

7) Derivata prima

$$D\left(\frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6} \right) =$$

$$= D\left(x^{-12} - 2\,x^{-6} \right) =$$

$$= -12\,x^{-13} - 2 \cdot (-6)\,x^{-7} =$$

$$= -\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7}$$

8) Limiti della derivata prima [non se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$]

$$\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7} \right) (= -\infty + \infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{12}{x^7} \cdot \left(-\frac{1}{x^6} + 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(-\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7}\right) = 0$$

9) Crescenza/decrescenza, max/min, sup/inf [diseq. $f'(x)>0$]

$$-\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7} > 0 \quad \Big/ \cdot \frac{x^{13}}{12} > 0 \, per\ x > 0$$

$$-1 + x^6 > 0$$

$$x^6 > 1 \quad \Big/^{\wedge \frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x > 1$$

"schema formale di crescenza e decrescenza"

```
0..........1..........
|----------|++++++++++ f'(x) > 0
|.....↘...|...↗.....
```


$f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$, funzione decrescente
$f'(x) > 0$ per $x > 1$, funzione crescente
$x = 1$ punto di min rel. e ass.
$\min f = f(1) = \frac{1}{1} - \frac{2}{1} = -1$
$\sup f = +\infty$

10) Derivata seconda, e magari suo studio [talvolta proibitivo]

$$f''(x) = D\, f'(x) = D\,(-12\, x^{-13} + 12\, x^{-7}) =$$

$$= -12\,(-13)\, x^{-14} + 12\,(-7)\, x^{-8} =$$

$$= 156\, x^{-14} - 84\, x^{-8} =$$

$$= \frac{156}{x^{14}} - \frac{84}{x^8}$$

Disequazione $f''(x) > 0$

$$\frac{156}{x^{14}} - \frac{84}{x^8} > 0 \quad \Big/ \cdot \frac{x^{14}}{12} > 0 \, per\ x > 0$$

$$13 - 7\,x^6 > 0$$

$$13 > 7\,x^6 \quad \Big/ : 7 > 0$$

$$\frac{13}{7} > x^6 \quad \Big/^{\wedge\frac{1}{6}} \text{ Attenzione: in } \mathbb{R}^+$$

$$x < \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}} \text{ (è una radice sesta)}$$

"schema formale di concavità e convessità"

$0 \ldots\ldots\ldots \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}} \ldots\ldots\ldots$

$|++++++++++|--------- \quad f'(x) > 0$

$| \ldots\ldots \cup \ldots | \ldots \cap \ldots\ldots$

$f''(x) > 0$ per $0 < x < \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}$, concavità verso l'alto

$f''(x) < 0$ per $x > \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}$, concavità verso in basso

$x = \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}}$ punto di flesso

11) Valori calcolati, ed eventualmente tangente in essi

$$f(2) = \frac{1}{2^{12}} - \frac{2}{2^6} =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot 2^6}{2^{12}} = \frac{1 - 128}{4\,096} = -\frac{127}{4\,096}$$

$$f(1/2) = f(2^{-1}) = \frac{1}{2^{-12}} - \frac{2}{2^{-6}} =$$

$$= 2^{12} - 2 \cdot 2^6 = 4\,096 - 128 = 3\,968$$

12) Disegno del grafico.

Lasciato al lettore. Poi verificare su WolframAlpha.

28.2 Esercizi di studio di funzione

Studiare queste 3 **Funzioni Iperboliche**:

$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	*seno iperbolico*
$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	*coseno ip.*
$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	*tangente ip.*

Le funzioni iperboliche hanno un interesse di per sè, tendendo a ricorrere nella Fisica, e hanno anche uno speciale interesse nel Calcolo Differenziale.

Studiare questa funzione di interesse nel Calcolo delle Probabilità:

- $$f(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

Studiare queste altre funzioni:

- $$f(x) := \frac{x}{2 + x^2}$$
- $$f(x) := \ln(x^2 - 1)$$

VI – Integrali e serie numeriche

29 Integrale indefinito e ODE

L'integrale indefinito è l'"*anti-derivata*":

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$
$$\Leftarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = D\left(\arctan x + c\right).$$

Possiamo quasi dire che il segno d'integrale può fare il "salto dell'uguale" trasformandosi in derivata, come un ln fa il "salto" trasformandosi in exp, per esempio $\ln x^2 = 3$ equivale a $x^2 = \mathrm{e}^3$.

L'integrale indefinito risponde alla domanda: "Di cos'è la derivata?"

Il termine "$+c$" ci ricorda che non solo $\arctan x$ ha derivata $\frac{1}{1+x^2}$, ma anche $\arctan x + 99$ o più qualunque numero reale c. Allora l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.
Ciascuna di quelle funzioni si chiama *primitiva* di f.

29.1 Alcuni integrali indefiniti

Dalle note derivate bbiamo subito questi integrali indefiniti:

$$
\begin{array}{llcll}
 & \int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \arctan x + c & \\
\forall\,\alpha & \int \alpha\,dx & = & \alpha x + c & \text{in particolare:} \\
 & & & & \int 0\,dx = c \\
 & \int \mathrm{e}^x\,dx & = & \mathrm{e}^x + c & \\
 & \int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x| + c & \\
\forall\,\alpha \neq -1 & \int x^\alpha\,dx & = & \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \text{in particolare} \\
 & & & & \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \\
 & & & & \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c \\
 & & & & \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c \\
 & & & & \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \\
 & \int \cos x\,dx & = & \sin x + c & \textit{Nota: non diamo alcun} \\
 & \int \sin x\,dx & = & -\cos x + c & \textit{significato al termine } dx.
\end{array}
$$

29.2 La costante additiva dell'integrale indefinito

Al posto del $+c$ delle sopra dette formule d'integrazione definita, altri Autori scrivono $+k$ o $+cost$, o quant'altro.
Quella simbologia va intesa come la somma di una qualunque costante in ognuno degli intervalli massimali([100]) contenuti nel dominio dell'integranda, che è questione un po' sottile, ma senza errare troppo immaginiamo che sia 1 stessa costante su tutto il dominio, liberamente scelta in $\mathbb{R}$. Per esempio 3, o -5, e spesso 0.

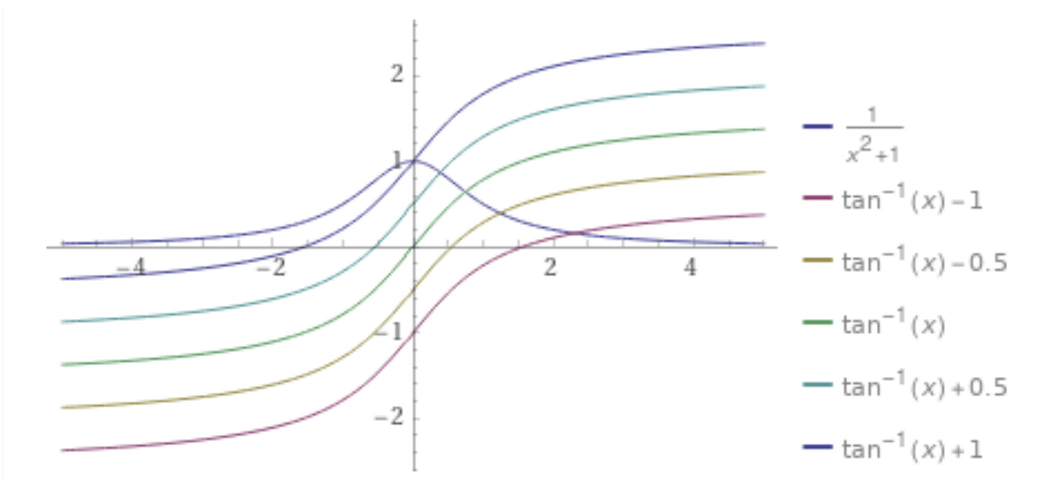


Figure 24: Disegno del grafico di $\frac{1}{1+x^2}$ e di alcune delle funzioni del suo integrale indefinito $\arctan x + c$, cioè alcune primitive. (Screenshot da WolframAlpha).

29.3 Approfondimenti ed esempi sull'integrale indefinito

Dalle proprietà (teoremi) delle derivate si hanno (non tutte in modo ovvio) queste 4 proprietà (teoremi) degli integrali indefiniti.
Le prime 2 formule costituiscono la *linearità dell'integrale*:

$$\int \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \tag{33}$$

Esempio: $\int 5\, \cos x\, dx = 5 \int \cos\, dx = 5\, \sin x + c$

[100]Per esempio l'integrale indefinito di $\frac{1}{x}$ è $\ln|x| + c$ e il dominio dell'integranda è costituito dai 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ e per ciascuno di essi si avrà una costante da sommare a $\ln x$, in modo indipendente). Per esempio $\ln(-x) + 3$ per $x < 0$ e $\ln x + 5$ per $x > 0$.

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \tag{34}$$

Esempio: $\int (5 + \cos x)\, dx = \int 5\, dx + \int \cos x\, dx = 5\,x + \sin x + c$

Integrazione per parti:

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx \tag{35}$$

Esempio: $\int e^x\, x\, dx = e^x\, x - \int e^x \cdot 1\, dx = e^x\, x - e^x + c$

Integrazione per sostituzione $y := mx + q$:

$$\int f(m\,x + q)\, dx = \frac{1}{m}\Big(\int f(y)\, dy\Big)_{y = m\,x+q} \forall\, m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0. \tag{36}$$

(Una formula più complicata che non diamo permette una sostituzione più generale $y := g(x)$, ed è là che si dà senso al dx).

Esempio:
$\int \cos(5\,x + 3)\, dx = \frac{1}{5}\,(\int \cos y\, dy)_{y=5\,x+3} = \frac{1}{5}\,(\sin y + c_1)_{y=5\,x+3} = \frac{1}{5}\,\sin(5\,x + 3) + c$

Esempi.

$$\diamond \qquad \int (x^3 + 2\,x^2 + 3\,x)\, dx =$$

$$=^{(34)} \int x^3\, dx + \int 2\,x^2\, dx + \int 3\,x\, dx =$$

$$=^{(33)} \int x^3\, dx + 2\int x^2\, dx + 3\int x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

$$\diamond \qquad \int (\sin x + 3\cos x + 7)\, dx =$$

$$=^{(34)} \int \sin x\, dx + \int 3\cos x\, dx + \int 7\, dx =$$

$$=^{(33)} (-\cos x + c_1) + 3\int \cos x\, dx + (7x + c_2) =$$

$$= (-\cos x + c_1) + 3\,(\sin x + c_3) + (7x + c_2) =$$

chiamiamo c la somma delle 3 costanti d'integrazione c_1, c_2 e c_3

$$= -\cos x + 3\sin x + 7x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

$$\diamond \int \cos(2\,x + 3)\,dx =^{(36)}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int \cos(t)\,dx\Big)_{t=2\,x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sin(t) + k\Big)_{t=2\,x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\,x + 3) + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Integrale del logaritmo naturale e decimale.

$$\int \ln x\,dx = \qquad \text{moltiplichiamo per 1}$$

$$= \int 1 \cdot \ln x\,dx = \qquad \text{riconosciamo } D\,x = 1$$

$$= \int (D\,x) \cdot \ln x\,dx =^{(35)}$$

$$= x\,\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\,\ln x - \int 1\,dx =$$

$$= x\,\ln x - x + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

Con questo procedimento e con la formula di cambiamento di base e con la (33) si calcoli l'integrale del logaritmo decimale.

29.4 Cenni alle equazioni differenziali. ODE

Un'equazione differenziale è un'uguaglianza fra funzioni, di cui almeno una, sia essa $y(t)$, è incognita, e in tutta l'espressione compare almeno una volta $y'(t)$ *vel* una derivata di ordine superiore.

Eccone 5: $y' = 9.81$, $y' = t$, $y' = -k\,y$, $y'' = -y$, $y''' = t\,y'^2$

e la terza (che oltre alla funzione incognita ha un parametro reale $k > 0$) è un classico della Farmacocinetica (v. Complementi). (La quarta è classicissima in Fisica).

Internazionalmente si usa l'acronimo ODE per Ordinary Differential Equation (equazione differenziale ordinaria) se di funzioni incognite ce n'è solo una. Solo di queste ci occuperemo in questo paragrafo, e solo a un livello infimo. (L'argomento potrebbe riempire più di un corso universitario). Un esempio più complesso, il modello SIR dell'epidemiologia, si trova nella sezione di Complementi a questa Lezione.

Talvolta nelle Scienze Applicate si è interessati a trovare una funzione del tempo, sia essa $y(t)$, di cui per motivi fisici (in senso lato) si conosce la derivata, sia essa $g(t)$:

$$y'(t) = g(t) \quad y\ incognita \quad g\ nota$$

Se g è sufficientemente regolare ovvero non "capricciosa", ovviamente le infinite soluzioni dell'*equazione differenziale* sopra scritta costituiscono l'integrale indefinito di g:

$$y(t) = \int g(t)\, dt$$

che, detta $G(t)$ una qualunque primitiva di $g(t)$, sono le infinite

$$= G(t) + cost$$

Per esempio per un oggetto che cade verticalmente presso la Terra in assenza di aria si sa che la derivata della velocità $v(t)$ è ≈ 9.81:

$$v'(t) = 9.81$$

$$\Rightarrow v(t) = \int 9.81\, dt$$

$$\Rightarrow v(t) = 9.81\, t + c$$

e ponendo in quest'ultima $t = 0$, cioè il tempo d'inizio della caduta, si trova

$$c = v(0)$$

che magari vorremo indicare con $v_{iniziale}$ ottenendosi infine

$$v(t) = 9.81\,t + v_{iniziale}$$

e similmente sulla Luna, già di suo priva di aria,

$$v(t) = 1.62\,t + v_{iniziale} \qquad \text{(Luna)}$$

(e ovviamente entrambe le formule sono inevitabilmente approssimate, non essendo esatte le 2 costanti numeriche).

Già sappiamo risolvere la

$$(1 + t^2)\, y'(t) = 1 \qquad \text{altrimenti scritta } (1 + t^2)\, y' = 1$$

cioè la

$$y'(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

trovando

$$y(t) = \arctan t + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[(1+t^2)y'=1]` dà $y(t) = c_1 + \tan^{-1}(t)$

Esercizio$_\mu$ Risolvere la $t^3\, y' - 5 = 0$.

SVOLGIMENTO

È un'equazione differenziale e si risolve con questi passaggi:

$$t^3\, y' = 5$$

$$y'(t) = \frac{5}{t^3}$$

$$y(t) = \int 5\, t^{-3}\, dt = 5 \int t^{-3}\, dt = 5\, \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{5}{2\, t^2} + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[t^3y'=5]` dà $c_1 - \frac{5}{2\,t^2}$

Complementi

29.5 Complementi – Le equazioni differenziali

Al contrario di quanto visto nel paragrafo (29.4), le equazioni differenziali di solito non si possono risolvere così semplicemente con un'integrazione indefinita.

Un'equazione differenziale della Farmacocinetica

Supponendo che un farmaco lasci il sangue solo per via urinaria e ciò avvenga proporzionalmente alla sua concentrazione nel sangue (quando ce n'è molto, molto esce) si ha l'equazione differenziale nell'incognita concentrazione $y(t)$

$$y'(t) = -k \cdot y(t)$$

essendo k una costante positiva che dipende essenzialmente dal farmaco (e avrà poi una variabilità ulteriore, da soggetto a soggetto).

Note sulle notazioni. Nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali, è abbastanza comune usare il nome x per la funzione incognita, il che potrebbe generare fraintendimenti, per esempio

$$x'(t) = x(t) \qquad \text{ovvero } x' = x$$

Ed è abbastanza comune indicare la derivazione col punto soprascritto, per esempio

$$\dot{x}(t) = x(t) \qquad \text{ovvero } \dot{x} = x$$

e 2 punti soprascritti per la derivata seconda: $\ddot{x}$.
Anche il nome u è molto usato per la funzione incognita.
Un'equazione classicissima della Fisica è

$$\ddot{u} = -u$$

ESERCIZI SULLA LEZIONE 28

$$\int \pi \ln(\sqrt{2}\,x)^3\,dx \qquad \int \pi^2 \lg x^{\sqrt{2}}\,dx \qquad \int \frac{x^2+3}{2x^2+2}\,dx$$

$$\int \pi \ln(\sqrt{2}x-6)^3\,dx \qquad\qquad \int \mathrm{e}^2 \lg(1-3x)^{\frac{1}{\pi}}\,dx$$

30 L'integrale definito

30.1 La questione dell'area sotto una curva

In un'infinità di questioni interessa conoscere l'area compresa fra il grafico di una funzione $f(x)$ e l'asse delle ascisse, da un numero a a un numero b su quell'asse. (Al limite, pure valori a o b infiniti).

Questo problema verrà risolto dall'integrale definito: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nel Calcolo delle Probabilità il concetto è di uso amplissimo.([101])

È usato nella Termodinamica, scienza utile nella fabbricazione dei farmaci: `link->`

Veniamo alla Farmacia. Leggiamo su Wikipedia([102]) (in italiano), l'enciclopedia libera, alla voce *Area Under the Curve*,

[101] Nel Calcolo delle Probabilità l'area sotto il grafico di una *densità di probabilità di una variabile aleatoria* X, concetti che definiremo, rappresenterà la probabilità che $a \le X \le b$:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Si può cominciare a farsi un'idea con la *densità normale standard* $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, considerando il suo grafico. Per esempio con WolframAlpha

```
Integrate[Exp[-t^2/2]/Sqrt[2Pi],{t,-2,2}]
```

ci dà circa 95%, e un'interessante figura.

[102] Letto il 3 febbraio 2020

L'area sotto la curva concentrazione/tempo o AUC (dalla dicitura inglese area under the time/concentration curve, ovvero area sottesa alla curva) è un parametro farmacocinetico dato dall'integrale in un grafico concentrazione/tempo (...)
Tale parametro è fondamentale per poter descrivere l'effetto dei farmaci poiché riflette l'esposizione dei tessuti al farmaco nel tempo.
L'AUC (da zero a infinito) rappresenta l'esposizione totale al farmaco in funzione del tempo (...)
Per indicare l'AUC riferita ad un particolare intervallo temporale si utilizzano i pedici, ad esempio AUC_{4-8h} indica l'area sotto la curva nell'intervallo di tempo che va da 4 a 8 ore.

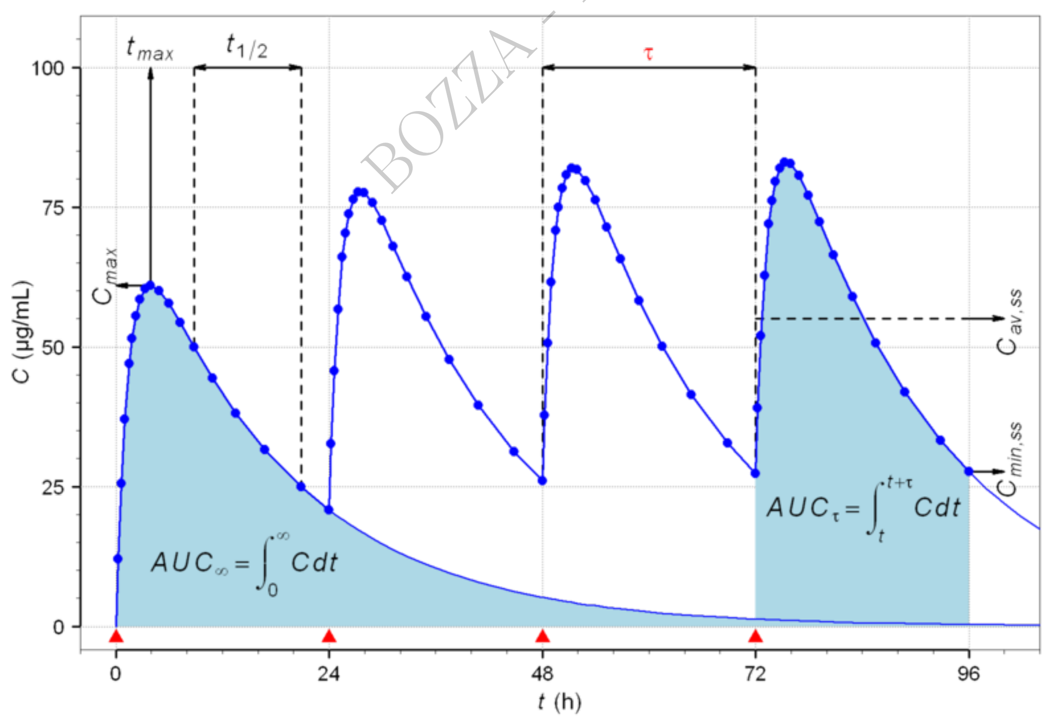


Figure 25: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linear_PK_Example.png. By Helmut Schütz.

Cioè, e si veda la figura sulla citata pagina di Wikipedia,

$$AUC_\infty := \int_0^{+\infty} concentrazione(t)\, dt$$

Un'applicazione molto vicina alla Farmacia è l'area sotto il grafico che esprime la concentrazione di glucosio nel sangue all'avanzare del tempo dopo l'assunzione di un pasto; si veda questa figura di Wikimedia Commons: `link->`; ciò serve a definire l'indice glicemico degli alimenti:

> The glycemic index of a food is defined as the incremental area under the two-hour blood glucose response curve (AUC) following a 12-hour fast and ingestion of a food with a certain quantity of available carbohydrate (usually 50 g). (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Glycemic index*.)

Quel grafico viene certo da analisi del sangue, ma può anche essere modellizzato matematicamente con funzioni, per ulteriori ricerche: `link->`. (Il quel testo, si noti che *in silico* = col computer; è un aggiornamento dei classici *in vitro* e *in vivo*).

Similmente l'indice insulinico:

> Glucose (glycemic) and insulin scores were determined by feeding 1000 kilojoules (239 kilocalories) of the food to the participants and recording the area under the glucose/insulin curve for 120 minutes then dividing by the area under the glucose/insulin curve for white bread. The result being that all scores are relative to white bread. . (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Insulin index*.)

Ma le applicazioni sono veramente innumerevoli.([103])

[103] In ambito Biomedico, si consideri la funzione $f(t)$ che esprime in millilitri all'ora il flusso di un liquido in un tubo, anatomico o artificiale: l'area in questione, da t_1 a t_2 in ore, rappresenta la quantità di liquido fluito, in millilitri; e ovviamente millilitri e ore possono essere cambiati con altre unità di misura di volume e tempo. Quella quantità sarà proprio $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$.
Si consideri, ancora, la determinazione delle aree geometriche, di figure definite dal loro bordo inteso come grafico di una funzione: ciò può servire nella progettazione di protesi anatomiche (Ingegneria Biomedica) o di reattori chimici per la produzione di farmaci.

30.2 Teoria ed esempi dell'integrale definito

Siano $F(x)$ e $f(x)$ due funzioni definite fra a e b, cioè sull'intervallo $[a, b]$ se $a \leq b$ e sull'intervallo $[b, a]$ se $a > b$.

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, cioè $F' = f$, e tale primitiva si può ottenere dall'integrale indefinito di f ponendo $c = 0$ o qualunque altro valore, in questa trattazione elementare – diversamente dall'uso consueto in Analisi Matematica – **definiremo l'*integrale definito* di $f(x)$ da a a b in questo modo**

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)_{\textit{scritto anche}}\,[F(x)]_a^b{}_{\leftarrow \textit{incremento di } F \textit{ da } a \textit{ a } b}$$

(ed è ovvio che qualunque primitiva si scelga, ovvero qualunque c, si ottiene lo stesso valore: c si elide nella sottrazione).

Si dimostra (teorema, complicato) che esso uguaglia l'area (consueta) fra l'asse x e il grafico di f fra a e b se $a < b$ e su $[a, b]$ è $f(x) \geq 0$. *(Sottografico).*

A un livello superiore, l'integrale definito viene definito sostanzialmente proprio con le aree, e questo consente di averlo anche per funzioni prive di primitiva come $\operatorname{sgn} x$, ma noi non considereremo tali integrali.

Si noti che
il sottografico è una figura piana (insieme di punti del piano),
l'integrale definito è un numero,
la primitiva è una funzione,
l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.

Esempio 1. Calcoliamo l'area sotto una "campata" della sinusoide, da 0 a π:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Esempio 2. Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione $y := \frac{1}{x}$ da 1 a 7:

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

ed è ben evidente che il numero 7 si può sostituire con qualunque numero t, ottenendosi il significato geometrico del logaritmo. Se $0 < t < 1$ il logaritmo naturale è negativo, e infatti l'area del sottografico, da intendersi come *area con segno*, è negativa perché la base viene percorsa da 1 a t in verso contrario all'orientazione dell'asse x. Si disegni l'iperbole e si stimi (dall'area) $\ln 10$.

Esempio 3. Per un processo termodinamico isotermico reversibile vale

$$Lavoro = -\int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{n\,R\,T}{V}\, dV =$$

per linearità dell'integrale definito, come pure indefinito,

$$= -n\,R\,T \int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{1}{V}\, dV =$$

$$= -n\,R\,T\,[\ln V]_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} =$$

$$= -n\,R\,T\,(\ln V_{finale} - \ln V_{iniziale}) =$$

$$= -n\,R\,T\,\ln \frac{V_{finale}}{V_{iniziale}}$$

Leggiamo su Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce *Isothermal process*:

> By convention, work is defined as the work on the system by its surroundings. If, for example, the system is compressed, then the work is positive and the internal energy of the system increases. Conversely, if the system expands, it does work on the surroundings and the internal energy of the system decreases.

30.3 Altri 3 teoremi sugli integrali

• Teorema fondamentale del Calcolo Integrale

$$D \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

• Dalla definizione – come l'abbiamo data – segue subito che

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

• **Regola di Chasles.** Per ogni a, b, c, in qualunque ordine,

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \tag{37}$$

(dove si intendano completati i 3 simboli di integrale con $f(x)dx$, che per focalizzare il significato di questo teorema, non è stato scritto esplicitamente).

Esercizio. Con la Regola di Chasles si calcoli $\int_{-1}^2 |x|\,dx$, si faccia un disegno, e si ricalcoli quell'integrale con le aree della geometria elementare. (Si noti che di $|x|$ non abbiamo dato una primitiva, ma quella funzione coincide con $-x$ fino a 0, e con x da 0 in poi).

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$

$\ast$ Supponiamo che in un tubo (per esempio di un reattore chimico per la produzione di farmaci) passi un liquido nella misura di

$$p(t) := |t|\,dl/h$$

nel tempo t fra -1 e 2 (h, ore, unità di tempo; quella negativa indica un tempo anteriore a un tempo detto 0; si può ipotizzare, per esempio, che lo 0 sia una certa mezzanotte, e allora stiamo considerando il tempo dalle 23 alle 2 di notte, in effetti del giorno successivo). Calcolare

$$\int_{-1}^2 p(t)\,dt$$

che da un punto di vista fisico – ma non ce ne occuperemo – rappresenta la quantità totale di liquido fluito nel tempo considerato, e ha unità di misura dl, cioè decilitri, ma per semplicità si facciano i calcoli e si dia la soluzione senza unità di misura.

SVOLGIMENTO

Ricordando che

$$|x| := \begin{cases} x & se\; x \ge 0 \\ -x & se\; x < 0 \end{cases}$$

ora (eliminando le unità di misura)

$$\int_{-1}^{2} p(t)\, dt = \int_{-1}^{2} |t|\, dt =$$

per la Regola di Chasles

$$= \int_{-1}^{0} (-t)\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

per la linearità dell'integrale (cioè per le formule (33) e (34))

$$= -\int_{-1}^{0} t\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

ricordando la primitiva elementare $\int t\, dt = t^2/2 + c$

$$= -\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{2} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = \frac{5}{2} =$$

esattamente

$$\boxed{2.5}$$

oppure anche validamente (ma in effetti meno bene, visto il significato fisico)

$$\boxed{\tfrac{5}{2}}$$

(Si tratta di due decilitri e mezzo, dal punto di vista fisico, molto meglio espressi – almeno come risultato finale – come 2.5 che $\frac{5}{2}$).

Esercizio$_\mu$ Si consideri la funzione

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{(che si chiama \textit{densità di Cauchy})}$$

e si calcoli

$$\int_{0}^{1} f(t)\, dt$$

e si troverà $\frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$ che rappresenta – anticipando un argomento di Calcolo delle Probabilità – la probabilità che una variabile casuale (o meglio detta aleatoria) che ha quella densità assuma un valore fra 0 e 1. Si faccia un disegno della funzione ombreggiando il sottografico relativo all'area trovata.
Con analogo calcolo, o semplicemente per simmetria, ne viene che

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

che rappresenterà la probabilità che una variabile aleatoria che ha quella densità assuma un valore fra -1 e $+1$.
Si calcoli poi

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$$

e ovviamente l'estremo $+\infty$ va inteso nel senso del limite(104). Si troverà $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ che rappresenterà la probabilità che una variabile aleatoria che ha quella densità assuma un valore fra 0 e $+\infty$ ovvero non negativo.
Infine si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

e si troverà 1 cioè 100% e questo valere 1 dell'integrale su tutto $\mathbb{R}$ avviene per tutte le densità di probabilità (che, poi, hanno anche la caratteristica di essere ≥ 0).

Questa dell'esercizio soprastante grafico di

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

non è la curva a campana che più ricorre nelle applicazioni come densità, che invece è la campana gaussiana già accennata, ma ha il pregio di essere più facilmente trattabile pur esibendo comportamenti in parte simili. (I valori $f(t)$ si possono bene calcolare approssimatamente con le 4 operazioni).

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ $\approx$ Approssimando $\arctan(20)$ con $\arctan(+\infty)$, calcolare

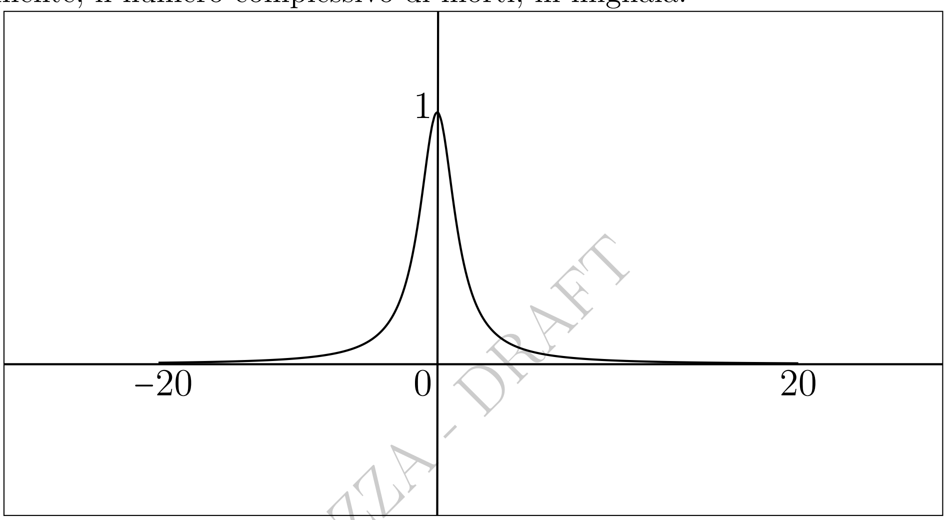
$$\int_{-20}^{20} f(t)\, dt, \qquad f(t) := \frac{1}{1+t^2}$$

e potrà essere utile questa tavola di valori, dove ovviamente l'infinito va inteso nel senso del limite: somma di una qua

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\arctan(-x) = -\arctan x)$

[104] Per le funzioni molto regolari che ci interessano in pratica, questo non creerà alcun problema, e nei trattati di Calcolo delle Probabilità si scrivono tranquillamente cose come $\arctan(+\infty)$, formalmente scorrette dal punto di vista matematico.

Di questa questione possiamo dare un'interessante interpretazione, seppure non serva per risolvere il quesito. Il numero di morti di un'epidemia, in migliaia, sia approssimatamente modellizzato dalla $f(t)$ considerata, per $-20 \le t \le 20$ essendo t il tempo, dal giorno $t = -20$ (per esempio 11 dicembre 2020) al tempo $t = 20$ (20 gennaio 2021). (Per esempio, vediamo che nel giorno di picco $t = 0 =$ 31 dicembre 2020 il modello dà 1000 morti).
Allora ovviamente l'area espressa dall'integrale considerato dà, molto approssimativamente, il numero complessivo di morti, in migliaia.



SVOLGIMENTO

$$\int_{-20}^{20} \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= [\arctan t]_{-20}^{20} =$$

$$= \arctan(20) - \arctan(-20) =$$

per la disparità dell'arcotangente ricordata nella tavola

$$= \arctan(20) - (-\arctan(20)) =$$

$$= 2\ \arctan(20) \approx 2\ \arctan(+\infty) = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi \approx$$

$$\boxed{\approx 3.14}$$

(e nell'interpretazione dell'epidemia corrisponde a circa 3140 morti, diciamo pure "circa 3000 morti" a causa delle grossolane approssimazioni).
Nota 1. È stata un'epidemia molto intensa solo per breve tempo, con un'ascesa

verso il picco e una discesa in certo qual modo rapidissime, con buona parte dei morti concentrati in una settimana, molto diversa dalla pandemia attuale (2020-2021), per la quale – nemmeno per la sola Italia – una formula semplicissima come quella dell'esercizio non può bastare. Ecco alcuni valori dati dalla funzione dell'esercizio:

31 dicembre 1000 morti
1 gennaio 500 morti
2 gennaio 200 morti
3 gennaio 100 morti

Nota 2. Se invece dell'integrale, con un computer (o a mano con molta pazienza) sommiamo i morti previsti dal modello per i 41 giorni dell'epidemia, si ha, molto più precisamente,

$$\sum_{t=-20}^{20} \frac{1}{1+t^2} \approx 3.056$$

cioè ≈ 3056 morti.

30.4 Note finali sulle funzioni elementari

Le regole della Natura sono scritte in linguaggio matematico, ci insegna Galileo Galilei.

Particolarmente efficaci in questo senso sono le *funzioni elementari*: potenze, logaritmi, esponenziali, valore assoluto, funzioni trigonometriche... (Una completa elencazione sarebbe difficile).

È spettacolare quanti fenomeni si possono descrivere con formule fatte di funzioni elementari con le 4 operazioni più l'elevamento a potenza – in particolare la potenza 0.5 che dà la radice quadrata.

Un modello matematico può approssimativamente essere definito come una relazione matematica – diciamo pure in generale una funzione o meglio un'equazione con più variabili – che cattura certi aspetti della realtà sensibile, quantificati da quelle variabili. Per esempio

$$funzione(variabile_1, ..., variabile_n) = 0$$

come la $pV - nRT = 0$ della Termodinamica.
E, sorprendentemente spesso, quella funzione o equazione è fatta con funzioni elementari combinate con le 4 operazioni e l'elevamento a potenza. (Talvolta ci sono funzioni *non elementari*).

Entusiasmati dal successo, c'è il rischio di esagerare.
(E "trasformare tutto in un numero").

Osserviamo due limitazioni:
1) la relazione matematica è quasi sempre approssimata;
2) smette di valere al di fuori di certi range (domini) in generale non ben specificati, perdendo progressivamente bontà.

Esempio 0, di Microbiologia: l'accrescimento microbico.
Abbiamo già ben detto, che il numero di microbi in una coltura non cresce per sempre esponenzialmente, ma solo – e comunque approssimativamente – all'inizio. Similmente con qualunque altra popolazione; come pure non c'è epidemia che non finisca.

Esempio 1, di Fisica e Chimica: i vasi comunicanti.
Definito un certo sistema fisico, detto dei vasi comunicanti, com'è noto vale la relazione

$$h_1 = h_2$$

Fin dall'inizio c'è l'approssimazione della non perfetta planarità delle superfici liquide nelle immediate vicinanze dei bordi, per complessi fenomeni fisici. Ma poi, è ovvio che tale formula non avrà senso per altezze maggiori del diametro dell'universo. E anche su scale umane, la relazione non vale molto bene se uno dei due vasi è "molto" sottile, per il (complesso) fenomeno fisico della capillarità: via via che uno dei due vasi si assottigliasse, la formula perderebbe precisione. Eppure, la Legge dei Vasi Comunicanti rimane del massimo valore, teorico e applicativo, e il fenomeno è modellizzato proprio dalla semplice equazione sopra scritta. Con tutte le cautele del caso, quindi.

31 Serie geometrica e cenni alle altre serie

Essenzialmente le serie sono in qualche modo delle "somme infinite". Da definire.
Estenderemo l'uso del simbolo di sommatoria $\sum$ dal caso finito a quello con infiniti termini: essenzialmente, vogliamo occuparci di $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ con infiniti termini.

31.1 Introduzione alle serie numeriche

Definizione di serie (numerica). In questa trattazione elementare, una serie (numerica) è una scrittura come queste

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_k + \ldots \quad {\scriptstyle \textit{il primo indice poteva essere diverso da } 0} \tag{38}$$

$$\text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad {\scriptstyle \textit{anche qua, ovvio}} \tag{39}$$

$$\text{per esempio} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ ovvero } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{40}$$

e questa dell'esempio si chiama *serie armonica*, mentre quest'altra

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{3}{2^k} + \ldots \text{ ovvero } \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{41}$$

è una (particolare) *serie geometrica* di *ragione* $\frac{1}{2}$.

Definizione di somma di una serie.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \to +\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \quad \text{se } \exists\,. \tag{42}$$

Questa formula (42) ci dice che la *somma della serie* al primo membro è il **limite**, se esiste (finito o infinito) della

ridotta o *somma parziale* $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. ← (normale) numero.

Esempio.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k} =$$

$$= 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + ... =$$
$$= 0.33333.... =$$
$$= \frac{1}{3}$$

e già qua ci togliamo il dubbio: sì, può ben essere che aggiungendo indefinitamente quantità positive, non si superi un tanto, e anzi si converga a un limite finito.

Nota sull'ambiguità notazionale. Le 2 scritture equivalenti

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{e} \qquad a_0 + a_1 + ... + a_n + ... \tag{43}$$

denotano sia la *serie* (scrittura), che l'<u>eventuale</u> sua *somma* (numero oppure $+\infty$ oppure $-\infty$).

31.2 Il numero di Nepero

Il numero e che abbiamo già visto, base dei logaritmi naturali e valore di un Limite Fondamentale, è

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \approx 2.718$$

e adesso siamo in grado di comprenderlo come somma di una serie che lo definisce. (In generale, in Analisi Matematica viene invece definito dal Limite Fondamentale, e solo dopo si dimostra la sua serie).

31.3 Serie geometrica

Ci occuperemo ancora della sola *serie geometrica di ragione r compresa fra 0 e 1 esclusi*, che ricorre ampiamente nel Calcolo delle Probabilità:

$$\begin{array}{l} a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = \frac{a}{1-r} \\ a \in \mathbb{R} \\ 0 < r < 1 \end{array} \tag{44}$$

(La formula vale anche per $-1 < r < 1$ ma ci interessano solo i valori $0 < r < 1$, e poi il caso $r = 0$ è ovvio).
Nel Calcolo delle Probabilità è sempre $a > 0$.

Seppure il Calcolo delle Probabilità lo tratteremo in seguito, ritenendo noto qualche concetto dagli studi scolastici vediamo un esempio di applicazione della serie geometrica, per mostrarne l'utilità.

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$
$\ast \approx ^{\%}$ Una certa affezione, quando insorge ha una durata in giorni (interi) con probabilità
$\frac{1}{2}$ probabilità di durare 1 giorno
$\frac{1}{4}$ probabilità di durare 2 giorni
$\frac{1}{8}$ probabilità di durare 3 giorni
...
$\frac{1}{2^n}$ probabilità di durare n giorni.
(Che si chiama *densità geometrica iniziante da 1 di parametro* $\frac{1}{2}$).
Qual è la probabilità che duri un numero pari di giorni?

Svolgimento
Detta X la durata dell'affezione, scriviamo (usando la notazione delle variabili aleatorie, che tratteremo in seguito, ma che comunque qua appare di interpretazione ovvia)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \dots & \frac{1}{2^n} \dots \end{pmatrix}$$

$$P(X\ pari) = P(X \in \{2, 4, 6...\}) =$$

$$= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \dots =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

che si riconosce esser serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{4}$ (perché ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

(Si noti che allora è più probabile che duri un numero dispari di giorni. Questo rimane vero con qualunque valore di $p \in]0,1[$, non solo $\frac{1}{2}$, e perfino con qualunque densità decrescente definita su 1,2,3... A Trieste si dice che il vento Bora tende a durare un numero dispari di giorni).

ESERCIZIO$_{\mu}$
$* \approx$ Calcolare $\Sigma_{n=1}^{\infty} 0{,}3^n$.

SVOLGIMENTO
Ricordando la somma della serie geometrica di ragione a fra 0 e 1 esclusi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\, r^k = \frac{a}{1-r} \qquad \Big(a \in \mathbb{R}, \quad 0 < r < 1\Big)$$

si ha, con $a = 1$ e $r = 0{,}3$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0{,}3^k = \frac{1}{1-0{,}3} = \frac{1}{1-\frac{3}{10}} = \frac{1}{\frac{10-3}{10}} = \frac{10}{7}$$

che è proprio quanto dobbiamo calcolare salvo il termine 0-esimo, e allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0{,}3^k = -0{,}3^0 + \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}3^k = -1 + \frac{10}{7} = \frac{-7+10}{7} =$$

$$\boxed{\tfrac{3}{7} \approx 0{,}428\,571}$$

31.4 Nota sulla precisione dei numeri

In questa trattazione matematica in generale diamo i risultati con parecchie cifre significative. Il che è una buona cosa da un punto

di vista matematico. In Farmacia ci sono aspetti pratici, che in questa trattazione elementare non consideriamo, per i quali le approssimazioni usate in generale potrebbero essere molto meno precise. Difficilmente si leggerà che un paziente ha 33.33% di sopravvivere. E nessuna farmacia ordinerà al fornitore 8 264.46 mg di un principio attivo.
Dietro tutto ciò ci stanno questioni legate alla precisione delle misure e più in generale dei dati.

Di fatto in Farmacia si usa ancora la prescrizione di “una punta di cucchiaino” di preparato in polvere.

Complementi

31.5 Complementi – Proprietà delle serie

• Serie *convergente*, con somma s: il limite delle somme parziali è il numero $s \in \mathbb{R}$. Per esempio la *serie ciclometrica*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \ldots = \frac{\pi}{4}\,. \tag{45}$$

• *Serie non convergenti*: quelle *indeterminate* ($\nexists$ limite) come

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^k + \ldots \tag{46}$$

(la somma parziale vale alternatamente 1 e 0), quelle *divergenti a* $+\infty$ come $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ e quelle *divergenti a* $-\infty$.
$\star$ Serie *a termini positivi*: $a_k > 0$ per ogni k. (Similmente le serie a termini *non negativi* se ≥ 0, e negativi, e non positivi se ≤ 0).
$\star$ Serie *a termini di segno alternato*, con ovvio significato.

• *Serie geometrica di ragione* $r \in \mathbb{R}$, fissiamo le idee con $a > 0$:

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & se\ |r| < 1 \\ +\infty & se\ r \geq 1 \\ \nexists & se\ r \leq -1 \end{cases} \tag{47}$$

Nel terzo caso la serie è indeterminata. Per $a<0$ vale il Teor. 1.

• *Serie esponenziale.* $1 + a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^k}{k!} + \ldots = \mathrm{e}^a$. (Si dimostra).

• La *serie armonica*, prima vista: diverge a $+\infty$.

Teorema 1. $ca_{n_0} + ca_{n_0+1} + \ldots + ca_k + \ldots = c(a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_k + \ldots)$

con l'ovvio significato se la serie in parentesi diverge a $+\infty$.

Teorema 2. Se $a_k \not\to 0$ allora la serie è non convergente.

Teorema 3. Se ogni $a_k \geq 0 \Rightarrow$ la serie converge o diverge a $+\infty$.

Teorema 4. (Di Leibniz). Se in una serie a termini di segno alternato $|a_k| \to 0$ e $|a_k|$ è decrescente anche solo in senso debole, cioè $|a_{k+1}| \leq |a_k|$, allora la serie converge.

In particolare $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \ldots = \ln 2$, *serie di Leibniz.*

Postille alle prime lezioni

Già messe a posto sulla dispensa nelle prime lezioni

Cenni alle equazioni differenziali. ODE

Un'equazione differenziale è un'uguaglianza fra funzioni, di cui almeno una, sia essa $y(t)$, è incognita, e in tutta l'espressione compare almeno una volta $y'(t)$ *vel* una derivata di ordine superiore. Eccone 4: $y' = t$, $y' = y$, $y'' = y$, $y''' = t\,y'^2$.

Internazionalmente si usa l'acronimo ODE per Ordinary Differential Equation (equazione differenziale ordinaria) se di funzioni incognite ce n'è solo una. Solo di queste ci occuperemo in questo paragrafo, e solo a un livello infimo. (L'argomento potrebbe riempire più di un corso universitario). Qualche esempio più complesso, il modello SIR dell'Epidemiologia, si trova nella Lezione sulla matematica delle epidemie.

=====================

Già sappiamo risolvere la

$$(1+t^2)\,y'(t) = 1 \qquad \text{altrimenti scritta } (1+t^2)\,y' = 1$$

cioè la

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

trovando

$$y(t) = \arctan t + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[(1+t^2)y'=1]` dà $y(t) = c_1 + \tan^{-1}(t)$

Esercizio$_\mu$ Risolvere la $t^3\,y' - 5 = 0$.

SVOLGIMENTO

È un'equazione differenziale e si risolve con questi passaggi:

$$t^3\,y' = 5$$

$$y'(t) = \frac{5}{t^3}$$

$$y(t) = \int 5\,t^{-3}\,dt = 5\int t^{-3}\,dt = 5\,\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{5}{2\,t^2} + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[t^3y'=5]` dà $c_1 - \frac{5}{2\,t^2}$

====================

Note finali sulle funzioni elementari

Le regole della Natura sono scritte in linguaggio matematico, ci insegna Galileo Galilei.

Particolarmente efficaci in questo senso sono le *funzioni elementari*: potenze, logaritmi, esponenziali, valore assoluto, funzioni trigonometriche... (Una completa elencazione sarebbe difficile).

È spettacolare quanti fenomeni si possano descrivere con formule fatte di funzioni elementari con le 4 operazioni più l'elevamento a potenza.

Un modello matematico può approssimativamente essere definito come una relazione matematica – diciamo pure in generale una funzione o meglio un'equazione con più variabili – che cattura certi aspetti della realtà sensibile, quantificati da quelle variabili. Per esempio

$$funzione(variabile_1, ..., variabile_n) = 0$$

come la $p\,V - n\,R\,T = 0$ della Termodinamica.
E, sorprendentemente spesso, quella funzione o equazione è fatta con funzioni elementari combinate con le 4 operazioni e l'elevamento a potenza. (Talvolta ci sono funzioni *non elementari*).

Entusiasmati dal successo, c'è il rischio di esagerare.
(E "trasformare tutto in un numero").

Osserviamo due limitazioni:

1) la relazione matematica è quasi sempre approssimata

2) smette di valere al di fuori di certi range (domini) in generale non ben specificati, perdendo progressivamente bontà.

Esempio 0, di Microbiologia: l'accrescimento microbico. Abbiamo già ben detto, che il numero di microbi in una coltura non cresce per sempre esponenzialmente, ma solo – e comunque approssimativamente – all'inizio. Similmente con qualunque altra popolazione; come pure non c'è epidemia che non finisca.

Esempio 1, di Fisica e Chimica: i vasi comunicanti. Definito un certo sistema fisico, detto dei vasi comunicanti, com'è noto vale la relazione

$$h_1 = h_2$$

Fin dall'inizio c'è l'approssimazione della non perfetta planarità delle superfici liquide nelle immediate vicinanze dei bordi, per complessi fenomeni fisici. Ma poi, è ovvio che tale formula non avrà senso per altezze maggiori del diametro dell'universo. E anche su scale umane, la relazione non vale molto bene se uno dei due vasi è "molto" sottile, per il (complesso) fenomeno fisico della capillarità: via via che uno dei due vasi si assottigliasse, la formula perderebbe precisione. Eppure, la Legge dei Vasi Comunicanti rimane del massimo valore, teorico e applicativo, e il fenomeno è modellizzato proprio dalla semplice equazione sopra scritta. Con tutte le cautele del caso, quindi.

PARTE B – MATEMATICHE DELL'INCERTEZZA

Sezione B1 – Calcolo delle probabilità

VII – Probabilità assiomatica ed elementare

32 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

32.1 Inquadramento della questione

Il calcolo delle probabilità è una branca della matematica.
Come tale tratta oggetti astratti, ma, a differenza di altre branche della matematica, gli enti che manipola sono in generale molto vicini o collegati alla realtà sensibile: in particolare troverete affermazioni su dadi e monete, che sono modelli "ideali" , "puliti", perfetti, per poi applicare le tecniche a fenomeni della realtà sensibile, in particolare sanitari e farmaceutici, inevitabilmente molto meno "ideali" e "puliti", come come migliora/peggiora.

Sebbene comprenda molti sottocapitoli, il suo prodotto principale è un numero che è *la probabilità di un evento*, come "la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia 7 è $\frac{1}{6}$", che di per sè potrebbe voler dire poco ma può diventare preziosissimo per *scegliere* fra diverse alternative possibili, confrontandole numericamente; per esempio la probabilità che la somma (dei punti) di 2 dadi sia 8 è $\frac{5}{36}$ che è meno di $\frac{1}{6}$. Non solo per una scommessa sui dadi fra amici, ma anche per delicate scelte mediche o economiche o personali.
Cosa daranno i dadi è incerto ma che convenga scommettere sul 7 piuttosto che sull'8 è certissimo.
Pensate allora al confronto fra 2 terapie farmacologiche.

Gli enti teorici di base sono gli eventi e la probabilità, definita in 4 modi:

- Concezione classica della probabilità
- Concezione frequentista della probabilità
- Concezione soggettiva della probabilità
- Concezione assiomatica della probabilità

Metodi del calcolo delle probabilità sono l'algebra e la geometria analitica, le funzioni elementari, il calcolo combinatorio, il calcolo infinitesimale.

32.2 La concezione frequentista della probabilità

La concezione frequentista della probabilità è intuitiva e la vediamo con un esempio. Un farmaco è stato somministrato a 1000 persone con una certa diagnosi di malattia, e dopo 5 anni sono vive 700. Per l'uniformità delle condizioni e l'alto numero di *prove* si tende a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato ad altre 100 persone con quella stessa diagnosi di malattia, circa 70 saranno vive dopo 5 anni, ovvero, detto altrimenti, che somministrato a 1 persona c'è il 70% di *probabilità* che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 70% cioè 0.7 è $\frac{700}{1000}$).
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 2000 persone e dopo 5 anni sono vive 1200, si tenderà a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato ad altre 100 persone con quella stessa diagnosi di malattia, circa 60 saranno vive dopo 5 anni, ovvero, detto altrimenti, che somministrato a 1 persona c'è il 60% di *probabilità* che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 60% cioè 0.6 è $\frac{1200}{2000}$), meno del primo farmaco.
Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 4 persone e dopo 5 anni sono vive 3, ne verrebbe una probabilità di sopravvivenza a 5 anni del 75%, cioè 3 su 4, cioè perfino meglio del primo farmaco, che però è stato provato su 1000 persone, mentre questo solo su 4; e qui siamo giunti al limite della validità di questa concezione, se non vengono fatti ulteriori approfondimenti.
Le probabilità così ottenute si chiamano *probabilità a posteriori*.

In pratica, detto semplificatamente, se finora è andata in un certo modo, con una certa quota di "successi" (ma si faccia attenzione che il successo può esere non solo la guarigione ma anche la morte o quant'altro, dipende da come si definisce), riteniamo che potrà continuare ad andare nello stesso modo, "proporzionalmente", e ciò definisce la probabilità (in senso) frequentista.

32.3 La concezione classica della probabità

La concezione classica della probabilità si basa su

un concetto primitivo che bisogna supporre noto: l'*equiprobabilità*;

e

questa definizione, valida solo per i casi equiprobabili:

$$\text{probabilità} := \frac{numero\,dei\,casi\,favorevoli}{numero\,dei\,casi\,possibili}$$

Per esempio i 6 risultati del dado (regolare, non truccato) li riteniamo equiprobabili e allora la probabilità del risultato pari è

$$P(pari) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Come ulteriore esempio, la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia maggiore di 10 è $\frac{3}{36}$ cioè $\frac{1}{12}$ perché dei 36 casi possibili equiprobabili $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$,..., $(6,6)$ sono 3 quelli favorevoli all'evento considerato (somma maggiore di 10) e cioè $(5,6)$, $(6,5)$, $(6,6)$.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ $\approx$ % Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari?

SVOLGIMENTO

Dei 36 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6
```

con somme rispettive

```
02 03 04 05 06 07
03 04 05 06 07 08
04 05 06 07 08 09
05 06 07 08 09 10
06 07 08 09 10 11
```

```
07 08 09 10 11 12
```
(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3 5, 7, 11) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12) rispettivamente
```
P P n P n P
P n P n P n
n P n P n n
P n P n n n
n P n n n P
P n n n P n
```
avendosi così 15 casi favorevoli su 36 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\, equiprobabili} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

e in definitiva

$$\boxed{\frac{5}{12} \approx 0.417 = 41.7\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{5}{12} \approx 0.4167 = 41.67\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\ast$ $\approx$ % Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari a 8 facce numerate da 1 a 8? (Hanno la forma di ottaedro regolare).

SVOLGIMENTO

Dei 64 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,
```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6 1+7 1+8
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6 2+7 2+8
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6 3+7 3+8
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6 4+7 4+8
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6 5+7 5+8
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6 6+7 6+8
7+1 7+2 7+3 7+4 7+5 7+6 7+7 7+8
8+1 8+2 8+3 8+4 8+5 7+6 8+7 8+8
```
con somme rispettive
```
02 03 04 05 06 07 08 09
03 04 05 06 07 08 09 10
04 05 06 07 08 09 10 11
```

```
05 06 07 08 09 10 11 12
06 07 08 09 10 11 12 13
07 08 09 10 11 12 13 14
08 09 10 11 12 13 14 15
09 10 11 12 13 14 15 16
```

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3, 5, 7, 11, 13) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16) rispettivamente

```
P P n P n P n n
P n P n P n n n
n P n P n n n P
P n P n n n P n
n P n n n P n P
P n n n P n P n
n n n P n P n n
n n P n P n n n
```

avendosi così 23 casi favorevoli su 64 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\_equiprobabili} =$$

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.359 = 35.9\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.3594 = 35.94\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

32.4 La mortalità

Semplificando, il numero, definito per uno stato o una regione geografica, relativamente a 1 anno,

$$m := \frac{\#\, morti}{\#\, abitanti}$$

si chiama mortalità. (E certo, qua semplificatamente consideriamo costante il numero di abitanti nell'anno).
Ultrasemplificatamente, nel terzo millennio è intorno all'1% in molti Stati. Ovvero intorno al 10 per mille.

Riferito al passato, può essere visto nel contesto della Statistica Descrittiva.

Ma in situazioni relativamente stabili – senza guerre o epidemie oltremodo devastanti – può essere visto nell'ottica delle probabilità soggettiva e frequentista:

$$P(\text{un soggetto preso a caso muore entro 1 anno}) = m$$

(E certo un pessimista, nella sua valutazione soggettiva di probabilità, potrà dare valori anche maggiori).

Naturalmente si possono considerare anche mortalità riferite a una singola causa di morte. Per esempio col covid-19 coi 75mila morti 2020 su 60,3 milioni di italiani si trova una mortalità covid 2020 dello 0.13% ovvero 1.3 per mille.

E naturalmente si possono considerare mortalità riferite a fasce d'età e genere. Negli USA molte statistiche sanitarie sono fatte anche per gruppo razziale.

32.5 Concezione soggettiva della probabilità

La definizione soggettiva della probabilità (di Leonard Jimmie Savage e Bruno[105] de Finetti) la diamo implicitamente attraverso questo esempio. Supponiamo che io possa scommettere sulla vittoria della squadra dei Vispi Volpini della prima partita del campionato e abbia queste idee:

Metto 100 euro e se vince prendo 300 euro: accetto felicissimo
Metto 100 euro e se vince prendo 200 euro: accetto contento
Metto 100 euro e se vince prendo 126 euro: per un pelo accetto
Metto 100 euro e se vince prendo 125 euro: sono indifferente
Metto 100 euro e se vince prendo 124 euro: per un pelo ma rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 110 euro: rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 100 euro: ci mancherebbe!

Questo significa che io ritengo che la probabilità di vittoria della squadra è $\frac{4}{5} = 0.8 = 80\%$. In pratica nell'ipotesi intermedia in cui non ho nè interesse a scommettere nè a non scommettere ritengo che se l'evento si verificasse 5 volte, 4 volte la squadra vincerebbe e io avrei preso $4 \cdot 125$ euro cioè 500 euro, esattamente quanto avrei speso nelle 5 scommesse. È ovvio che a 126 euro considero vantaggiosa la scommessa (seppure di poco).

Il pareggiarsi della spesa con l'ipotetica vincita definisce la *probabilità soggettiva* che io attribuisco al verificarsi dell'evento considerato.
La formula è

$$p = \frac{costo\, della\, scommessa}{vincita\, nel\, caso\, indifferente}\,.$$

[105] Attuario presso le Assicurazioni Generali, lungamente docente all'Università di Trieste, fu anche uno degli ideatori del codice fiscale.

Nell'esempio $\frac{100}{125}$.

Con questa definizione, un esperto attuario può fissare il premio assicurativo per un evento per il quale non sia disponibile una casistica significativa, come l'immissione sul mercato di un farmaco da parte di una nuova azienda, o un viaggio su Marte; o esiste una casistica assolutamente non omogenea.

Il ricorso alla probabilità soggettiva è frequentissimo in Farmacia e Medicina.

Esempio 1.

Leggiamo([106]) per esempio sul sito dell'ECDC, European Centre for Disease Prevention and Control:

On the basis of the information currently available, ECDC considers that:

> • the likelihood of infection for EU/EEA citizens residing in or visiting Hubei province is estimated to be high;
>
> • the likelihood of infection for EU/EEA citizens in other Chinese provinces is moderate and will increase;
>
> • there is a moderate-to-high likelihood of additional imported cases in the EU/EEA;
>
> • the likelihood of observing further limited human-to-human transmission within the EU/EEA is estimated as very low to low if cases are detected early and appropriate infection prevention and control (IPC) practices are implemented, particularly in healthcare settings in EU/EEA countries;

Il soprastante testo non si spinge fino a dare stime numeriche dei valori di probabilità, ma molto chiaramente parla in termini di probabilità (o verosimigliana: *likelihood*) "alta", "moderata", "da-moderata-ad-alta", "da molto bassa a bassa".

Le valutazioni di probabilità soggettiva prodotte da enti considerati autorevoli possono orientare significativamente i comportamenti, dei singoli e delle comunità, sia direttamente sia influen-

[106]Letto il 4 febbraio 2020 in https://www.ecdc.europa.eu/sites/default/files/documents/novel-coronavirus-risk-assessment-china-31-january-2020_0.pdf

zando (e di fatto fungendo da base teorica) l'emanazione di regolamenti o leggi, a vari livelli di autorità.

Anche le norme antisismiche italiane a cui devono sottostare i nuovi edifici (coi relativi costi associati), comprese le farmacie e soprattutto gli ospedali, sono basate su valutazioni di probabilità soggettiva, che classificano il rischio sismico nelle varie zone. In particolare la "zona 1" è quella in cui *si ritiene* che probabilità che capiti un forte terremoto sia *alta* (in un prossimo futuro; idealmente, in via semplificata, si pensi a 50 anni). E poi vi sono le zone 2, 3, e 4. Con ovvie differenze nei costi di costruzione.

Naturalmente nel corso della storia un'infinità di volte gli *esperti* hanno sbagliato le stime, anche in un modo clamoroso; si veda per esempio lo spassoso libro *La parola all'esperto*. Tuttavia questo fenomeno si riduce se si distinguono i *sedicenti* esperti dagli esperti deputati da organismi già di per loro, in qualche modo, di alto livello. (Eppure anche qua, c'è stato talvolta *da mettersi le mani nei capelli*.)

Se invece scendiamo al livello dei profani relativamente ad un certo argomento specialistico, in generale le loro stime di frequenza o probabilità (il che è relativamente equivalente) in generale valgono, per così dire, *un po' meno di nulla*, con usuali sovrastime di parecchi ordini di grandezza – anche per la potenza della manipolazione mediatica – delle frequenze (e quindi delle associate probabilità) di fenomeni anche ampiamente considerati e discussi pubblicamente.

Le valutazioni di probabilità soggettiva ovviamente sono alla base della vita di tutte le persone, ma ad un livello basico, senza applicazione di formule, per esempio quando si ritiene più probabile una cosa di un'altra.

Ad un livello matematico più fine, le valutazioni di probabilità soggettiva governano molte scelte di tipo medico e sanitario.

Ad un livello matematico ancora superiore, esse sono alla base di buona parte dell'economia mondiale, governando la finanza speculativa, le assicurazioni, i bonds...
Con specifico riferimento alla Medicina e alla Farmacia, si considerino in particolare gli *ebola bonds*, che traggono il nome dal morbo ebola ma possono applicarsi ad altri, che sono vere e proprie scommesse sulle epidemie. Queste scommesse in teoria sono formulate *positivamente*, perché gli investitori nazionali guadagnano se l'epidemia *non* si verifica – e i danni li pagano organismi sovranazionali come la Banca Mondiale.
Ma distorsioni sono possibili, come vediamo in questo passaggio:

> *"to do so Ebola must kill at least 20 people in at least one other country. So far, neighbouring Uganda has only had two victims. (...) Congolese health authorities have an incentive to let the virus move into Uganda in order to unlock more aid."*(107)

[107] Reuters in https://www.reuters.com/article/us-worldbank-ebola-breakingviews/breakingviews-ebola-bonds-are-wonky-way-to-tackle-pandemics-idUSKCN1V30SW, consultato il 5 marzo 2020.

33 Concezione assiomatica della probabilità

La definizione assiomatica della probabilità è astratta e con definizioni e assiomi crea la probabilità, interpretabile in modo del tutto compatibile con le altre 3 concezioni della probabilità viste:

• Ω: *evento certo* (p.es. "il dado fa 1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6", oppure "vive o muore").

• $\mathbb{A}$: *σ-algebra degli eventi*, un sottoinsieme delle parti di Ω (cioè di $I\!\!P(\Omega)$) sufficientemente regolare, precisamente tale che:
 ⋄ $\varnothing, \Omega \in \mathbb{A}$
 ⋄ $(\forall A \in \mathbb{A})\ A^C \in \mathbb{A}$ (dove A^C è il complementare di A)
 ⋄ $(\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathbb{A})\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.
(In $\mathbb{A}$ stanno tutti gli eventi *ragionevolmente* considerabili).

• La *[funzione] probabilità* $P : \mathbb{A} \to [0,1]$ tale che
 ⋄ $P(\Omega) = 1$ (l'evento certo ha probabilità 100%)
 ⋄ $P(A_1 \cup^* A_2 \cup^* ... \cup^* A_n \cup^* ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$
dove $\cup^*$ indica l'unione disgiunta cioè con intersezione vuota.

• Lo *spazio di probabilità*: la terna ordinata $(\Omega, \mathbb{A}, P)$.

• Si definisce la *probabilità condizionata*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{48}$$

per la quale è apparsa conveniente l'interpretazione di probabilità che si verifichi B *sapendo* che si è verificato A. Per esempio con riferimeno a un dado (regolare)

$$P(\text{“}dispari\text{”}|\text{“}primo\text{”}) = \frac{P(\text{“}dispari\text{”} \wedge \text{“}primo\text{”})}{P(\text{“}primo\text{”})} =$$

$$= \frac{P(\{2,3,5\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{2,3,5\})} =$$

$$= \frac{P(\{3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Il concetto di probabilità condizionata è sottostante alla distinzione fra *mortalità* e *letalità* di una malattia, qua definibili ultrasemplificatamente così:

$$\text{mortalità} := \frac{morti}{abitanti} = P(morte)$$

$$\text{letalità} := \frac{morti}{malati} = P(morte \,|\, malato)$$

naturalmente in un senso frequentista (cioè in pratica contando i morti), e ovviamente (sia per la mortalità che per la letalità) bisognerà specificare un intervallo di tempo, per esempio dall'inizio alla "fine" di un'epidemia.
Per esempio leggiamo(108) sulla peste del Trecento:

> Una volta giunta in Europa, la peste nera si diffuse rapidamente perdurando tra i sei e i nove mesi nelle aree colpite. Il tasso di mortalità medio fu di circa il 30% nel totale della popolazione, mentre il tasso di letalità fu circa il 60%.

Nel caso che sapere che si è verificato A non muti per noi la probabilità che si verifichi B, cioè $P(B|A) = P(B)$, si ottiene, da quest'equazione e dalla (48),

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{eventi indipendenti}$$

e quest'equazione definisce assiomaticamente il caso di 2 *eventi indipendenti*. E si estende a 3 o più eventi, ma la questione è delicata.(109)
Questa degli eventi indipendenti è in qualche modo la formula più importante del Calcolo delle Probabilità fra le non ovvie.

[108] Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Peste nera*.

[109] 3 eventi possono essere a 2 a 2 indipendenti senza che siano tutti indipendenti fra loro.

Per esempio

$$P(\text{“la moneta dà testa”} \wedge \text{“il dado dà 4”}) =$$
$$= P(\text{“la moneta dà testa”}) \cdot P(\text{“il dado dà 4”}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,.$$

Invece “dispari” e “primo” non sono indipendenti nel lancio di un dado: $P(dispari) = P(1,3,5) = \frac{1}{2}$ e $P(primo) = P(2,3,5) = \frac{1}{2}$ ma $P(dispari \wedge primo) = P(3,5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ che non è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

- Si dimostra (sono teoremi) che valgono, $\forall A, B, A_1, A_2 \dots \in \mathbb{A}$:
  - $\diamond$ $P(A^C) = 1 - P(A)$ da cui in particolare $P(\varnothing) = 0$
  - $\diamond$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $\diamond$ $P(A \cup^* B) = P(A) + P(B)$ (unione disgiunta)
  - $\diamond$ $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \dots)$
  - $\diamond$ $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$
  - $\diamond$ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Per le precedenti 6 formule i disegni insiemistici chiariscono tutto.

$\diamond$ Si dimostra (teorema) la Formula di Bayes: dati un $B \in \mathbb{A}$ e una partizione di Ω, cioè degli insiemi $A_1, \dots A_n$ disgiunti con unione Ω, vale

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$
$$i = 1, ..., n.$$

Anche la sola uguaglianza dei denominatori è interessante:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

e in particolare con $n = 2$, scrivendo A invece di A_1 ed essendo necessariamente $A_2 = A^C$ (avendosi una partizione) si ha la

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)$ (Legge delle Alternative)

Si faccia un disegno rappresentativo della situazione.

Per esempio uno spazio di probabilità si ottiene con un dado regolare, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, dove $\{1\}$,...,$\{6\}$ sono gli *eventi semplici*, possiamo fissare molto opportunamente $\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega)$, e la funzione P vale costantemente $\frac{1}{6}$. Per esempio $A := \{2,3,5\}$ è l'evento "esce 1 o 3 o 5", ovvero "[esce] [un numero] dispari".
Si calcolino A^C, $P(A^C)$, $\{1,2,6\}^C =: B$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B)$. Poi con lo stesso Ω si trovino altri 2 spazi di probabilità.

Esistono anche spazi di probabilità infiniti, per i quali nessuna uniformità è possibile, e in cui nella realtà sensibile possiamo aspettarci che in generale tenderà a ricorrere una *distribuzione* in qualche modo *a campana* – eventualmente troncata da una parte.

Si noti l'immediata (duplice) conseguenza della (48)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\star$ % Supponiamo che in una certa popolazione la mutazione RX1vis si presenti con probabilità 25% e, indipendentemente, la mutazione RS2vol con probabilità 40%. Che probabilità c'è che un soggetto di quella popolazione abbia la RX1vis e non abbia la RS2vol?

SVOLGIMENTO

$$P((\text{RX1vis})\, \textit{et}\, (\textit{non}\, \text{RS2vol})) =$$

l'avere o non avere la RS2vol è indipendente dall'avere o non avere la RX1vis

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot P(\textit{non}\, \text{RS2vol}) =$$

con l'evento complementare

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot (1 - P(\text{RS2vol})) =$$

coi dati numerici

$$= 0.25 \cdot (1 - 0.4) =$$

in definitiva

$$\boxed{0.15 = 15\%}$$

Fissiamo l'attenzione per esempio sullo *spazio di probabilità uniforme* $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ del lancio di 1 dado, con 6 *eventi semplici* di probabilità $\frac{1}{6}$, e $64 = 2^6$ eventi nella σ-algebra $\mathbb{A}$ delle parti di Ω:

$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P(k) = 1/6,\ k = 1, ..., 6$$

$$\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, ...\{6\}, \{1, 2\}, ..., \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega\}.$$

Per esempio $\{1, 2\}$ è l'evento "esce 1" *vel* "esce 2"; $P(1, 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Naturalmente esistono spazi di probabilità finiti non uniformi, per esempio ottenuti con dadi truccati.

Oppure con riferimento a una diagnosi e/o trattamento farmacologico, e un fissato intervallo temporale (per esempio 5 anni), e comunque in un'ottica frequentista, con *scores* da 1=morte a 6=ottimamente, potremmo avere per esempio:

$3\% = P(morte)$ ...
$5\% = P(molto\,male)$ .....
$12\% = P(male)$ ....
$20\% = P(stabile)$ ....
$40\% = P(bene)$ ....
$20\% = P(ottimamente)$ ....

(Si noti la forma più o meno a campana).

Calcoliamo per esempio

$$P(\text{“}migliora\text{”}) = P(\text{“}bene\text{”} \vee \text{“}ottimamente\text{”}) =$$

eventi disgiunti, somma delle probabilità:

$$= P(\text{“}bene\text{”}) + P(\text{“}ottimamente\text{”}) =$$

$$= 40\% + 20\% = 60\%.$$

Per 2 soggetti

$$P(\text{“}entrambi\ morti\text{”}) =$$

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1\hat{}\ soggetto\text{”} \wedge \text{“}morte\ del\ 2\hat{}\ soggetto\text{”}) =$$

e nell'ipotesi di indipendenza

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1\hat{}\ soggetto\text{”}) \cdot P(\text{“}morte\ del\ 2\hat{}\ soggetto\text{”}) =$$

$$= 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 = 0.09\%$$

(Poco meno dell'1 per mille). Ma se i soggetti sono legati affettivamente, l'ipotesi di indipendenza diventa alquanto inverosimile. (La morte dell'uno in generale aumenta la probabilità di morte dell'altro a prescindere dalla terapia seguita).

Si noti che appena si esce dalla modellizzazione “perfetta” dei dadi e delle monete, si introducono inevitabilmente problematiche che poi di fatto si trasformeranno in incertezze nei risultati statistici. (Dove l'indipendenza, e la normalità gaussiana dei dati – che vedremo – sono spesso ipotesi implicite, di fatto imperfette).

Nota. Il seguente esercizio richiede una calcolatrice con 8 cifre, o una moltiplicazione con carta e penna.
ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità 7%. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probabilità c'è che andando 4 volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso?

SVOLGIMENTO

$$P(punto\,al\;1^\wedge\;viaggio) = ... = P(punto\,al\;4^\wedge\;viaggio) = 7\% = \frac{7}{100}$$

Evento complementare:

$$P(nonpuntoal1^\wedge viaggio) = ... = P(nonpuntoal4^\wedge viaggio) = 93\% = \frac{93}{100}$$

Evento composto:

$$P(mai\,punto\,nei\;4\;viaggi) = \frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100}\cdot\frac{93}{100} = \left(\frac{93}{100}\right)^4$$

Evento complementare:

$$P(punto\,almeno\;1\;volta\;nei\;4\;viaggi) = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{93^4}{100^4} = 1 - \frac{74\,805\,201}{100\,000\,000} = \frac{100\,000\,000 - 74\,805\,201}{100\,000\,000} =$$

$$\boxed{\frac{25194799}{100\,000\,000} \approx 0.252 = 25.2\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in metropolitana, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di entrare in contatto coi pidocchi, con probabilità p. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probablità c'è che in 10 viaggi in metropolitana – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona sia entrata in contatto coi pidocchi?

SVOLGIMENTO

$$P(contatto\,nel\;1^\wedge\;viaggio) = ... = P(contatto\,nel\;10^\wedge\;viaggio) = p$$

Evento complementare:

$$P(noncontattonel1^\wedge viaggio) = ... = P(noncontattonel10^\wedge viaggio) = 1-p$$

Evento composto:

$$P(nessun\,contatto) = (1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p) = (1-p)^{10}$$

Evento complementare:

$$\boxed{P(almeno\,un\,contatto) = 1-(1-p)^{10}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$

$\ast$ $^{\%}$ In via semplificata, consideriamo qua terapie che possono avere solo esito fatale (morte) o successo (non si considerano diversi gradi di successo).

Per un certo paziente si stanno ipotizzando 4 procedure:

terapia T1 e poi terapia T2

terapia T2 e poi terapia T4

terapia T3 e poi terapia T4

terapia T5.

Supponendo l'indipendenza degli eventi, trovare quale procedura conviene avendosi queste probabilità di esito fatale:

T1: 9%, T2: 12%, T3: 4%, T4: 11%, T5: 13%.

SVOLGIMENTO

Con gli eventi complementari, si hanno queste probabilità di successo:

T1: 91%, T2: 88%, T3: 96%, T4: 89%, T5: 87%.

Si ha

$$P(successo\,procedura\,1^\wedge) = 0.91\cdot 0.88 = 80.08\%$$

$$P(successo\,procedura\,2^\wedge) = 0.88\cdot 0.89 = 78.32\%$$

$$P(successo\,procedura\,3^\wedge) = 0.96\cdot 0.89 = 85.44\%$$

e allora conviene l'ultima procedura:

$$\boxed{\text{terapia T5}}$$

34 Sensibilità, specificità, predittività, ROC

La questione fondamentale affrontata in questa Lezione è

$$P(\text{veramente malato } \textit{sapendo} \text{ test positivo})$$

nel senso della probabilità frequentista, e argomenti affini.

Familiarizziamo con la probabilità condizionata con un esercizio.

Esercizio$_{\mu}^{f}$ risolto. Un'urna U contiene 20 palline bianche e 40 nere, e un'urna V contiene 5 palline bianche e 6 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae a caso una pallina che risulta bianca. Che probabilità c'è che sia stata scelta l'urna U?
Svolgimento$_{\mu}$
$U : 20b + 40n$
$V : 5b + 6n$
A_1: "scelta a caso l'urna U"
A_2: "scelta a caso l'urna V"
B: "estratta a caso una pallina bianca".
A_1 e A_2 costituiscono una partizione dell'evento certo.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{60}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{20}{60} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{5}{11}} =$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $3 \cdot 11$

$$\frac{11}{11 + 5 \cdot 3} = \frac{11}{26} \approx 0.423 = 42.3\%.$$

(Osserviamo che allora con probabilità $\approx 58\%$ era stata scelta l'urna V e questo riflette il fatto che là c'erano <u>proporzionalmente</u> più palline bianche: visto che è venuta una pallina bianca, più probabilmente avevamo scelto quell'urna).
Esercizio$_{\mu}$ Costruire e risolvere un esercizio analogo.

In questa Lezione si fa riferimento alla concezione frequentista della probabilità, che detto molto semplificatamente ci fa ritenere che se finora le cose sono andate in un certo modo in un gran numero di casi, continueranno ad andare così. Con riferimento alla Farmacologia: se 3 014 soggetti sono morti di 10 000 a 5 anni dal trattamento, riteniamo che la *probabilità* di morte sia circa del 30% (a 5 anni, con quel trattamento, in una popolazione *simile*).

34.1 Sensibilità

"Specificità alta, il malato torna a casa informato"

Traiamo questo paragrafo da Wikipedia italiana, l'enciclopedia libera.

Con il termine sensibilità, in statistica, più precisamente nel campo della epidemiologia, si indica la capacità intrinseca di un test di screening di individuare in una popolazione di riferimento i soggetti malati. Essa è data dalla proporzione dei soggetti realmente malati e positivi al test (veri positivi) rispetto all'intera popolazione dei malati.

Un test sarà tanto più sensibile quanto più bassa risulterà la quota dei falsi negativi (cioè di soggetti malati erroneamente identificati dal test come sani). Un test molto sensibile, in definitiva, ci consente di limitare la possibilità che un soggetto malato risulti negativo al test.

Supponiamo che un test di screening dia come risultato solamente due opzioni: positivo al test e negativo. Essere positivi al test equivale ad essere ammalato secondo quel test, ma indagini diagnostiche successive possono rivelare l'effettiva malattia o meno.
Allora si otterranno 4 tipologie di osservati:
Sani Negativi (veri negativi)

Sani Positivi (falsi positivi) $\leftarrow risultano\, avere\, la\, malattia; ma\, non\, ce\, l'hanno...$
Malati Positivi (veri positivi)
Malati Negativi (falsi negativi) $\leftarrow non\, scoprono\, la\, loro\, malattia$

Rappresentabili così in tabella:
/////// MALATI - SANI
POSITIVI Veri + Falsi +
NEGATIVI Falsi - Veri -

La sensibilità del test verrà così calcolata:

$$S = \frac{V_+}{totaleMALATI} = \frac{V_+}{V_+ + F_-}$$

ESEMPIO
25 2
4 55
Si troverà 86.2%.

Dalla wikipedia in inglese: *If the goal of the test is to identify everyone who has a condition, the number of false negatives should be low, which requires high sensitivity. That is, people who have the condition should be highly likely to be identified as such by the test. This is especially important when the consequence of failing to treat the condition are serious and/or the treatment is very effective and has minimal side effects.*

34.2 Specificità

"Specificità alta, il sano torna a casa contento"

Traiamo questo paragrafo da Wikipedia italiana, l'enciclopedia libera.

Con il termine specificità, in medicina, si indica la capacità di un test di dare un risultato normale ("negativo") nei soggetti sani:

$$Sp = \frac{V_-}{totaleSANI} = \frac{V_-}{V_- + F_+}$$

ESEMPIO
25 2
4 55
Si troverà 96.5%.

Dalla wikipedia in inglese: *If the goal of the test is to accurately identify people who do not have the condition, the number of false positives should be very low, which requires a high specificity. That is, people who do not have the condition should be highly likely to be excluded by the test. This is especially important when people who are identified as having a condition may be subjected to more testing, expense, stigma, anxiety, etc.*

34.3 Predittività

Traiamo questo paragrafo da Wikipedia italiana, l'enciclopedia libera.

Per predittività, in medicina, si intende la probabilità che un soggetto positivo ad un test di screening sia effettivamente malato. Il Valore Predittivo Positivo, che esprime numericamente la predittività, si calcola come quota di soggetti veri positivi sul totale dei positivi (veri e falsi positivi).

$$VPP = \frac{V_+}{totalePOSITIVI} = \frac{V_+}{V_+ + F_+}$$

ESEMPIO
25 2
4 55
Si troverà 92.6%.

Vediamo ora il caso in cui la prevalenza (frequenza) della malattia è decisamente minore, aumentando ad esempio di un fattore 100 le persone sane e lasciando inalterato il numero dei malati:

25 200

4 5500

Si troverà 11.1.

Esercizio. Relativamente all'ultima tabella, si calcolino prevalenza, sensibilità e specificità.

ESERCIZIO. (Tratto da Wikipedia, l'enciclopedia libera).
≈ % Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	25	200
NEGATIVI	4	5500

Calcolare la predittività, ovvero il Valore Predittivo Positivo.

SVOLGIMENTO

Ricordando la definizione

$$\text{predittività} = \text{Valore Predittivo Positivo} = VVP =$$

$$= \frac{\text{veri positivi}}{\text{totale positivi}} = \frac{V_+}{V_+ + F_+}$$

ora abbiamo

$$VVP = \frac{25}{25+200} = \frac{25}{225} = \frac{1}{9} \approx$$

$$\boxed{\approx 0.111 = 11.1\%}$$

(Notiamo che il valore è piuttosto basso nonostante la specificità sia alta:

$$Sp = \frac{\text{veri negativi}}{\text{totale sani}} = \frac{V_-}{V_- + F_+} = \frac{5\,500}{5\,500+200} = \frac{5\,500}{5\,700} =$$

$$= \frac{55}{57} \approx 0.965 = 96.5\%$$

e questo è dovuto alla rarità della malattia nella popolazione considerata: circa una trentina di malati su poco più di 5 700 soggetti).

Nota di Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> Ossia la probabilità che un soggetto positivo al test sia effettivamente malato è pari all'11, 1%, che equivale a dire che il soggetto ha una probabilità dell'88, 9% di essere sano nonostante il test dica il contrario.

34.4 Esempio: i test rapidi per il covid-19.

In *Diagnostic accuracy of rapid antigen tests in asymptomatic and presymptomatic close contacts of individuals with confirmed SARS-CoV-2 infection: cross sectional study*, articolo scientifico del 2021 sul British Medical Journal su due test rapidi per il covid-19 in https://www.bmj.com/content/374/bmj.n1676, leggiamo i valori che gli Autori si prefiggono di misurare:

> **Main outcome measures** Sensitivity, specificity, and positive and negative predictive values of Veritor System (Beckton Dickinson) and Biosensor (Roche Diagnostics) rapid antigen tests

34.5 Le curve ROC

Traiamo questo paragrafo da Wikipedia italiana, l'enciclopedia libera, alla voce *Receiver operating characteristic.*

Nella teoria delle decisioni, le curve ROC (Receiver Operating Characteristic, anche note come Relative Operating Characteristic[1]) sono degli schemi grafici per un classificatore binario. Lungo i due assi si possono rappresentare la sensibilità e (1-specificità), rispettivamente rappresentati da True Positive Rate

(TPR, frazione di veri positivi) e False Positive Rate (FPR, frazione di falsi positivi). In altre parole, si studiano i rapporti fra allarmi veri (hit rate) e falsi allarmi.

La curva ROC viene creata tracciando il valore del True Positive Rate (TPR, frazione di veri positivi) rispetto al False Positive Rate (FPR, frazione di falsi positivi) a varie impostazioni di soglia. Il tasso di veri positivi è anche noto come sensibilità, richiamo o probabilità di rilevazione [2]. Il tasso di falsi positivi è anche noto come fall-out o probabilità di falsi allarmi [2] e può essere calcolato come (1 - specificità). Può anche essere pensato come un diagramma della potenza in funzione dell' errore di tipo I :quando la prestazione viene calcolata da un solo campione della popolazione, può essere considerata come una stima di queste quantità. La curva ROC è quindi il tasso dei veri positivi in funzione del tasso dei falsi positivi. In generale, se sono note le distribuzioni di sensibilità e 1-specificità, la curva ROC può essere generata tracciando la funzione di distribuzione cumulativa (area sotto la distribuzione di probabilità da $-\infty$ alla soglia di discriminazione) della probabilità di rilevamento nell'asse y rispetto alla funzione di distribuzione cumulativa della probabilità di falso allarme sull'asse x.

Il ROC è anche noto come curva Receiver Operating Characteristic, poiché è un confronto tra due caratteristiche operative (TPR e FPR) al cambiare del criterio.[3]

????FIGURA MANCANTE

Applicazioni

Le curve ROC furono utilizzate per la prima volta durante la seconda guerra mondiale, da alcuni ingegneri elettrotecnici che volevano individuare i nemici utilizzando il radar durante le battaglie aeree. Recentemente le curve ROC sono utilizzate in medicina,[4][5] radiologia,[6] psicologia,meteorologia [7], veterinaria[8], fisica e altri ambiti, come il machine learning ed il data mining.

Concetto basilare

Se si considera un problema di predizione a 2 classi (classificatore binario come da figura: distribuzione rossa e azzurra), scelto un valore di soglia (threshold o cut-off), rispetto a cui decidere il risultato, ovvero se appartenente alla classe positiva (p) o negativa (n), dato che le due curve di distribuzione di probabilità risultano in parte sovrapposte, sono possibili quattro risultati a seconda della posizione del valore di cut-off:

• se il risultato della predizione è positivo p e il valore vero è anche positivo p, viene chiamato vero positivo (true positive - TP);

• se invece il valore vero è negativo, il risultato viene chiamato falso positivo (false positive - FP);

• al contrario, si ha un vero negativo (true negative - TN) quando entrambi, il risultato e il valore vero, sono negativi;

• un falso negativo (false negative - FN) invece si ha quando il risultato è negativo e il valore vero è positivo.

È inoltre possibile rappresentare questo tipo di situazione utilizzando una tabella di contingenza di tipo 2×2, dove le colonne rappresentano la distinzione tra soggetti sani e malati; le righe invece rappresentano il risultato del test sui pazienti. Un risultato qualitativo del test potrebbe essere quello di andare a valutare il numero di falsi positivi e negativi; meno ve ne saranno e maggiormente il test sarà valido.

Una curva ROC è il grafico dell'insieme delle coppie (FP, TP) al variare di un parametro del classificatore. Per esempio, in un classificatore a soglia, si calcola la frazione di veri positivi e quella di falsi positivi per ogni possibile valore della soglia; tutti i punti così ottenuti nello spazio FP-TP descrivono la curva ROC.

Attraverso l'analisi delle curve ROC si valuta la capacità del classificatore di discernere, ad esempio, tra un insieme di popolazione sana e malata, calcolando l'area sottesa alla curva ROC (Area Under Curve, AUC). Il valore di AUC, compreso tra 0 e 1, equivale infatti alla probabilità che il risultato del classificatore applicato ad un individuo estratto a caso dal gruppo dei malati sia superiore a quello ottenuto applicandolo ad un individuo estratto a caso dal gruppo dei sani.[9]

Le curve ROC passano per i punti (0,0) e (1,1), avendo inoltre due condizioni che rappresentano due curve limite:

• una che taglia il grafico a 45°, passando per l'origine. Questa retta rappresenta il caso del classificatore casuale (linea di "nessun beneficio"), e l'area sottesa AUC è pari a 0,5.

• la seconda curva è rappresentata dal segmento che dall'origine sale al punto (0,1) e da quello che congiunge il punto (0,1) a (1,1), avendo un'area sottesa di valore pari a 1, ovvero rappresenta il classificatore perfetto.

35 Probabilità combinatoria – I

Il Calcolo Combinatorio è costituito da metodi per determinare il numero di elementi di un insieme finito; ed elencarli.

Esso rientra nelle Matematiche della Certezza, diciamo pure – essenzialmente – nell'Insiemistica, ma in questa trattazione elementare verrà associato alle correlate questioni probabilistiche, fra le Matematiche dell'Incertezza.

Vediamo alcuni dei molti casi di ricorrenza del Calcolo Combinatorio nella Farmacia.

• Il Calcolo Combinatorio ricorre nella chimica dei farmaci. Una rivista scientifica internazionale è Combinatorial Chemistry Link->. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> Spesso il ricercatore si imbatte in un composto che dimostra una certa attività biologica, che però non è sufficiente per garantire il successo clinico (e commerciale) del composto. A questo punto inizia un processo di screening "quasi casuale": vengono preparati e testati tutti i possibili composti che mantengono una analogia strutturale per il nucleo fondamentale, ma ne differiscono per i sostituenti collegati.

• Il Calcolo Combinatorio ricorre anche nelle questioni di elencazione, catalogazione e archiviazione dei prodotti e delle attività di una farmacia. Per esempio il Calcolo Combinatorio risponderà alla domanda: in quanti modi posso ordinare 4 prodotti su una brochure pubblicitaria? Sono 24 modi, possono essere elencati facilmente, e poi assoggettati a considerazioni sanitarie e/o di marketing, per sceglierne uno per la stampa della finale.

35.1 Probabilità combinatoria elementare

La **probabilità combinatoria elementare** si basa su 2 cose:

• la concezione classica della probabilità, quella della probabilità come *casi favorevoli / casi possibili*;

• il calcolo combinatorio, costituito da metodi per determinare il numero di elementi di un insieme finito E, cioè la sua cardinalità, indicata con $\#E$ (e da altri con card$E$ o $|E|$); conteggiare gli elementi degli insiemi finiti adesso serve proprio per contare i casi favorevoli e i casi possibili di cui sopra.

In questa trattazione elementare, trattiamo il **calcolo combinatorio** – che di per sè sarebbe una matematica elementare – in 2 porzioni:

• una parte l'abbiamo già trattata nell'insiemistica: in particolare

◦ prodotto cartesiano
◦ insieme delle parti

• un'altra parte adesso, in questa lezione e nella succssiva, nel contesto del calcolo delle probabilità:

◦ elencazione con conteggio
◦ cardinalità dell'unione
◦ permutazioni
◦ combinazioni,
◦ disposizioni,
◦ dismutazioni↗.

Per esempio col prodotto cartesiano, e l'elencazione con conteggio, avevamo trovato la probabilità che la somma dei punteggi di 2 dadi sia un numero primo:

$$p = \frac{\#\,casi\;favorevoli}{\#\,casi\;possibili\;equiprobabili} = \frac{15_{\leftarrow elencazione\;con\;conteggio}}{6 \times 6_{\leftarrow prodotto\;cartesiano}}$$

$$= \frac{5}{12}$$

L'*elencazione con conteggio* è adeguata quando è più semplice dell'applicazione di formule. Per esempio per determinare quanti sono i numeri primi minori di 25

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \qquad \to \textit{ sono } 9$$

o (col computer) di 10 000.
Si troverà facilmente, elencandoli, che i numeri primi ≤ 92 sono 24: ci sono allora $92 - 24 - 1 = 67$ elementi chimici (della tavola periodica "classica", fino all'uranio) con numero atomico maggiore di 1 e non primo (i quali, allora, in via del tutto ipotetica – non vogliamo qua fare chimica nucleare – potrebbero dare tutti i loro protoni ad atomi più piccoli e uguali fra loro).

Un esempio applicato al Calcolo delle Probabilità. La probabilità che un numero primo minore di 25 scelto a caso sia dispari è

$$\frac{8}{9} \approx 0.889 = 88.9\%$$

perché $\#\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\} = 9$ e solo il 2 non è dispari, restandone 8.
Questo sopra, triplice, è il modo in cui in questa trattazione elementare in generale esprimeremo la probabilità, ma si noti che il secondo (0.889), tipico della Matematica, è poco usato nella pratica della Farmacia. Anzi, si faccia attenzione a non confondere 0.889 con 0.889%.

Note sul prodotto cartesiano.
Osservato che il prodotto cartesiano di 2 insiemi finiti A e B ha (ovviamente) cardinalità

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

e con 3 insiemi finiti

$$\#(A \times B \times C) = \#A \cdot \#B \cdot \#C \text{ e similmente con } n \text{ insiemi}$$

osserviamo che parallelamente, per così dire, se un'azione si può fare in n modi e una seconda azione si può fare in m modi, la sequenza delle 2 azioni si può fare in $n \cdot m$ modi. E la sequenza di 3 azioni in $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ modi, eccetera. Vediamo un esempio.

ESERCIZIO$_\mu$ Quante sono le possibili schedine classiche, quelle di 13 risultati 1, 2 o X?

SVOLGIMENTO

L'1-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X
il 2-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X
...
il 13-esimo risultato può essere scelto in 3 modi: 1, 2 o X.

In tutto 3^{13} modi cioè

$$1\,594\,323.$$

35.2 Cardinalità dell'unione

Per gli insiemi finiti, dei quali soli ora ci occupiamo, vale (teorema) questa (ovvia: si disegnino i diagrammi di Eulero-Venn) formula (che lega le cardinalità dell'unione e dell'intersezione):

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

In particolare se A e B sono disgiunti (l'intersezione ha 0 elementi) la cardinalità dell'unione è la somma della cardinalità.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

* Supponiamo che di 116 individui
con anticorpo VISα oppure VISγ,73 hanno l'anticorpo VISα, e 53 l'anticorpo VISγ. Quanti hanno entrambi gli anticorpi?

SVOLGIMENTO

Sappiamo che per gli insiemi finiti la numerosità ovvero cardinalità degli insiemi unione e intersezione vale

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

cioè equivalentemente vale

$$\#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$$

e ora con

$A = \{\text{soggetti con VIS}\alpha\}$

$B = \{\text{soggetti con VIS}\gamma\}$
si ha

$$\text{numero di soggetti con entrambi gli anticorpi} =$$
$$= \#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B) =$$
$$= 73 + 53 - 116 =$$
$$\boxed{10}$$

35.3 Permutazioni

Ogni ordinamento totale di un insieme finito non vuoto A si dice *permutazione* degli elementi di A. Esso viene identificato con l'unica $(\#A)$-upla di elementi di A che "rappresenta" quell'ordinamento totale. Per esempio dall'unica 5-upla – come (b, d, a, e, c) – che rappresenta un determinato ordinamento totale di A se esso ha 5 elementi.
Il numero delle permutazioni di un insieme di n elementi si indica talvolta con P_n e si pone anche $P_0 := 1$.
Il numero delle permutazioni di un insieme di n elementi è dato dal *fattoriale*↑ di n, che vale 1 se $n = 0$ e altrimenti $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$:

$$P_n = n!\,.$$

Per esempio 4 prodotti possono essere pubblicizzati ciascuno su 1 di 4 pagine di una brochure in 4! cioè 24 ordini diversi.

Esempio. In quanti ordini diversi si possono mettere in un contenitore di acqua 8 sostanze chimiche diverse?
Che probabilità c'è di ordinarle in un particolare fissato modo mettendole a caso?

È un problema di permutazioni, dell'insieme $\{x_1, ..., x_8\}$ o più semplicemente $\{1, ..., 8\}$ delle sostanze considerate, che ha 8 elementi. Gli elementi si possono riordinare in $8! = 40\,320$ modi. La probabilità è $1/43\,320 \approx 0.0000231 = 0.00231\%$

Esercizio. In quanti modi diversi si possono allineare 5 prodotti farmaceutici su un espositore?

36 Probabilità combinatoria – II

36.1 Dismutazioni

Si dice *dismutazione* (o *permutazione completa* o *sconvolgimento*) di un insieme ogni sua permutazione in cui tutti gli elementi cambiano posizione. (Si immaginino degli studenti alle loro sedie, si alzano e "rimescolano", si siedono, ma nessuno sulla sedia che aveva prima). Per esempio per l'insieme ordinato { 1, 2, 3, 4, 5 } ovvero per la 5-upla ordinata $(1, 2, 3, 4, 5)$, due permutazioni sono $(4, 5, 1, 2, 3)$ e $(2, 5, 1, 4, 3)$, ma solo la prima è una dismutazione. Per il numero N di dismutazione di un insieme di n elementi, è (teorema) $N \approx \frac{n!}{e}$; l'errore assoluto è sempre < 0.5; e per $n > 5$ l'errore relativo è minore dello 0.05%, che in questo caso possiamo considerare una buona approssimazione, e $\to 0$ per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{N}{n!/e} = 1 \quad \text{ovvero } N \simeq \frac{n!}{\mathrm{e}}$$

in cui $\simeq$ è il simbolo ISO per l'*approssimazione asintotica*.

Esempio. Si abbiano molte persone, e altrettanti foglietti coi loro nomi. Li distribuiamo a caso a quelle persone. Che probabilità c'è che nessuno riceva il foglietto col suo nome? E che qualcuno lo riceva? Ovviamente se non sappiamo il numero n di persone, non possiamo dare una risposta esatta. Tuttavia se, come d'usuale, ci accontentiamo di un valore ben approssimato della probabilità, in pratica possiamo, purché n, che è stato garantito grande, sia ≥ 5 o meglio > 5, e sorprendentemente la risposta non dipende da quel numero esatto di persone. Consideriamo l'evento che nessuno riceva il foglietto con il suo nome. Così per il primo quesito i casi possibili sono le permutazioni e i casi favorevoli sono le dismutazioni, e allora

$$p \approx \frac{n!/e}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0.368 = 36.8\% \qquad (\textit{viene questo } \forall n{>}5, \textit{ e per } n{=}5 \textit{ viene } {\approx}0.367).$$

E allora la probabilità che qualcuno riceva il foglietto col suo nome (evento complementare) è $\approx 0.632 = 63.2\%$.

36.2 Combinazioni semplici e disposizioni semplici

Consideriamo un insieme $n = 7$ elementi e scegliamone $k = 3$. In quanti modi si può fare? La risposta è data dalle *combinazioni (semplici)* che ora vedremo, ma se anche riteniamo ordinata la terna scelta, si può fare in molti più modi ($3! = 6$ volte tante) e sono le *disposizioni (semplici)*.

Combinazioni semplici. Dato un insieme E di $n > 0$ elementi (cioè non vuoto) e un numero naturale k tale che $0 \leq k \leq n$, i sottoinsiemi di E di k elementi si chiamano *combinazioni (semplici)* di n oggetti a k a k (per esempio a 3 a 3) e il numero di esse si chiama *coefficiente binomiale*, e si indica con $C_{n,k}$ o $\binom{n}{k}$ e si pone per convenzione $C_{n,0} := 1$. Questo numero si calcola col Triangolo di Tartaglia↓ oppure con una formula di esso

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Due note. Numeri enormi li lasceremo indicati, per esempio scriveremo $\binom{365}{23} =$

$$= \frac{365!}{23!\,342!}$$

senza procedere ulteriormente nel calcolo.
E similmente per quest'altro,

$$p = 1 - \frac{365!}{365^{23}\,342!}$$

con un computer od online con WolframAlpha potremmo trovare il valore approssimato $\approx 0.507 = 50.7\%$ ed è la probabilità che fra 23 persone a caso, nate in anni non bisestili, almeno 2 abbiano lo stesso compleanno (approssimando come uniforme la distribuzione delle nascite nell'anno). **Si noti come i fenomeni probabilistici possono essere molto controintuitivi**.

Disposizioni semplici. Dato un insieme E di $n > 0$ elementi (cioè non vuoto) e un numero naturale k tale che $0 \leq k \leq n$, i sottoinsiemi ordinati di E di k elementi si dicono *disposizioni (semplici)* di n oggetti a k a k (per esempio a 3 a 3), e il numero di esse si indica con $D_{n,k}$ e si pone per convenzione $D_{n,0} := 1$.
è (teorema)

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \,.$$

Mnemonici:

co mbinazioni... **co**n k! e **co**sì **co**mpare numero **co**rto

di spo sizioni... **di**menticati k! e **dispo**ni ordinatamente

Esempi. 3 elementi ordinati si possono scegliere da 7 in $\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ modi, e senza riguardo all'ordine in $\binom{7}{3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35$ modi. (Riordinabili in $3! \cdot 35 = 210$ modi). Si provi a elencare i 35 modi. (Si fissi per esempio $E := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

Esercizio. In quanti modi si possono scegliere 4 elementi chimici diversi della tavola periodica ("classica") di 92 elementi? E quante sono le quaterne ordinate di 4 elementi?

Per il primo quesito, sono

$$\binom{92}{4} = \frac{92!}{4!\,(92-4)!} = \frac{92!}{4!\,88!} = \frac{92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= 23 \cdot 91 \cdot 15 \cdot 89 = 2\,794\,155$$

(Si provi con Wolframalpha `Binomial[92,4]`).
Per il secondo quesito, sono

$$\binom{92}{4} = \frac{92!}{(92-4)!} = \frac{92!}{88!} = 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 =$$

$$= 67\,059\,720$$

Esercizi. In quanti modi si possono scegliere 23 giorni diversi del 2018? Con o senza significato, quante "parole" di 4 lettere si possono comporre con le lettere C, R, O, N, I, S, T, A?

Esempio sulle combinazioni semplici. Che probabilità c'è di vincere giocando una cinquina su una ruota del lotto? Per essere sicuri di vincere giochiamo 1 euro su ciascuna di esse. Quanto guadagniamo?
Di casi favorevoli ce n'è 1, e i casi possibili sono le combinazioni semplici di 90 oggetti a 5 a 5, che sono in numero di $\binom{90}{5}$, e allora la probabilità è

$$p = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{\frac{90!}{5!(90-5)!}} = \frac{5!\,85!}{90!} = \frac{1 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 85}{1 \cdot \ldots \cdot 90} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90} = \frac{1}{86 \cdot 87 \cdot 22 \cdot 89 \cdot 3} = \frac{1}{43\,949\,268}\,.$$

Abbiamo speso 43 949 268 euro e 1 cinquina da noi giocata vince; poiché si vince 6 milioni di volte la posta, vinciamo 6 milioni di euro, con un guadagno di −37 949 268 euro. (Ciclopica perdita) ☹

Esempio sulle disposizioni semplici. Quanti sono i numeri esadecimali di 5 "cifre" (da 00000 a FFFFF) con le "cifre" tutte diverse?
è un problema di disposizioni semplici. Consideriamo i sottoinsiemi ordinati di { 0, 1,..., 9, A,..., F } di 5 elementi, che – in base al teorema – sono in numero di

$$D_{16,5} = \frac{16!}{(16-5)!} = \frac{16!}{11!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} = 524\,160.$$

Esercizi.
Che probabilità c'è che un numero < 10 sia primo? E < 25? E nei 2 casi, che sia quadrato? Triangolare? Pari?

36.3 Il gioco d'azzardo: patologia, probabilità e storia

Nel 2017 gli italiani hanno speso 55 miliardi per beni durevoli, come automobili ed elettrodomestici, e 88 miliardi in giochi d'azzardo, cioè mediamente circa 1470 euro a testa, diventati 1600 nel 2016; in parte persi, ovvio, mica organizzano i giochi solo per farci divertire; si disse che il lotto è una *tassa per gli stolti*. Bisogna comunque dire che la cinquina del lotto è un caso particolare, gli altri premi del lotto non sono così non equi; e altri giochi sono ancor meno non equi, dando premi più equilibratamente; e in alcuni conta anche l'abilità, per esempio la schedina del calcio.
È facile verificare che in generale i testi in rete sul gioco d'azzardo tendono a drammatizzare la situazione, parlando del centinaio di miliardi circa giocati ogni anno; molto meno spazio viene dato invece al fatto che la maggior parte di quei soldi ritorna i giocatori nelle vincite:

nel 2017 giocati 102 miliardi

vinti 82 miliardi

e allora perdita netta per i giocatori 20 miliardi. Dividendo per 60milioni di italiani, viene una perdita annua pro capite di circa 333 euro. Circa un euro al giorno, con differenze enormi fra regioni, e fra singoli.
Inoltre c'è da dire che coi giochi d'azzardo lo Stato raccoglie cifre enormi senza suscitare avversione: rinunciando ai giochi lo Stato potrebbe dover esigere quei soldi forzatamente. Circa 8 miliardi nel 2017. Una cosa triste è che a pagare sono in larga misura – difficile da quantificare nei dettagli – i meno abbienti. Altra cosa triste è che per molti diventa una malattia, la **ludopatia**, ma questa può esistere anche indipendentemente dai giochi organizzati dallo Stato, giocando fra privati. Altra questione ancora, è che le sale slot offrono alla malavita un facile modo di riciclare il denaro sporco: incassano denaro pulito e per le vincite danno quello proveniente da illeciti, che si disperde nei mille rivi delle spese personali della gente. Tutto questo, ovviamente, fermo re-

stando che di per sè non è immorale giocare d'azzardo, nè fra amici nè con lo Stato, e può essere una cosa sana, se esercitata con l'opportuna misura. Certo, 333 euro l'anno a testa, persi, danno da pensare. Si potrebbero fare anche molte altre cose con tanti soldi. In un decennio recente, le spese per la cura dei denti sono dimezzate.

> "Millionaires should always gamble, poor men never" (J.M. Keynes, economista).

Una questione molto interessante, invece, è che i giochi d'azzardo forniscono un campo di studi per il calcolo delle probabilità, anzi ne sono perfino una delle origini storiche, con – fra i relativamente moderni e ben noti – Pacioli, Cardano, Tartaglia, e Galileo Galilei che spiegò perché con 3 dadi il 10 e l'11 siano più probabili del 9 e del 12, che pure sembrano ottenersi in un ugual numero di "modi". Ancora occupandosi di gioco d'azzardo, Pascal e Fermat giunsero al moderno concetto di probabilità.

36.4 Un risultato di Calcolo Combinatorio in Chimica

Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

> In statistical mechanics, the ice-type models or six-vertex models are a family of vertex models for crystal lattices with hydrogen bonds. The first such model was introduced by Linus Pauling in 1935 to account for the residual entropy of water ice.
>
> An $n \times n$ grid graph (with periodic boundary conditions and $n \geq 2$) has n^2 vertices and $2\,n^2$ edges; it is 4-regular, meaning that each vertex has exactly four neighbors. An orientation of this graph is an assignment of a direction to each edge; it is an Eulerian orientation if it gives each vertex exactly two incoming edges and exactly two outgoing edges.

> Denote the number of Eulerian orientations of this graph by $f(n)$.

È ben evidente che $f(n)$ tende all'infinito. Ma quanto rapidamente? Questo viene espresso dal seguente notevole risultato di Calcolo Combinatorio, applicato alla Chimica:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{f(n)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} = 1.5396007\ldots$$

che si chiama *costante di Lieb del ghiaccio quadrato.*

Complementi

36.5 Triangolo di Tartaglia e potenza del binomio

il *Triangolo di Tartaglia* (o *di Pascal)*, è la *scrittura*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \cdots\cdots & & & \end{array}$$

variamente estesa con la Formula di Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(e cioè ogni numero è la somma dei 2 soprastanti, a parte gli 1 ai margini) dove n è il numero di riga a partire dalla 0-esima e k è la posizione nella riga a partire dalla 0-esima.
Il Triangolo di Tartaglia consente il calcolo dei *coefficienti binomiali* $\binom{n}{k}$ mediante sole somme. Ciò è utile sia nel problema delle combinazioni semplici che nella *potenza del binomio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \qquad \text{ovvero}$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

(si noti che nella seconda formula gli a e b nel secondo membro sono scambiati fra loro rispetto alla prima formula, come se là fosse scritto $a^{n-k}\, b^k$, ma è equivalente). I vari coefficienti dei monomi si trovano semplicemente sulla n-esima riga del Triangolo di Tartaglia (intendendo come 1-esima quella con due 1), per esempio $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

VIII – Variabili aleatorie discrete

37 Introduzione alle variabili aleatorie

37.1 Variabili aleatorie discrete e continue

Una funzione (che ad eventi semplici associa numeri reali)

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

si chiama *variabile aleatoria* (purché sia sufficientemente regolare[110] come sono tutte quelle che capitano a un livello elementare).

Per esempio una variabile aleatoria è il risultato del lancio di un dado, che potremo rappresentare così in 2 diversi casi:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{\textit{dado equilibrato}}_{\textit{ovvero regolare}} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}^{\textit{qua un certo}}_{\textit{dado truccato}}$$

ed entrambe potrebbero rappresentare anche le durate di due malattie in giorni, alquanto irrealistiche per la lontananza da distribuzioni a campana – si disegnino i bar chart delle probabilità – come pure quest'altra

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

decisamente più realistica, che potrebbe anche rappresentare il punteggio da 1 (morte) a 5 (ottimo), esito (per esempio a 3 anni) di un intervento farmacologico.

Si noti che nel caso delle durate in giorni, 5 è effettivamente quintuplo di 1, mentre "ottimo" non è quintuplo di "morte": in quel caso i numeri sono solo simboli senza valore quantitativo.

La variabile aleatoria del dado va vista come il risultato del lancio del dado <u>prima di lanciare il dado</u>. Dopo averlo lanciato invece avremo un numero, che è tutt'altra cosa. E dopo averlo lanciato più volte avremo un dataset, che è un'altra cosa ancora.

[110] Precisamente deve essere $\{\omega | X(\omega) \leq t\} \in \mathbb{A}$ per ogni t reale; questione sottile.

Allora, finora, niente di nuovo nella sostanza, solo una diversa impostazione di fenomeni già considerati.

Un'altra variabile aleatoria, non così facilmente rappresentabile, è il peso in kg del primo bambino che nascerà vivo il 1 gennaio 2020, ora locale del luogo. Potrebbe essere 3.412..., 4.576..., eccetera. Ragionevolmente parlando, ognuno dei singoli valori ha probabilità 0: perché mai il primo bambino dovrebbe pesare *esattamente* (con infiniti decimali) 3.18452785356... kg? Scriveremo

$$\{X < 3.5\} \text{ intendendo l'evento } \{\omega | X(\omega) < 3.5\}$$

e similmente con $\le$ e $>$ e $\ge$.
E ancora con tutte le possibili variazioni di $<$ e $\le$

$$\{2.5 < X \le 3.5\} \text{ intendendo l'evento } \{\omega | 2.5 < X(\omega) \le 3.5\}$$

e per questi eventi, e altri del tipo $X \in I \subset \mathbb{R}$, con I insieme sufficientemente regolare (in Farmacia quasi solo intervalli), possiamo invece attenderci probabilità diverse da 0, per esempio
$P(X < 20) = 1$ il bambino peserà sicuramente meno di 20 chili,
$P(X < 0.1) = 0$ il bambino nato vivo non peserà meno di 100 g, e – ipotizziamo qua – con probabilità 50% peserà meno di 2.1 kg: $P(X \le 2.1) = 0.5$. E magari ancora $P(X \le 2.5) = 0.7 = 70\%$.

La funzione

$$F_X(t) := P(X \le t)$$

si chiama *funzione di ripartizione* della variabile aleatoria X, *cumulative distribution function*:

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

In effetti i valori di essa sono in $[0, 1]$ e il grafico ha più o meno vagamente una forma sigmoide, da 0 in $-\infty$ a 1 in $+\infty$.

Nei grafici (uno è in figura) delle funzioni di ripartizione delle v.a. X e Y inizialmente considerate si osserverà che i salti hanno ampiezze pari alle corrispondenti probabilità. E questo è un fatto generale che succede per tutte le variabili aleatorie discrete:

$$\forall\, x \text{ punto di salto } P(X = x) = \textit{salto}$$

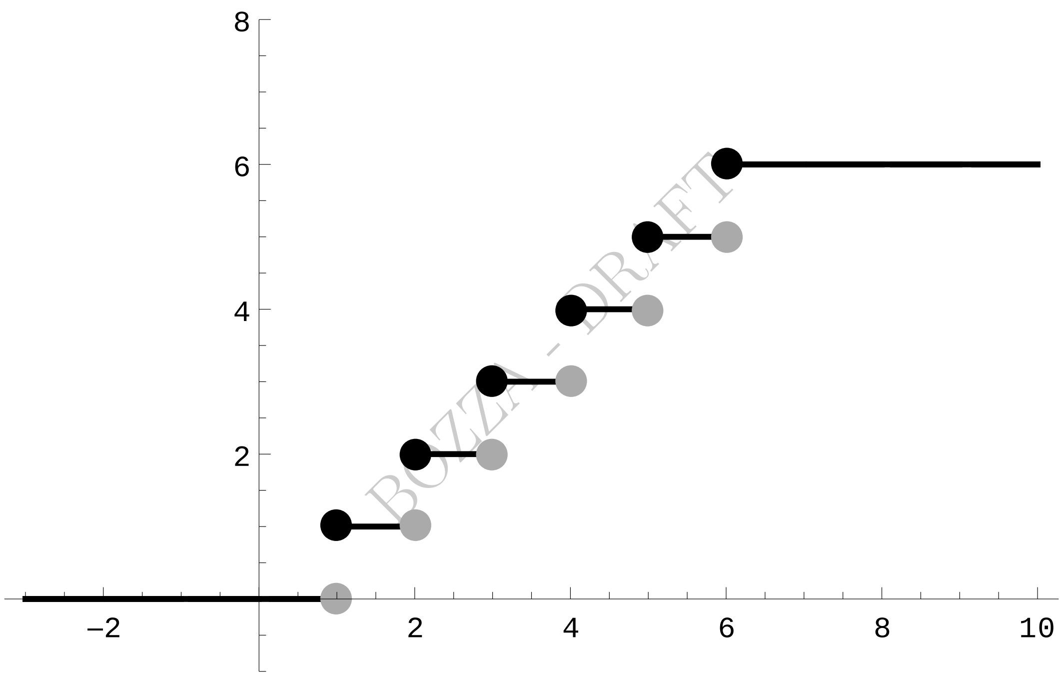


Figure 26: Funzione di rìpartizione del dado regolare. Ha 6 salti di $\frac{1}{6}$.

La prima v.a., quella del dado, si dice *discreta* (cioè a valori "ben separati", anche eventualmente infiniti) e la seconda *continua.*

Si noti che, almeno per le variabili aleatorie continue, questa impostazione è veramente innovativa, e permette una valida trattazione di casi che altrimenti nel modo precedente si ridurrebbero semplicemente ad affermare che ogni singolo valore ha probabilità nulla

$$\forall\, t \quad P(X = t) = 0 \qquad (X \textbf{ v.a. continua})$$

e sommando o moltiplicando zeri non si otterrebbe niente di significativo.

Teorema (ovvio).

$$\boxed{P\{a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a),\ \forall\, a, b} \tag{49}$$

e uno o entrambi gli estremi possono essere infiniti, e allora $F_X(x)$ andrà inteso nel senso del limite: $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(+\infty) = 1$.

La soprastante fondamentale formula darà
per le variabili aleatorie discrete: somme o serie;
per le variabili aleatorie continue: integrali definiti.
Anticipiamo che per le densità delle variabili aleatorie continue è

$$\boxed{\text{funzione di ripartizione:}\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt} \tag{50}$$

$$\boxed{\text{(derivata della f.r.)}\quad F' = f \quad \text{(densità)}} \tag{51}$$

$$\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt} \tag{52}$$

La funzione di ripartizione delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con F_X, F_Y, F_Z... ma anche con altri simboli: F, F_1, G...

La densità delle v.a. X, Y, Z... potrà trovarsi denotata con f_X, f_Y, f_Z... ma anche con altri simboli: f, f_1, g...

Vediamo un esempio di applicazione della (52), con primo estremo $a = -\infty$.

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ % Si consideri una variabile aleatoria Z di densità $f(t) = t$ per $1 \leq t \leq \sqrt{3}$, e 0 altrimenti. Calcolare $P\left(Z < \frac{3}{2}\right)$.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare quello della virgola decimale, a scelta).

$$P\left(Z < \frac{3}{2}\right) =$$

con $<$ oppure $\leq$ vale uguale perchè Z è una variabile aleatoria continua

$$= P\left(Z \leq \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} \text{densità} =$$

la densità è 0 prima di $t = 1$ e dopo $t = \sqrt{3} \approx 1.73$ ma $\frac{3}{2} = 1.5$ è più piccolo

$$= \int_{1}^{\frac{3}{2}} t\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{9-4}{8} =$$

$$= \frac{5}{8} = 0.625 =$$

$$\boxed{62.5\%}$$

Tipico delle densità riferite alla realtà sensibile, sia discrete che continue, è avere – spesso ma non proprio sempre – una forma "più o meno a campana".

37.2 La campana gaussiana e quella di Cauchy

La più "pura" delle campane è la *campana gaussiana* della densità normale standard

$$\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

che però ha il difetto che (quasi tutti) gli integrali di essa non si riescono a calcolare con le funzioni elementari.

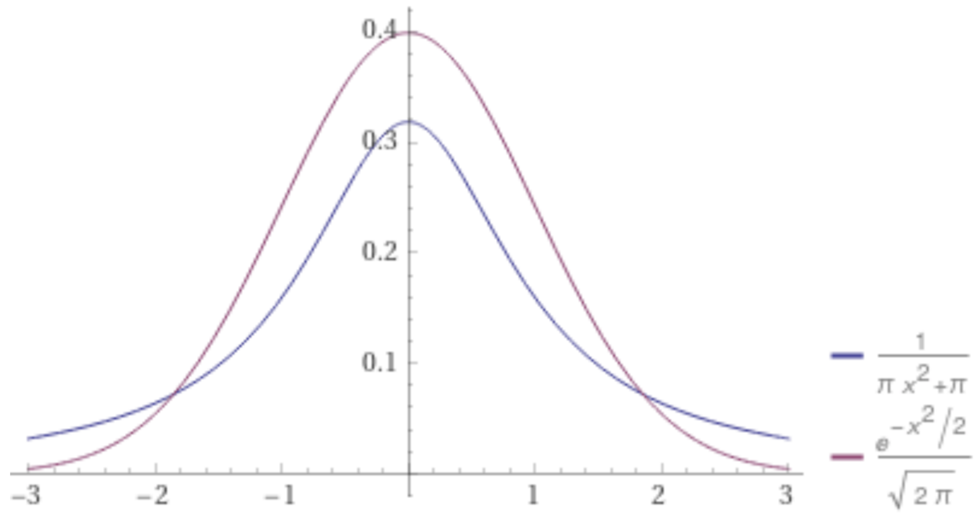


Figure 27: Magenta: densità normale standard (campana gaussiana). Blu: densità di Cauchy. Screenshot da WolframAlpha.

Un modello più semplice di campana è la densità di Cauchy

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

per la quale si ha subito, integrando elementarmente,

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt = \frac{1}{\pi}(\arctan b - \arctan a)$$

per esempio

$$P(1 < X \leq \sqrt{3}) = \frac{1}{\pi}(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-3}{3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{12} \approx 0.0833 = 8.33\%.$$ `link a WolframAlpha ->`

Nota: la densità di Cauchy ha *code* molto più *pesanti.*

38 Variabili aleatorie discrete

Data una v.a. discreta, cioè con valori "ben separati", come per esempio la X e la Y della lezione precedente, o queste

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \textit{infiniti valori possibili ma staccati} \\ \\ \leftarrow \textit{qua si forma una serie geometrica} \end{matrix}$$

individuiamo dei *valori* x_k, in numero finito o anche infiniti ma comunque "ben separati" (non necessariamente interi) e corrispondentemente le loro probabilità $p_k := P(v.a. = x_k)$:

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \; x_3 \dots x_k \; [\dots] \\ p_1 \; p_2 \; p_3 \dots p_k \; [\dots] \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \textit{fra le quadre possono esserci numeri, se i} \\ \textit{valori sono infiniti, oppure no nell'altro caso} \end{matrix}$$

e ovviamente deve essere, nel senso di una somma o di una serie,

$$\textit{somma su tutti gli indici} \rightarrow \sum_k p_k = 1 \qquad (\textit{esistono serie con somma } 1, \textit{non solo geom.})$$

La funzione di ripartizione $F_X(t) := P(X \le t)$ di una v.a. discreta X è una *funzione a scala (step function)* costante fra x_{k-1} e x_k, con salti pari a p_k in x_1, x_2,...,x_k... e "pallini pieni" a sinistra (continuità a sinistra).
Da adesso consideriamo solo valori interi; allora $p_k = P(v.a. = k)$. La funzione

$$p_k := \begin{cases} P(X = k) & se\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

si chiama ***densità*** della variabile aleatoria X. Tenderemo a usare la lettera p coi pedici per le probabilità , mentre per i valori della v.a. possiamo usare x_1, x_2... per una v.a. X e y_1, y_2... per una v.a. Y, eccetera. O anche x_0, x_1... iniziando da 0, o da altro numero, a seconda dei casi. Per esempio per le X e W di prima

$$p_k = P(X = k) := 1/6, \quad k = 1, \dots, 6$$

$$p_k = P(W = k) := 1/2^k, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Le densità si rappresentano graficamente coi bar chart.

38.1 Alcuni esempi di variabili aleatorie discrete

Esempio$_\mu$ (sulla notazione "binomiale" delle variabili aleatorie discrete).
Per una v.a. a 3 valori con $p_1 = \frac{1}{\pi}$ e $p_2 = \frac{1}{\pi^2}$ determinare p_3.
Si tratta di trovare l'unico numero incognito p_3 in

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi^2} & p_3 \end{pmatrix}$$

e da $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + p_3 = 1 \qquad \leftarrow$ somma 1 delle probabilità
segue subito $p_3 = 1 - \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) \approx 0.5804 = 58.04\%$.

Il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1,6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *"con legge"* e il simbolo $\mathbb{U}\{1,6\}$ lo leggeremo *"con legge uniforme discreta di parametri 1 e 6"*:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \ X \sim \mathbb{U}\{1,6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0,1\} \text{ rappresenta una moneta } \textit{equilibrata}.$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0,1\}$ e $\mathbb{U}\{1,6\}$.

Ecco una densità non uniforme

$$Y := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

che potrebbe rappresentare la durata in giorni di una malattia, come pure quest'altra

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & \end{pmatrix}$$

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$) ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1,2,3... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

per esempio con $p := \dfrac{1}{2}$ si ha quella di prima $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}$

e con $p := \dfrac{1}{3}$ si ha $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $Geom_1\left(\frac{1}{2}\right)$, la variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{1}{2}$ (simbologia per nulla standard purtroppo).

Osservazione. La probabilità di "$X = h$ *vel* $X = k$", con $h \neq k$, essendo eventi disgiunti, è la somma delle 2 probabilità:

$$P(X = h \ vel \ X = k) = P(X = h) + P(X = k)$$

e similmente con 3 o più valori diversi, e questo vale per le v.a. discrete con qualunque distribuzione.
Per esempio per la v.a. W considerata all'inizio

$$P(W = 2 \vee W = 3) = P(W = 2) + P(W = 3) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}$$

Nella prossima Lezione vedremo anche la **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0**, e vedremo meglio le variabili aleatorie uniformi discrete.

39 Variabili aleatorie uniformi e geometriche

In questa lezione approfondiremo le variabili aleatorie uniformi e geometriche accennate nella lezione precedente.

39.1 Variabili aleatorie uniformi discrete

Una **variabile aleatoria uniforme discreta** di parametri interi a e b ha n valori interi a, $a+1$, $a+2$,...,$b = a+n-1$, con le corrispondenti probabilità tutte uguali $p_k = \frac{1}{n}$ per $k = 1, ..., n$, e la sua distribuzione ovvero legge verrà indicata con $\mathbb{U}\{a, b\}$.
Per esempio il [risultato del lancio di un] dado (regolare) è una v.a. $X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}$ e il simbolo $\sim$ lo leggeremo *"con legge"*:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \; X \sim \mathbb{U}\{1, 6\}.$$

E associando a 0 e 1 le facce di una moneta

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0, 1\} \text{ rappresenta una moneta } \textit{equilibrata}$$

Ecco un'altra, $\sim \mathbb{U}\{a, b\}$ con $a = -2$ e $b = 4$ e allora $n = b - a + 1 = 7$:

$$Y := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \qquad \textit{equivalentemente}: \; Y \sim \mathbb{U}\{-2, 4\}.$$

Esercizio$_\mu$ Si rappresenti graficamente la densità e la funzione di ripartizione di $\mathbb{U}\{0, 1\}$ e $\mathbb{U}\{1, 6\}$.

39.2 Variabili aleatorie e processo di Bernoulli

La variabili aleatoria di Bernoulli o bernoulliana di parametro p, è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

(per esempio una moneta con testa=1 con $p = \frac{1}{2}$ se regolare) identificabile con

$$\begin{pmatrix} fallimento & successo \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Denoteremo con $B(p)$ questa legge.
Un **processo di Bernoulli** è una successione $(X_1, X_2...)$ di variabili aleatorie indipendenti aventi la medesima legge di Bernoulli $B(p)$. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Processo di Bernoulli*:

> Un processo di Bernoulli può essere considerato come una sequenza di lanci di una moneta (eventualmente anche truccata). Ogni singolo lancio è detto prova di Bernoulli.
>
> In particolare, essendo le variabili indipendenti, vale la mancanza di memoria: la probabilità di una prova di Bernoulli non è influenzata dal risultato delle precedenti (che quindi non possono fornire alcuna informazione sulla nuova prova).

Una sua *realizzazione* è una successione di zeri e uni, con l'1 a denotare il successo, con una sua probabilità p, e lo 0 l'insuccesso: come 0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1...
Anche sopravvive, sopravvive, sopravvive, sopravvive, muore (e non serve continuare). (Si noti che qua il successo è la morte).

39.3 Variabili aleatorie geometriche

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 1** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$)

$$X \sim Geom_1(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 1,2,3... con densità

$$p_k = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3... \quad \textit{somma della serie}\text{: } 1$$

$$\text{per esempio con } p := \frac{1}{2} \text{ si ha quella di prima} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha } \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

Una **variabile aleatoria geometrica iniziante da 0** di parametro p (e dev'essere $0 \le p \le 1$)

$$X \sim Geom_0(p) \qquad \text{(simbologia non standard purtroppo)}$$

ha valori 0,1,2... con densità

$$p_k = p(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2... \quad \textit{somma della serie}: 1$$

$$\text{per esempio con } p := \frac{1}{2} \text{ si ha } \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \dots & \frac{1}{2^{k+1}} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{e con } p := \frac{1}{3} \text{ si ha } \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} \dots & \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che vogliamo ottenere un certo risultato con una successione di prove indipendenti, in ciascuna delle quali il successo ha probabilità p. (Per esempio la testa con una moneta e allora $p = \frac{1}{2}$ oppure il 3 con un dado e allora $p = \frac{1}{6}$). Cioè consideriamo un processo di Bernoulli. Allora

$$P(\text{ci vogliono } k \text{ prove per il primo successo}) = p_k = p\,(1-p)^{k-1}$$

$$k = 1, 2, 3...$$

cioè la v.a. "numero di tentativi per avere il primo successo" ha legge $Geom_1(p)$.
Analogamente

$$P(\text{ci capitano } k \text{ insuccessi prima del primo successo}) = p\,(1-p)^k$$

$$k = 0, 1, 2...$$

cioè la v.a. "numero di insuccessi prima avere il primo successo" ha legge $Geom_0(p)$.
Il cosiddetto successo potrebbe per esempio essere un errore in farmacia, il primo della giornata, e in un articolo scientifico hanno effettivamente trovato questo:

> A (...) study involving 50 pharmacies located in six cities across the United States was conducted. A pharmacist trained to detect dispensing errors recorded the number of prescriptions filled by each pharmacy staff member and noted which prescription represented the staff member's first dispensing error (defined as any deviation from the prescriber's order) made during the observation period. (...) the observed cumulative distribution of dispensing errors could have come from a geometric probability distribution that assumed dispensing error rates of 2-3%.([111])

(Fra 2 e 3 percento di errori in farmacia rispetto alle indicazioni dei medici!)

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
$\ast \approx$ % Per una variabile aleatoria X geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{3}$ calcolare

$$P(X \geq 3).$$

SVOLGIMENTO.

$$P(X \geq 3) =$$

Con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(X < 3) =$$

la X è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori < 3

$$= 1 - P(X = 1 \vee X = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2)\big) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{3}$

$$= 1 - \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^{1-1} - \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{0} - \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{1} = 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9-3-2}{9}$$

e in conclusione

[111] Am J Health Syst Pharm. 2006 Jun 1;63(11):1056-61. Geometric probability distribution for modeling of error risk during prescription dispensing. Carnahan BJ, Maghsoodloo S, Flynn EA, Barker KN.

$$\boxed{\tfrac{4}{9} \approx 0.444 = 44.4\%}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018\neq}$
$\ast \approx \%$ Si consideri un'entità biologica (come batteri, virus, corpuscoli sanguigni...) che da quando si forma, poi ha una vita (in giorni, interi) che è pari a 7 + una variabile aleatoria geometrica X iniziante da 0 di parametro $\frac{1}{2}$. (Quindi può vivere 7 giorni, 8 giorni, 9 giorni... eccetera, con probabilità via via sempre più piccole).
Che probabilità ha di vivere un numero pari di giorni?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{vive un numero pari di giorni}) = P(7 + X \text{ è pari}) =$$

$$= P(X \text{ è dispari}) =$$

$$= P(X \text{ è 1 oppure 3 oppure 5 oppure 7...}) =$$

più formalmente

$$= P(X = 1 \vee X = 3 \vee X = 5 \vee X = 7 \vee ...) =$$

e trattandosi di eventi disgiunti

$$= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + ... =$$

ricordando la densità $p_k = p\,(1-p)^k$ per $k = 0, 1, 2...$ della variabile aleatoria geometrica di parametro p iniziante da 0, nel nostro caso $\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})^k$,

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$

dove si riconosce la serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ (perché ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...ar^n + ...$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ $* \approx \%$ Per una variabile aleatoria geometrica Z iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{4}$ calcolare

$$P(Z > 2).$$

SVOLGIMENTO

$$P(Z > 2) =$$

con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(Z \leq 2) =$$

la Z è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori ≤ 2

$$= 1 - P(Z = 1 \vee Z = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - \big(P(Z = 1) + P(Z = 2)\big) =$$

con la notazione consueta per la densità geometrica iniziante da 1

$$= 1 - (p_1 + p_2) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p\,(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{4}$

$$= 1 - \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4}\Big)^{1-1} - \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{4}\Big)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{4}\Big)^{0} - \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{4}\Big)^{1} = 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16 - 4 - 3}{16}$$

e in conclusione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.5625 = 56.25\%}$$

o con minore ma comunque accettabile precisione

$$\boxed{\tfrac{9}{16} \approx 0.563 = 56.3\%}$$

Esempi ed esercizi

Esempio$^f_\mu$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{0,7\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{0,7\}.$$

Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. U del soprastante esempio.
Esempio$^f_\mu$ Determinare la v.a. $\mathbb{U}\{-3,1\}$.
Si ha subito in base alla definizione di $\mathbb{U}\{a,b\}$

$$V := \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \sim \mathbb{U}\{-3,1\}.$$

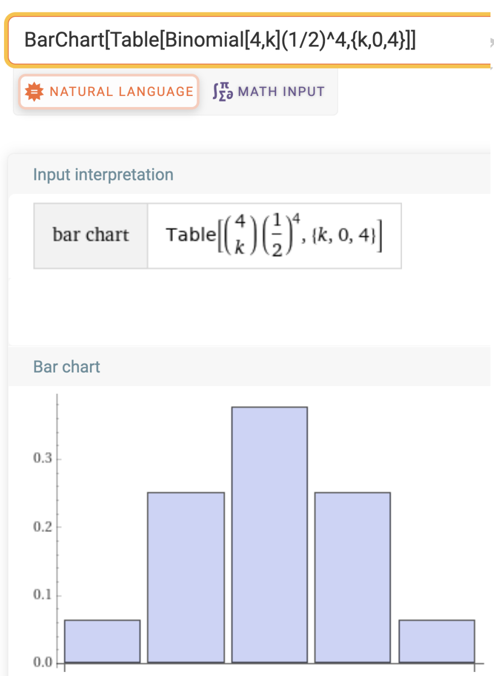
Esercizio. Rappresentare graficamente densità e funzione di ripartizione della v.a. V del soprastante esempio.
Esercizio. Determinare la v.a. $Z \sim \mathbb{U}\{-4,2\}$ e poi calcolare $P(Z \geq 1)$, $P(Z > 1)$, $P(Z \leq 1)$, $P(Z \geq -\pi)$, $P(Z \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq Z < 1)$, $P(Z^2 = 1)$, $P(Z^2 \leq 1)$. [L'ultime vale $\frac{3}{7}$].
Esercizio. Determinare le v.a. geometriche dei 2 tipi, di parametri $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$, e verificare le somme delle loro serie.
Esercizi$^f_\mu$ Rappresentare graficamente densità e funzioni di ripartizione delle v.a Z e W della lezione 38. Calcolare $P(W < 2)$, $P(W > 2)$, $P(W \geq 4)$, e con le serie $P(W > 100)$ e $P(W < 100)$.
Esercizi. Per una v.a. a 3 valori con $p_3 = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $p_2 = \frac{1}{\mathrm{e}^2}$ determinare p_1. Per una v.a. A a 4 valori 0, 1, 2, 3 con $p_1 = \frac{1}{7}$ $p_2 = \frac{1}{11}$ e $p_0 = \frac{1}{5}$ determinare p_3, e poi $P(A \geq 1)$, $P(A > 1)$, $P(A \leq 1)$, $P(A \geq -\pi)$, $P(A \geq \sqrt{2})$, $P(-1 \leq A < 1)$, $P(A^2 \leq 1)$, $P(A \neq 1)$.

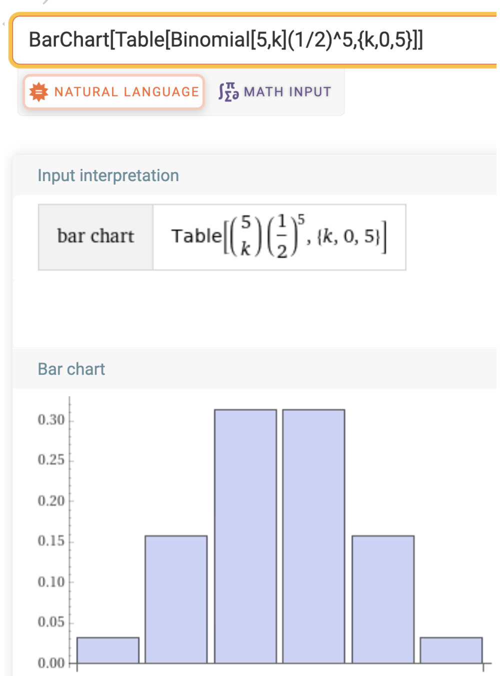
40 Variabili aleatorie binomiali

Si dice che una variabile aleatoria X è binomiale di parametri n e p (e dev'essere n intero ≥ 1 e $0 \leq p \leq 1$) e si scrive $X \sim B(n,p)$, se ha *densità binomiale*, cioè

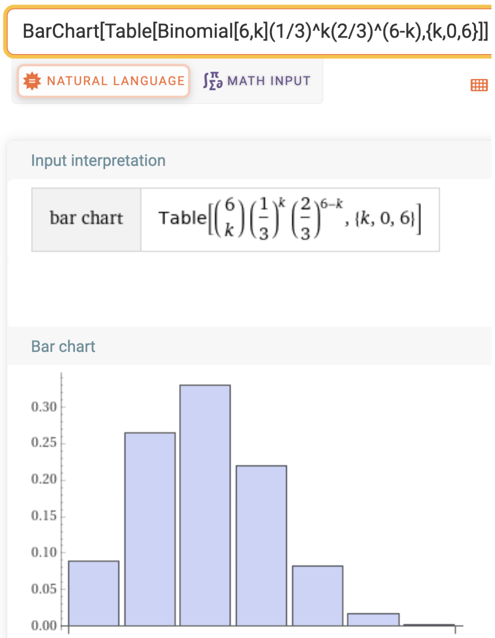
$$p_k = P(X = k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{53}$$

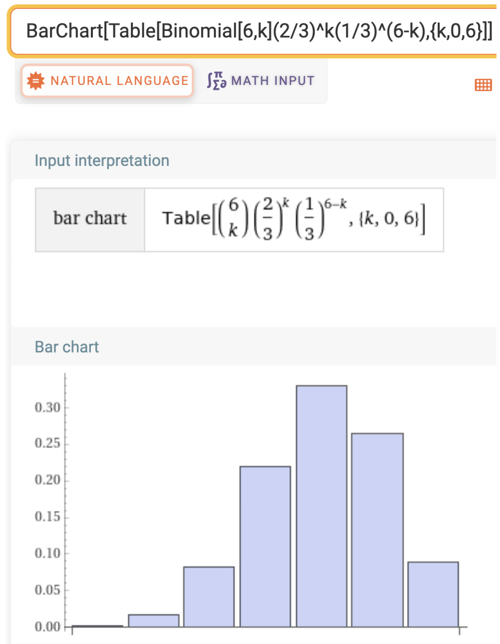
Ecco 2 istogrammi a barre tratti da WolframAlpha, con $n = 4$ e $n = 5$ ed entrambi con $p = \frac{1}{2}$, e quest'ultimo valore causa la simmetria delle campane.





Ecco 2 istogrammi a barre tratti da WolframAlpha, con $n = 6$, e con rispettivamente $p = \frac{1}{3}$ e $p = \frac{2}{3}$, campane asimmetriche, con skewness non nulla.





Rappresenta il numero k di teste che si ottengono in n lanci di una moneta che ha $P(testa) = p$. Più in generale, dà la probabilità di un certo numero k di successi in uno schema successo-insuccesso con n prove (indipendenti) avendo il successo probabilità p ad ogni prova.

Esempio$^f_\mu$ Con $n = 2$ prove si possono ottenere 0 o 1 o 2 teste (che adesso consideriamo successi) e se la moneta è equilibrata è

$$P(k=0) = \binom{2}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{2-0} = \tfrac{1}{4} \quad \leftarrow P(0\,teste)$$

$$P(k=1) = \binom{2}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{2-1} = \tfrac{1}{2} \quad \leftarrow P(1\,teste)$$

$$P(k=2) = \binom{2}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{2-2} = \tfrac{1}{4} \quad \leftarrow P(2\,teste).$$

Nota importante sulla forma a campana. Ecco il grafico della densità del soprastante esempio, che è un bar chart:

0 XXXX 0.25 qua c'è 1 solo caso su 4: CC cioè croce, croce

1 XXXXXXXX 0.5 qua ci sono 2 casi su 4: TC e CT

2 XXXX 0.25 qua c'è 1 solo caso su 4: TT cioè testa, testa

Si disegni la funzione di ripartizione. (Si osserverà che i 3 salti

hanno ampiezza pari alle corrispondenti 3 probabilità, e questo è un fatto generale che succede per tutte le variabili aleatorie discrete, come già osservato.)
Si noti che nel soprastante bar chart si vede la distribuzione a campana molto più chiaramente che nel caso di un solo lancio

0 XXXXXX 0.5 (croce)
1 XXXXXX 0.5 (testa)

e si comincia a capire la natura della quasi onnipresente forma più o meno a campana: essa si forma in fenomeni composti da tante "cose che si sommano", parlando in modo (necessariamente) impreciso.
Similmente le altezze degli individui di una popolazione, o qualunque altro parametro biometrico, biomedico o fisiologico, tenderanno ad avere una distribuzione con forma più o meno a campana, perché ognuno di quei parametri è risultante da molti altri: per esempio in un individuo altissimo potranno aver concorso nella stessa direzione ("successi") la genetica, l'alimentazione, concause fortuite imponderabili, e tale concordanza sarà rara mentre molti più individui avranno un'altezza media, e di nuovo pochi saranno bassissimi.
La forma a campana diventa ancora più evidente con 3 lanci di moneta, ovvero $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$, e sempre più al crescere di n. Si faccia il bar chart di $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
Invece l'allontanarsi di p dal valore centrale $\frac{1}{2}$ causerà inizialmente asimmetria nella forma a campana (si faccia il bar chart relativo a $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$) ma al crescere di n l'asimmetria tenderà ad attenuarsi sempre più, rimanendo invece la centratura spostata rispetto alla metà $\frac{n}{2}$ di n: la campana tenderà a centrarsi intorno a $n\,p$.

Prova tu stesso. Leggiamo sul web[(112)] "Il termometro segna già–41°, ma da queste parti è normale. Siamo nella nella Jacuzia,

[112] http://www.rainews.it/dl/rainews/media/Siberia-la-raccolta-del-ghiaccio-nella-citta-piu-fredda html Dalle informazioni sappiamo che la funzione densità vale 0 già da 0° in poi, e certamente prima di −273° ma in pratica, usando le conoscenze usuali della realtà sensibile, da −100°.

nel nord-est della Siberia, chiamata anche la regione del "Polo del Freddo Boreale". Qui d'inverno la temperatura non supera mai gli zero gradi, e rimane quasi sempre al di sotto dei −30°C, raggiungendo talvolta i −60°C." Disegna un ipotetico grafico della densità della funzione temperatura in quel luogo, segnando anche sull'asse delle ascisse il dato rilevato. Osserva sul grafico il significato delle parole usate "mai", "quasi sempre" e "talvolta": corripondono a 3 aree di sottografico, se la temperatura viene considerato un parametro "continuo" – cioè, in pratica, che può assumere valori con inifiniti decimali – e a somme di probabilità delle aste di un bar chart, se le temperature ambientali vengono discretizzate – come si usa – in valori interi. La parola "normale" riferita al valore −41° si riferisce a una quarta area, purché la normalità si riferisca al significato $\leq -41°$, altrimenti nel caso continuo la probabilità dei −41° *esatti* è 0, e nel caso discreto sarà senz'altro *piccola*, tutt'altro che *grande* ("normale").

In mancanza di altre informazioni – che sarebbe Medicina, che qua non vogliamo e non possiamo fare – per le temperature corporee umane possiamo aspettarci similmente un grafico a campana, seppure situato altrove, intorno ai 37°.

Nota sulle distribuzioni con 2 punti di massimo. Invece distribuzioni "bimodali" fanno ritenere che dietro vi siano 2 fenomeni distinti.
Per esempio se misuriamo i tempi di impegno ad uno sportello, e dopo aver (sapientemente) riunito i tempi misurati in classi facciamo l'istogramma, e questo presenta 2 massimi nettamente distinti, lontani, è plausibile che allo sportello i clienti stiano facendo 2 operazione diverse: chi un'operazione più rapida, chi una più laboriosa. (Nella zona intermedia fra i 2 massimi sono i veloci a fare l'operazione laboriosa e i lenti a fare quella semplice).

Esempio$^{f}_{\mu}$ Qual è la probabilità di ottenere [esattamente] 3 volte

il numero 1 su 7 lanci di un dado [regolare]?
Il successo ad ognuna delle $n = 7$ prove ha probabilità $\frac{1}{6}$ e allora, con la densità $B\left(7, \frac{1}{6}\right)$, la probabilità cercata è:

$$P(k=3) = \binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{7-3} = \frac{7!}{3!(7-3)!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4 =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{5^4}{6^7} = 5\cdot 7\cdot\frac{625}{279\,936} = \frac{21\,875}{279\,936} \approx 0.0781 = 7.81\%.$$

(Diciamo pure, a parole, circa 8%).

Esempi ed esercizi

Esempio$^{f}_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte il numero 7 con 5 lanci di un dado regolare a 8 facce?
Potremmo sommare le 4 probabilità

$$P(k=2)+P(k=3)+P(k=4)+P(k=5)$$

ma è ovvio che conviene considerare l'evento complementare e cioè calcolare

$$\begin{gathered}1-(P(k=0)+P(k=1))=\\=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{5-0}-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{5-1}=\\=1-1\cdot 1\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{5}-5\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(\frac{7}{8}\right)^{4}=\\=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{4}\cdot\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{8}\right)=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{4}\cdot\frac{2}{8}=1-\frac{2\,401}{16\,384}=\\=\frac{13\,983}{16\,384}\approx 0.853=85.3\%.\end{gathered}$$

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere 3 volte il numero 4 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte il numero 3 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte il numero 3 con 5 lanci di un dado regolare a 6 facce?

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 2 volte numeri primi con 4 lanci di un dado regolare a 6 facce?

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte testa con 5 lanci di una moneta regolare?

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte croce con 6 lanci di una moneta regolare?

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte testa con 7 lanci di una moneta regolare?

Esercizio$_{\mu}$ Che probabilità c'è di ottenere un numero dispari di volte testa con 5 lanci di una moneta regolare?

41 Leggi congiunte e indipendenza

41.1 Introduzione alle leggi congiunte

Considereremo solo coppie di variabili aleatorie discrete ma con qualche attenzione tutto può essere esteso a 3 o più variabili aleatorie. Date 2 variabili aleatorie discrete X e Y

$$X := \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \dots x_k\, [\dots] \\ p_1\, p_2\, p_3 \dots p_k\, [\dots] \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} y_1\, y_2\, y_3 \dots y_k\, [\dots] \\ p'_1\, p'_2\, p'_3 \dots p'_k\, [\dots] \end{pmatrix}$$

si può dimostrare che la coppia ordinata (X, Y) è una v.a., detta *2-dimensionale*. La sua densità è la funzione **densità congiunta**

$$p(x, y) := P(X = x \wedge Y = y)$$

per esempio per i 2 dadi, o per la coppia di lanci di 1 dado,

$$(X, Y) = \begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (6,6) \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \dots & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \textit{per } x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \qquad \textit{che scriveremo anche } p_{i,j}\,.$$

Detto V il prodotto cartesiano degli insiemi dei valori delle v.a.

$$V := \{x_1, x_2, x_3 \dots x_k\, [\dots]\} \times \{y_1, y_2, y_3 \dots y_k\, [\dots]\}$$

è ovviamente

$$\sum_{(x,y) \in V} p(x, y) = 1 \tag{54}$$

e se $A \subseteq V$, avendosi eventi disgiunti si ha ovviamente

$$P(A) = \sum_{(x,y) \in A} p(x, y) \tag{55}$$

per esempio per i 2 dadi regolari

$$P(X + Y = 8) = p(2,6) + p(3,5) + p(4,4) + p(5,3) + p(6,2) = \frac{5}{36}.$$

41.2 Densità marginali e indipendenza

Date le 2 v.a. discrete X e Y e la **v.a. bidimensionale** (X,Y) prima considerate, le densità p' di X e p'' di Y si chiamano **densità marginali** di (X,Y). Adesso indichiamo con p la densità congiunta. è (teorema)

$$p'_i = \sum_j p_{i,j} \qquad p''_j = \sum_i p_{i,j}$$

Le 2 v.a. X e Y si dicono **v.a. indipendenti** se

$$p_{i,j} = p'_i \cdot p''_j \qquad \forall\, i, j \quad \textit{ovvero se congiunta=prodotto delle marginali.}$$

Per esempio i 2 dadi o il doppio lancio di prima, con le marginali costantemente $\frac{1}{6}$ e la congiunta costantemente $\frac{1}{36}$. Invece questa densità congiunta

$$p_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{30} & \textit{per } i, j = 1,2,3,4,5,6,\ i \neq j \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

dà luogo a 2 v.a. (non determinate nei valori per adesso)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

che non sono indipendenti perché $p_{1,2} = \frac{1}{30} \neq \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = p'_1 \cdot p''_2$.
Ecco un'altra densità $p_{i,j}$ di v.a. bidimensionale (X,Y)

$$\begin{array}{cccccccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & & \\
x_1 & \frac{4}{44} & \frac{3}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \to & \frac{11}{44} & = p'_1 \\
x_2 & \frac{3}{44} & \frac{4}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \to & \frac{11}{44} & = p'_2 \\
x_3 & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{5}{44} & \frac{5}{44} & \to & \frac{14}{44} & = p'_3 \\
x_4 & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \frac{2}{44} & \to & \frac{8}{44} & = p'_4 \\
p_{4,1} \nearrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
 & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & & & \\
 & p''_1 & p''_2 & p''_3 & p''_4 & & &
\end{array}$$

con X e Y non indipendenti:

$$p_{1,2} = \frac{3}{44} \neq \frac{11}{44} \cdot \frac{11}{44} = p'_1 \cdot p''_2.$$

(Lasciamo tutto in 44-esimi sebbene qualche semplificazione sarebbe possibile).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{14}{44} & \frac{8}{44} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} & \frac{11}{44} \end{pmatrix}.$$

42 Speranza matematica e varianza

La speranza matematica di una v.a. essenzialmente è un numero che congloba
la probabilità degli eventi
col loro
valore numerico (dato da una v.a.) pensabile magari come un costo ovvero guadagno.

La varianza di una v.a. estende il concetto già visto di varianza di un dataset numerico ovvero di una popolazione: è una misura della variabilità.

Consideriamo in questa Lezione variabili aleatorie discrete, e nella Lezione 45 le continue.

42.1 Speranza matematica (o valore atteso, o media)

EN: expected value, expectation, mathematical expectation, mean, average, first moment

Un esperimento ideale

Consideriamo questo esperimento ideale: estrarremo da un bicchier d'acqua distillata un atomo a caso, e sia X la variabile aleatoria che conta i suoi elettroni. L'atomo sarà di ossigeno o idrogeno, con 8 elettroni o 1 elettrone rispettivamente.
In un'estrazione quanti elettroni possiamo attenderci mediamente? Questo è il significato di speranza matematica della variabile aleatoria X.
La speranza matematica di X è da intendersi come la media di numerosissime sue determinazioni ovvero realizzazioni. Per esempio potremmo trovare questi valori, in estrazioni successive:

1 1 1 8 1 8 1 1 8 1 1 1 8 1 1....

Naturalmente l'1 tenderà a ricorrere doppiamente dell'8 perchè l'idrogeno è doppiamente frequente nel bicchiere di H_2O rispetto all'ossigeno. È ovvio che la media tenderà a

$$\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 8$$

cioè $\frac{10}{3} \approx 3.33$.
Ecco, questa è la speranza matematica del numero di elettroni di un'estrazione; ovvero, il *valore atteso*, termine però fuorviante, perchè non possiamo affatto attenderci di estrarre 3.333... elettroni: ne verranno 8 oppure 1.

Un esempio con un gioco

Supponiamo che ora lanceranno un dado, e io posso scegliere o di ricevere 2 euro se viene pari o 5 euro se viene 3: cosa mi conviene scegliere?

• Se spero nel pari, mediamente vincerei metà volte, e allora posso considerare che mediamente vincerò metà dei 2 euro in palio, cioè 1 euro;

• se spero nel numero 3, mediamente vincerei 5 euro 1 volta su 6, e allora posso considerare che mediamente vincerò 5/6 dell'euro euro in palio.
Allora conviene la scommessa sul pari perché 1 è più di 5/6.

Il caso generale

Il concetto è immensamente più generale dei giochi d'azzardo, perché non solo con le assicurazioni, ma anche coi fatti dell'economia e della salute pubblica e individuale, in ultima analisi, la situazione con

spese certe

e ricavi incerti

è analoga ad un gioco d'azzardo.

Un'attenta considerazione del caso numerico soprastante ci induce a definire come **speranza matematica** (o *media* o *valore* *atteso*) di una variabile aleatoria discreta $X := \binom{x_1\, x_2\, x_3\, ...\, x_k\, [...]}{p_1\, p_2\, p_3\, ...\, p_k\, [...]}$

$$\mu = E(X) := \sum_k x_k \cdot p_k \qquad \textit{somma su tutti i valori } x_k \textit{ della v.a.}$$

e questa è una somma finita o una serie, e in quest'ultimo caso a livello teorico si richiede anche una condizione di regolarità, $\sum_k |x_k| \cdot p_k < +\infty$ che in questa trattazione elementare diamo ma mai calcoleremo, e comunque è sempre verificata per le variabili aleatorie che considereremo.

42.2 Costi e benefici

La speranza matematica matematizza il concetto di costi e benefici. Un intervento farmaceutico o più in generale medico su una persona ha, semplificando, un costo con una certa probabilità, e un beneficio con un'altra. Entrambi sono difficili da quantificare; in particolare: dopo quanto tempo si esegue la misura? È ovvio che un farmaco per una malattia cronica che dà un certo beneficio per un anno, e magari 0 danni, potrebbe presentare ben peggiori risultati dopo 10 anni.
Ma anche supponendo una misura perfetta, un singolo potrebbe avere preferenze ben diverse dal sistema sanitario.
Cura 1:
  morte 2/10
  guarigione 8/10
Cura 2:
  morte 1/10
  passa da atroce sofferenza a grave sofferenza 8/10
  guarisce 1/10
Il sistema potrebbe preferire la Cura 2, che ha metà rischio di morte e di solito (90%) migliora la situazione del paziente, ma qualcuno preferirebbe la 1.

Ancora più complessa la situazione quando il destinatario dell'intervento non è un singolo individuo ma la collettività stratificata in classi che pagano costi diversi a fronte di vantaggi diversi. Per esempio il distanziamento sociale e più in generale tutta la covidizzazione della società fa pagare un prezzo altissimo ai giovani, senza nessun apprezzabile diminuzione di rischio di morte per loro, che in pratica hanno solo costi; l'ipotetico vantaggio è praticamente solo per altre classi di età, più avanzate.

È ben evidente che poi la questione si intreccia coi vantaggi non sanitari, bensì economici (ed eventualmente pure di altro genere), che particolari segmenti della società (numericamente minuscoli), possono ottenere da grandi interventi sanitari.

In generale per tutti gli interventi sulla società in ogni caso ci sono costi e benefici, ma quasi mai i benefici sono esattamente per le stesse persone che pagano i costi.
A questo mondo tutto si fa per un presunto beneficio superiore al danno previsto, ma i soggetti destinatari sono sempre diversi.
Coi media quelli che hanno soldi e potere possono convincere la maggioranza che quello che si fa è vantaggioso per tutti, e infatti certamente è vantaggioso – ma più per loro.

Un esempio eclatante, collegato, è il grande fenomeno umano della guerra, che tanto incide sulle cause di morte a livello mondiale. Si fanno delle stime di possibili guadagni e perdite, più o meno probabili, e infine si decide:

"Armiamoci e partite!"

Nessuna legge al mondo vieta di pensare che i fatti della politica, e delle politiche sanitarie, avvengano in base a criteri diversi.

42.3 Varianza

Se esiste la speranza matematica, si definisce la **varianza** di una v.a. discreta X in 2 modi equivalenti

$$\sigma^2 = Var(X) := \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot p_k = E(X^2) - E(X)^2$$

e la radice quadrata si dice **deviazione standard**, σ o SD, che ha la stessa unità di misura della variabile aleatoria.

Per esempio le giocate sul pari e sul 3, prima considerate, producono guadagni medi rispettivi

$$E(U) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \qquad E(V) = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} \approx 0.833.$$

Ma con diversa varianza, che in qualche modo esprime la tendenza a rischiare molto per avere molto: la si calcoli nei 2 casi con le formule soprastanti.

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(x)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}\{a,b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
$X \sim B(n,p)$	$n \cdot p$	$np(1-p)$
X geometrica iniziante da 0	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
X geometrica iniziante da 1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Esercizio$^f_\mu$ Qual è il valore atteso del punteggio di un dado? E la varianza?

Usando la definizione di speranza matematica si ha

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Usando il teorema sulla speranza matematica di $\mathbb{U}\{a, b\}$

$$X \sim \mathbb{U}\{1, 6\} \Rightarrow E(X) = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5\ (come\ sopra).$$

Con le 2 definizioni di varianza si ha ugualmente

$$Var(X) = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \ldots = \frac{35}{12}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad Var(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

e con il teorema sulla varianza di $\mathbb{U}\{a, b\}$ si ha ugualmente

$$X \sim \mathbb{U}\{1, 6\} \Rightarrow Var(X) = \frac{(6 - 1 + 1)^2 - 1}{12} = \frac{36 - 1}{12} = \frac{35}{12}.$$

42.4 Note su varianza e istogramma della densità

Grande varianza ovvero deviazione standard: valori dispersi.
Piccola varianza ovvero deviazione standard: valori addensati presso la media.

Per la varianza, esistono varianze più piccole (valori più addensati) o più grandi di altre (valori più dispersi) ma non ha molto senso considerare grande o piccola una singola varianza.
Quanto sopra detto vale per qualunque densità discreta (e in effetti, poi, varrà anche per le continue). (Anche se “bimodale”).

Se l'istogramma di una densità discreta (o, in seguito, il grafico di una densità continua) ha una forma più o meno a campana, com'è per le variabili aleatorie binomiali, a grande varianza corrisponde campana bassa e larga

a piccola varianza corrisponde campana alta e stretta.

Quest'osservazione vale anche per l'uniforme discreta e le geometriche, che, con qualche elasticità, si può pure dire che abbiano densità a forma più o meno a campana – seppure molto vagamente. E similmente varrà per l'uniforme continua, l'esponenziale, e molte altre.

42.5 L'aspettativa di vita o speranza di vita

Consideriamo un esserino robotizzato che viene creato il 1 gennaio, e il 31 dicembre lancia al suo interno un dado e se viene 1 si spegne, muore. Se è sopravvissuto, il 31 dicembre dell'anno dopo fa la stessa cosa e così via. La durata della sua vita è una variabile aleatoria di cui possiamo considerare la speranza matematica. In questo caso semplice, è una variabile aleatoria geometrica iniziante da1 di parametro $\frac{1}{6}$ e allora con speranza matematica 6, che è l'aspettativa di vita dell'esserino, in anni.
Possiamo ipotizzare un esserino automatico che lanci due dadi e una moneta e cessa di vivere solo con 1, 1, testa, che ha probabilità $\frac{1}{72}$, e allora l'esserino ha vita media 72 anni, e l'aspettativa di vita nel mondo è più o meno quella.
È un modello della situazione relativa agli esseri umani, ma con varie semplificazioni:

– l'essere umano può morire ogni giorno, ovviamente in generale con probabilità molto minore di $\frac{1}{72}$;

– la probabilità di morte non è costante negli anni: è molto maggiore nel primo anno che nel secondo, e in vecchiaia aumenta enormemente: un centenario in generale ha probabilità molto minore di $\frac{71}{72}$ di vivere un altro anno;

– la probabilità di morte ad un determinato anno di età varia globalmente nel tempo: un diciottenne del 2018 aveva molta più probabilità di arrivare a 19 anni dei diciottenni del 1918, soggetti a Prima Guerra Mondiale – e altre difficoltà di quel tempo.

Con riferimento all'ultimo punto, come si fa a calcolare la speranza di vita, se non sappiamo quali guerre eventualmente ci saranno, e altre catastrofi, o più in generale cambiamenti – anche migliorativi, ovvio – della sopravvivenza?
È assolutamente impossibile calcolarla, e non ha neppure alcun senso reale la probabilità che una persona vivente oggi sia viva fra 1 anno, senza sapere neppure se il mondo esisterà ancora. (Come sarebbe definita una tale probabilità? Non ha alcun senso). Quello che viene chiamato aspettativa o speranza di vita, detto molto semplificatamente, è il risultato di un calcolo in cui si considera tutto "a bocce ferme", cioè come se le cose dovessero andare come sono andate finora. (Per i ventenni, i ventunenni, i ventiduenni, eccetera, per tutte le classi di età). *Non è una vera speranza matematica* in senso stretto, ma in qualche modo la "imita".

Oltre all'aspettativa di vita alla nascita, si può considerare l'aspettativa di vita residua, ad una determinata età. Per gli esserini robotizzati, è uguale a quella alla nascita, perché la variabile aleatoria geometrica gode dell'*assenza di memoria*: restano sempre da vivere mediamente 6 o 72 anni nei due casi considerati. (E similmente costante è il tempo da attendere ancora un determinato numero, o ambo, eccetera, del lotto, anche se "in ritardo", contrariamente a quello che pensano ingenui giocatori). Per l'essere umano ovviamente non è così, per il variare della mortalità al progredire dell'età. In particolare in Italia l'aspettativa di vita a 65 anni ha un importante valore legale e infine sociale perché a quel valore, determinato dall'ISTAT, Istituto Nazionale di Statistica, è per legge legata la cosiddetta *età pensionabile*.

Sulla Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana, Serie Generale - Anno 160, Numero 267, del 14 novembre 2019, nel Decreto 5 novembre 2019 del Ministero dell'Economia e delle Finanze, leggiamo: "Vista la nota del Presidente dell'Istituto nazionale di statistica (ISTAT) n. 2768968/19 del 16 ottobre 2019, con cui si comunica che la variazione della speranza di vita all'età di sessantacinque anni e relativa alla media della popolazione residente in Italia ai fini dell'adeguamento dei requisiti di accesso al pensionamento con decorrenza 1° gennaio 2021 corrispondente alla differenza tra la media dei valori registrati negli anni 2017 e 2018 e il valore registrato nell'anno 2016 è pari a 0,021 decimi di anno". (Si tratta, ovviamente, di questione connessa anche a fattori medici e farmaceutici, oltre che sociali, politici e geopolitici; la spesa farmaceutica statale è in enorme diminuzione negli ultimi anni, pare ridotta del 70 percento in un decennio).

42.6 Passeggiate aleatorie

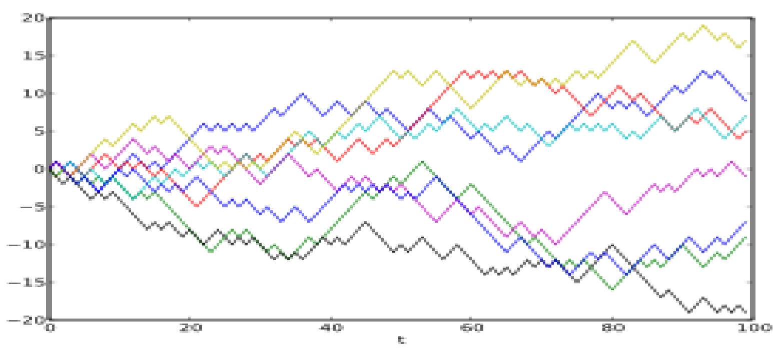
Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, versione inglese alla voce "Random walk", in italiano *passeggiata aleatoria"*:

> A random walk is a mathematical object, known as a stochastic or random process, that describes a path that consists of a succession of random steps on some mathematical space such as the integers. An elementary example of a random walk is the random walk on the integer number line, $\mathbb{Z}$, which starts at 0 and at each step moves +1 or −1 with equal probability. Other examples include the path traced by a molecule as it travels in a liquid or a gas, the search path of a foraging animal, the price of a fluctuating stock and the financial status of a gambler can all be approximated by random walk models, even though they may not be truly random in reality.
> (...) If a and b are positive integers, then the expected number of steps until a one-dimensional simple random walk starting at 0 first hits b or $-a$ is ab.

Cioè detto T il numero di passi fino al raggiungimento di b o $-a$,

$$E(T) = a \cdot b.$$

Traiamo da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Random_Walk_example.svg la seguente figura, che rappresenta (la parte iniziale di) 8 cammini aleatori.



Su queste basi ipotizziamo ora un “parametro vitale complessivo”, che non riusciamo in questo esempio semplificato a specificare nei dettagli, ma che comunque non deve superare il valore soglia 7, nè scendere sotto il valore soglia -7, variando di anno in anno nell'individuo, salendo o scendendo di 1 con uguale probabilità 50%. Possiamo proprio immaginare un robottino che ogni 31 dicembre lancia una moneta e somma 1 se viene testa o sottrae 1 se viene croce ad un suo “capitale virtuale”, partito da 0, e muore ovvero si spegne se sfora i limiti prestabiliti. In base a quanto sopra detto, con $a = b = 8$, la speranza matematica della vita è 64 anni, cioè $8 \cdot 8$. Ma se ora (come in un videogioco si danno le vite supplementari) supponiamo che la prima volta che una soglia (8 o -8) viene raggiunta, un farmaco modifica di 1 o -1 il parametro vitale nella direzione giusta, ecco che al nostro ipotetico soggetto la Farmacia regala altri anni di vita! Superato il momento critico, quando rischiava di andare a 8 o -8 e morire, ricomincia una nuova vita; certo la ricomincia in posizione rischiosa, a 7 o -7, e al passo successivo può morire (e non è detto che gli sia concessa una seconda salvezza), ma non è detto, magari si allontana dal limite invalicabile e sopravvive ancora a lungo.
Questo può essere visto come uno dei significati della Farmacia: la cura urgente del caso acuto (con qualche speranza che il soggetto

si allontani poi dalla situazione limite).

Oltre all'aspettativa di vita alla nascita, la mortalità nel primo anno è l'altro grande parametro usato per valutare lo stato di salute complessivo di una popolazione.
Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera:

> Of the 27 most developed countries, the U.S. has the highest Infant Mortality Rate, despite spending much more on health care per capita.

La mortalità infantile in sostanza è una probabilità, in senso frequentista, mentre l'aspettativa di vita alla nascita è una sorta di speranza matematica.

42.7 Esercizi sulla speranza matematica di v.a. discrete

Esercizio$^{f}_{\mu}$ Qual è la vincita netta attesa giocando 1 euro su una cinquina del lotto? (Con la parola "netta" intendiamo che conteggiamo la perdita sicura di 1 euro, il costo della giocata).
Detta V la v.a. "vincita netta", ricordando che si vince 6 milioni di volte la giocata, con probabilità $1/\binom{90}{5} = 1/43\,949\,268$,

$$V = \begin{pmatrix} 5\,999\,999 & -1 \\ \frac{1}{43\,949\,268} & \frac{43\,949\,267}{43\,949\,268} \end{pmatrix}$$

$$E(V) = 5\,999\,99 \cdot \frac{1}{43\,949\,268} - \frac{43\,949\,267}{43\,949\,268} = -\frac{37\,949\,268}{43\,949\,268} =$$

adesso magari semplifichiamo per 2, poi ancora per 2, poi per 3

$$= -\frac{3\,162\,439}{3\,662\,439} \approx -0.8635\,euro$$

cioè una perdita media di circa 86 centesimi di euro. (In generale i giochi d'azzardo sono molto meno svantaggiosi di questo).
Esercizio$^{f}_{\mu}$ Qual è la vincita netta attesa giocando 1 euro su un numero della roulette europea?
La vincita avviene con probabilità 1/37 perché i numeri equiprobabili sono 37, da 0 a 36, e dà 36 volte la giocata:

$$V = \begin{pmatrix} 35 & -1 \\ \frac{1}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}$$

$$E(V) = 35 \cdot \frac{1}{37} - \frac{36}{37} = -\frac{1}{37} \approx 0.027\,euro$$

cioè mediamente perdiamo, molto approssimativamente, 3 centesimo ad ogni giocata di 1 euro.

IX – Variabili aleatorie continue

43 Alcune variabili aleatorie continue

Come abbiamo visto, una v.a. è una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$ che ad eventi associa numeri e si dice continua se i valori riempiono almeno un intervallo.
Per esempio il peso del primo neonato del prossimo anno, misurato con "infiniti decimali" (numero reale, con precisione infinita), ovviamente da considerarsi prima dell'evento.
Ogni singolo valore ha probabilità nulla: $P(X = t) = 0, \forall\, t$.

In questa trattazione elementare, le v.a. continue che considereremo sono **molto regolari**: **la funzione di ripartizione**

$$F_X(z) := P(X \le z)$$

– **è continua su tutto** $\mathbb{R}$
– **e derivabile salvo al più in 1 o 2 punti**.

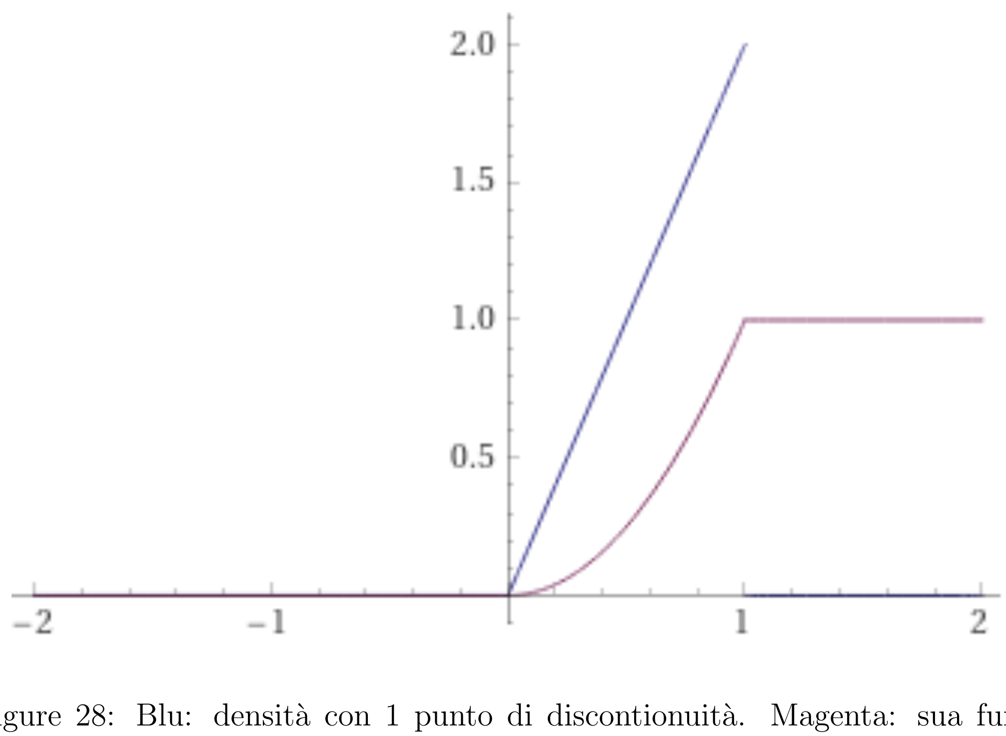


Figure 28: Blu: densità con 1 punto di discontionuità. Magenta: sua funzione di ripartizione con 1 punto di non derivabilità (ma comunque continua). Screenshot da WolframAlpha.

La derivata della f.r., completata ad arbitrio in quegli eventuali punti particolari ovvero *singolari*,

$f(z) := F_X'(z) = DP(X \leq z)$ $\quad_{\text{spesso denotata } f_X \text{, con argomento } z,t,u,x...}$

si chiama **densità** della variabile aleatoria.

Per fissare le idee nella mente, si immagini

la funzione di ripartizione come una curva sigmoide che cresce da 0 a 1

la densità come una funzione a campana nel senso più lato possibile con asintoto l'asse delle ascisse.

Variazioni sono possibili nei singoli casi ma intanto fissiamo nella mente qualcosa da immaginare per la generalità dei casi:

$$\text{f.r.} \leftrightarrow \text{sigmoide} \quad _{tipo\, arcotangente\, ma\, riscalata\, fra\, 0\, e\, 1}$$

$$\text{densità} \leftrightarrow \text{campana}$$

Una funzione f è densità di una v.a. se e solo se

$$f(t) \geq 0 \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Se f e F_X sono rispettvamente densità e f.r. di una variabile aleatoria continua X, allora (teorema)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \qquad \forall\, x$$

$$P(X = x) = 0 \qquad \forall\, x$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt \qquad \forall\, a, b, \;\; ogni \leq \; sostituibile\, con \; <$$

e in quest'ultima a e b possono essere infiniti (col <, ovvio).

Esempio 1: v.a. di Cauchy.

$$f(t) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

La distribuzione di Cauchy ha in Farmacia almeno 5 utilità:

– fornisce un modello di densità a campana di cui si possono calcolare i valori con le 4 operazioni

– fornisce un modello di densità a campana di cui si possono calcolare gli integrali con funzioni elementari (l'arcotangente)

– fornisce un esempio di variabile aleatoria priva di speranza matematica

– permette di chiarire, nel confronto con la v.a. normale, la questione delle *code pesanti*

– è usata in Spettroscopia: LINK->

Esempio 2: v.a. $\sim \mathbb{U}[a,b]$ **oppure** $\mathbb{U}(a,b)$**, uniforme su** $[a,b]$**.**

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\; a \le t \le b \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & se\; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & se\; a \le x \le b \\ 1 & se\; x > b \end{cases} .$$

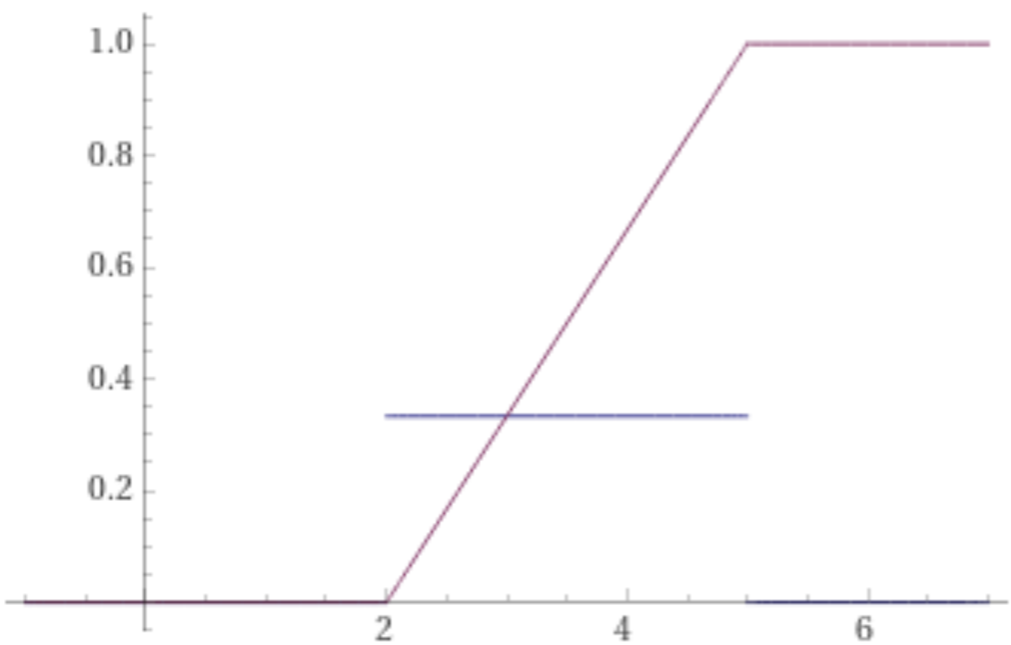


Figure 29: Blu: densità uniforme continua di parametri 2 e 5. Magenta: sua f.r.. Screenshot da WolframAlpha.

La densità ha 2 punti di discontinuità e corrispondentemente la f.r. ha 2 punti di non derivabilità.

Esempio 3: v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$.

$$f(t) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & se\, t \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & se\, x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} .$$

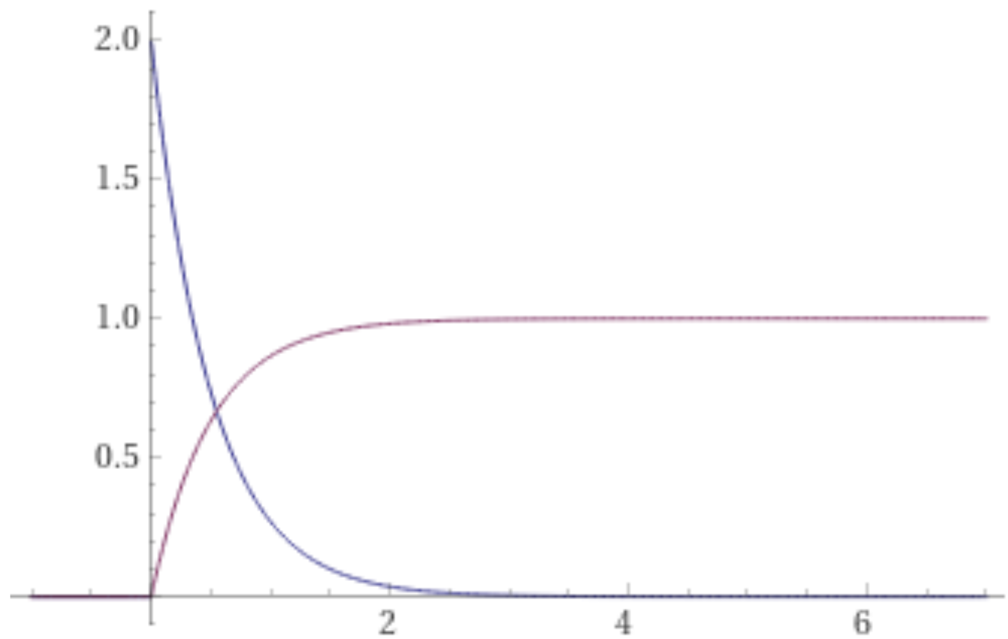


Figure 30: Blu: densità esponenziale di parametro 2. Magenta: sua f.r.. Screenshot da WolframAlpha.

La densità esponenziale modellizza molte cose fra cui l'*intertempo* fra 2 chiamate telefoniche a una farmacia o a un qualunque servizio in un tempo del giorno in cui esse arrivano in ogni minuto con la stessa probabilità: Leggiamo sulla Wikipedia in inglese alla voce *Exponential distribution*:

> if we focus on a time interval during which the rate is roughly constant, such as from 2 to 4 p.m. during work days, the exponential distribution can be used as

> a good approximate model for the time until the next phone call arrives.

Ecco 11 valori (di una simulazione informatica) della variabile aleatoria esponenziale di parametro 3.5, con 3 cifre decimali:

0.163 0.190 0.695 0.132 0.979 0.157 0.023 0.236 0.291 0.113 0.015

Si notino i valori piccoli e i valori grandi, distribuiti in un modo tipico, caratterizzante appunto la variabile aleatoria esponenziale.

Ecco online su WolframAlpha un po' di determinazioni, ad ogni reload nuove, (di una simulazione informatica) della variabile aleatoria esponenziale di parametro 3.5: `link->`

La distribuzione esponenziale ha un'ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate. Traiamo da Wikipedia in inglese, l'enciclopedia libera, alla voce

> The exponential distribution occurs naturally when describing the lengths of the inter-arrival times in a homogeneous Poisson process.
>
> The exponential distribution may be viewed as a continuous counterpart of the geometric distribution, which describes the number of Bernoulli trials necessary for a discrete process to change state. In contrast, the exponential distribution describes the time for a continuous process to change state.
>
> In real-world scenarios, the assumption of a constant rate (or probability per unit time) is rarely satisfied. For example, the rate of incoming phone calls differs according to the time of day. But if we focus on a time interval during which the rate is roughly constant, such as from 2 to 4 p.m. during work days, the exponential

> distribution can be used as a good approximate model for the time until the next phone call arrives. Similar caveats apply to the following examples which yield approximately exponentially distributed variables:
>
> • The time until a radioactive particle decays, or the time between clicks of a Geiger counter
>
> • The time it takes before your next telephone call
>
> • The time until default (on payment to company debt holders) in reduced form credit risk modeling
>
> Exponential variables can also be used to model situations where certain events occur with a constant probability per unit length, such as the distance between mutations on a DNA strand, or between roadkills on a given road.
>
> In queuing theory, the service times of agents in a system (e.g. how long it takes for a bank teller etc. to serve a customer) are often modeled as exponentially distributed variables. (...)

Per ciacuno di quei fenomeni abbiamo qualcosa del tipo

$$P(\text{dura meno di } x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

con un parametro λ caratteristico di quel fenomeno.
In particolare
$P(\text{dura meno di } 0) = 0$ cioè almeno un istante dura.

Abbiamo introdotto la speranza di vita con la variabile aleatoria geometrica, col robottino che può “morire” solo all'ultimo giorno dell'anno. La variabile aleatoria esponenziale è in qualche modo il corrispondente continuo della variabile aleatoria geometrica, e tiene conto della possbilità di morte – o di guasto per gli apparati tecnologici, dai motori alle lampadine ai fusibili – in ogni momento. Entrambe le variabili aleatorie godono dell'assenza di memoria: resta da vivere sempre la stessa quantità di tempo, mediamente. Esattamente come per la variabile aleatoria geometrica, c'è però da dire che sia per gli esseri viventi che per le macchine, la mortalità non è costante: è molto maggiore presso la nascita, e nella vecchiaia. Entrambi i modelli allora sono molto approssimativi, seppure danno un'idea della questione.

44 Quantili delle variabili aleatorie continue

Se l'insieme dove f è positiva è un intervallo, anche se illimitato, allora (si dimostra) per ogni $\alpha \in]0,1[$ esiste un'unica soluzione dell'equazione

$$F_X(t) = \alpha$$

che si chiama *quantile di ordine* α, indicato talvolta con q_α:

$$P(X \leq q_\alpha) = \alpha.$$

Si chiama *mediana* il quartile $q_{0.5}$ di ordine 0.5 ovvero 1/2, o 50%.
Esempio. Per una legge esponenziale di parametro 3 calcolare $P\Big(X \geq \frac{2}{3}\ln 2\Big)$.
La densità è

$$f(x) := \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x} & \textit{se } x \geq 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

e allora

$$P\Big(X \geq \frac{2}{3}\ln 2\Big) = \int_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} 3\mathrm{e}^{-3t}\,dt = \star$$

calcoliamo l'integrale indefinito con la (36) con $z := -3t + 0$

$$\int 3\mathrm{e}^{-3t}\,dt = \frac{1}{-3}\Big(\int 3\mathrm{e}^{z}\,dz\Big)_{z=-3t} = -\frac{1}{3}\big(3\mathrm{e}^{z}\big)_{z=-3t} = -\mathrm{e}^{-3t}$$

$$\text{riprendiamo } \star = \Big[-\mathrm{e}^{-3t}\Big]_{\frac{2}{3}\ln 2}^{+\infty} = -\mathrm{e}^{-\infty} - \Big(-\mathrm{e}^{-3\frac{2}{3}\ln 2}\Big) =$$

$$\underset{\textit{intendendendo } \mathrm{e}^{-\infty} \textit{ nel senso del limite e allora } 0}{=} 0 + \mathrm{e}^{-2\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2^{-2}} = 2^{-2} =$$

$$= \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

(e allora $\frac{2}{3}\ln 2$ è il quantile di ordine $\frac{1}{4}$ ossia 0.25 ossia 25%).
Calcolando la probabilità p dell'evento complementare $X < \frac{2}{3}\ln 2$, e poi facendo $1 - p$, si potevano evitare gli infiniti.
Esercizi. Trovare le mediane dell'uniforme e dell'esponenziale. [Si troverà $q_{0.5} = \frac{a+b}{2}$ e $q_{0.5} = \frac{1}{\lambda}\ln 2$ rispettivamente].

Esercizi. Trovare i quartili di ordine $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ dell'uniforme e dell'esponenziale. Per un'esponenziale di parametro 2 calcolare $P(X \geq 3)$. (Si può calcolare come $1 - P(X < 3)$ evitando l'infinito).

Nota. Sia per variabili aleatorie discrete che continue, *distribuzione* è sinonimo di *legge*, e indica sia la *densità* che la *funzione di ripartizione* (e in via teorica anche ogni altra funzione ad esse equivalente ma in pratica useremo quelle due).

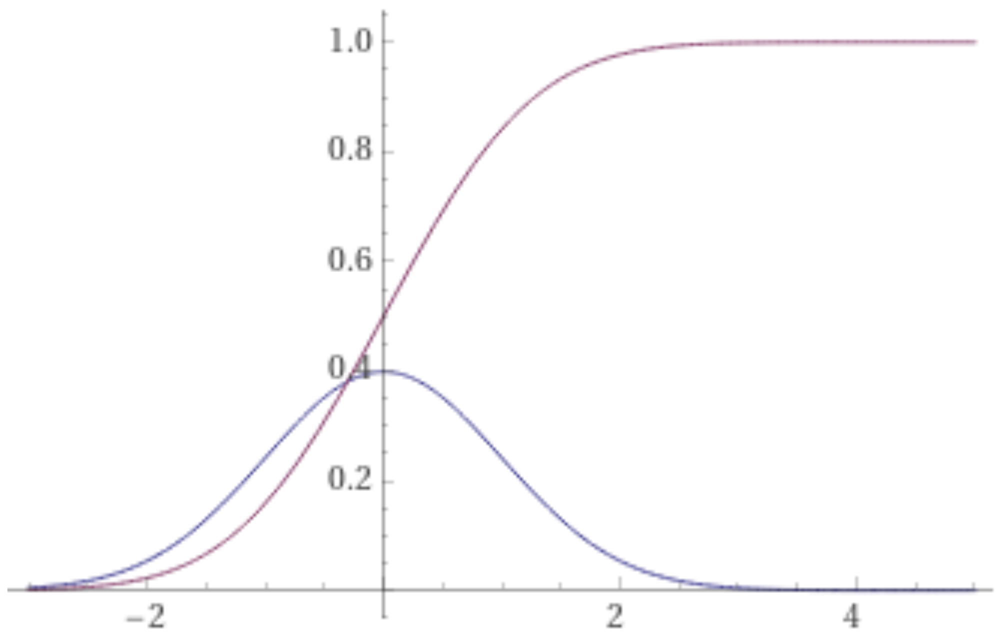


Figure 31: Blu: densità normale standard. Magenta: sua f.r.. Screenshot da WolframAlpha.

Proprietà di ogni f.r. $F(x)$ di v.a. continua:

1) ha valori fra 0 e 1, cioè $0 \leq F(x) \leq 1$;
2) è non decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$;
3) tende a 0 per $x \to -\infty$;
4) tende a 1 per $x \to +\infty$;
5) è continua (in trattazioni di livello superiore continua a destra);
6) è crescente puntualmente dove la densità $f = F'$ è positiva.

Proprietà di ogni densità $f(x)$ di v.a. continua:
1) ha valori ≥ 0, sappiamo;
2) ha integrale 1 su tutto $\mathbb{R}$, sappiamo; e poi si dimostra che
3) è continua salvo al più 1 o 2 punti (in questa trattazione).

3 bis) Tutte le densità che considereremo in questa trattazione tendono a 0 per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

Ma densità particolarmente "capricciose", considerabili a un livello superiore di questo testo elementare, potrebbero non avere uno o entrambi quei limiti, con infinite oscillazioni con "campate" sempre più strette, come nella figura sottostante.

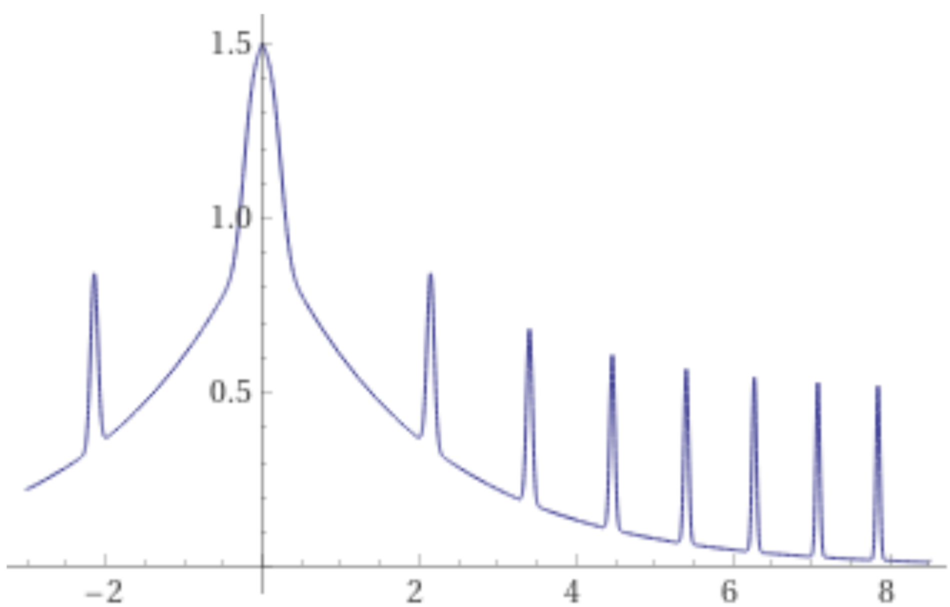


Figure 32: Densità "capricciosa" del tipo che ci proponiamo di non considerare: non tende a 0 per $x \to +\infty$. Screenshot da WolframAlpha.

Esercizi.

•• I principali quantili considerati in statistica sono:

i *quartili* $q_{0.25}$, $q_{0.5}$, $q_{0.75}$, e il secondo è la mediana;

i *decili* $q_{0.1}$, $q_{0.2}$,...,$q_{0.9}$, corrispondenti a 10%, 20%,...,90%;

i *centili* o *percentili* $q_{0.01}$, $q_{0.02}$,...,$q_{0.99}$, corrispondenti a 1%, 2%,...,99%;

due *ventili*, precisamente $q_{0.05}$ e $q_{0.95}$.

Si calcolino relativamente alla densità esponenziale.
Per esempio per i decili si troverà

$$q_{k/10} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10}{10-k} \qquad k = 1, ..., 9$$

(Si noti che per $k = 5$ si ottiene la mediana).

•• Per una v.a. X di densità esponenziale di parametro 5 calcolare $P(X < 2)$, $P(X^3 > 2)$, $P(X^2 \geq 4)$.

•• Si consideri una v.a. Z di densità

$$f(z) := \begin{cases} 6z(1-z) & se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases} .$$

Senza fare calcoli ma col disegno del grafico stabilire quanto vale la mediana e mettere in ordine crescente

$$P(Z < 0.4), \quad P(Z > 0.9), \quad P(Z \leq 0.2), \quad P(Z \geq 0.7).$$

45 Speranza matematica, varianza, covarianza

Definizioni. Consideriamo una v.a. X continua di densità f.

$$\textbf{Speranza matematica: } \mu = E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

se l'integrale con $|x|$ esiste finito, che non verificheremo mai.

Del tutto analoga alla definizione per una v.a. discreta:

$$\mu = E(X) := \sum_k x_k \cdot p_k \qquad \textit{somma su tutti i valori } x_k \textit{ della v.a.}$$

Si noti che la sommatoria (finita o serie) del caso discreto è diventata un integrale definito nel caso continuo. E la densità discreta p_k è stata sostituita dalla densità continua $f(x)$; però si faccia attenzione che ogni singolo valore p_k è un valore di probabilità, quindi fra 0 e 1, per esempio $\frac{1}{6}$, mentre i valori di $f(x)$ non sono probabilità e possono essere maggiori di 1. La densità della Figura 43 raggiunge il valore 2.

$$\textbf{Varianza: } \sigma^2 = Var(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx = E(X^2) - E(X)^2$$

Del tutto analoga alla definizione per una v.a. discreta:

$$\sigma^2 = Var(X) := \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot p_k = E(X^2) - E(X)^2$$

Sia per v.a. discrete che continue:

$$\textbf{Deviazione standard: } \sigma := \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2}.$$

$$\textbf{Covarianza: } Cov(X,Y) := E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

e se la covarianza è 0 le v.a. si dicono *incorrelate*.

Diremo **indipendenti** 2 variabili aleatorie X e Y continue se informazioni sui valori assunti da una non modificano le nostre conoscenze probabilistiche sui valori dell'altra, ovvero e per ogni a, x, c, y con $a < x$ e $c < y$

$$P(a < X < x \wedge c < Y < y) = P(a < X < x) \cdot P(c < Y < y)$$

cioè $\{a < X < x\}$ e $\{c < Y < y\}$ sono eventi indipendenti.
Spesso le variabili aleatorie incorrelate sono indipendenti.

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \mathbb{U}[a,b]$ ovvero $\mathbb{U}(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
X esponenziale di parametro λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
X ~Cauchy	$\nexists$	$\nexists$

Detto semplificatamente, la densità di Cauchy non ha la speranza matematica perchè ha le code troppo pesanti, stenta a tendere a 0 a $\pm\infty$ (si veda la Figura 37.2) e ciò rende inesistente l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di $|x|\,f(x)$.

45.1 Approfondimenti sulle v.a. discrete e continue

Tutte le cose che diremo qua valgono sia per variabili aleatorie discrete che continue.

Con c intendiamo un qualunque numero reale. E $\sigma :=$ SD $:= \sqrt{Var(X)}$.

Relazioni di 1 variabile aleatoria con 1 costante:

$$E(c+X) = c + E(X) \tag{56}$$

$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X) \tag{57}$$

$$Var(c+X) = Var(X) \tag{58}$$

$$Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X) \tag{59}$$

$$\mathrm{SD}(c \cdot X) = |c| \cdot \mathrm{SD}(X) \tag{60}$$

Relazioni di 2 variabili aleatorie:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \tag{61}$$

$$X, Y \text{ indip. } \Rightarrow \text{ incorrelate } \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \tag{62}$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + Cov(X, Y) \tag{63}$$

$$\text{indip. } \Rightarrow Var(X + ... + X_n) = Var(X_1) + ... + Var(X_n) \tag{64}$$

Disuguaglianza di Chebyshev[113]. Riguarda gli *scarti dalla media* $|X - E(X)|$, precisamente la probabilità che siano "grandi" o per meglio dire superino un fissato numero c:

$$P(|X - E(X)| > c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \tag{65}$$

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.
Essa ci dice che minore è la variabilità della grandezza aleatoria X, minore è la probabilità che X assuma valori distanti dalla media. Equivalentemente con l'evento complementare

$$P(|X - E(X)| \leq c) \geq 1 - \frac{Var(X)}{c^2} \tag{66}$$

valida per ogni $c \neq 0$ reale; ma utile solo per $c > \sigma$.

Scrivendo da adesso μ per la speranza matematica e σ per lo scarto quadratico medio, coi valori di c multipli interi positivi $m\,\sigma$ di σ, $m = 1, 2, 3...$, osservato che $1 - \frac{\sigma^2}{(m\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{m^2}$, la Disuguaglianza di Chebyshev è

$$P(|X - \mu| \leq m\,\sigma) \geq 1 - \frac{1}{m^2} \qquad m = 1, 2, 3...$$

e con $m := 2, 3, 4, 5$ (il caso $m := 1$ non è significativo) per una **variabile aleatoria discreta o continua qualunque** purché dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2, risulta

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \geq \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

[113] Ovvero di Bienaymè-Chebyshev. Miglior traslitterazione dal russo Čebyšëv.

$$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) \geq \frac{8}{9} = 0.8888... \approx 88.9\%$$
$$P(|X-\mu| \leq 4\sigma) \geq \frac{15}{16} = 0.9375 = 93.75\%$$
$$P(|X-\mu| \leq 5\sigma) \geq \frac{24}{25} = 0.96 = 96\%.$$

Queste maggiorazioni valgono – come detto – per distribuzioni qualunque. Molti che sanno qualcosa di Statistica hanno in mente la notissima formula $P(|X-\mu| \leq 2\sigma) \approx 95\%$ ma una tale affermazione stringente può essere fatta se si sa che X ha densità normale.

Esercizi. Siano X e Y indipendenti di leggi esponenziali di parametri $\log 3$ $\log 4$ rispettivamente. Calcolare la loro covarianza, e la speranza matematica di X, $2Y$, $3+Y$ e $\pi X - Y$.

46 Leggi del chi quadrato e t di Student

46.1 Funzione Gamma e Legge Gamma

La **funzione** $\Gamma(x)$, *funzione Gamma*, è una *funzione speciale* dell'Analisi Matematica, cioè, in pratica e semplificando, una funzione non elementare ma di notevole interesse, con una certa definizione che non daremo. I suoi valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche. Ma per i numeri $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4...$ i suoi valori sono semplici:

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)! \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}^+$$

(si faccia un grafico) e quelli soli considereremo, per esempio

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma(2) = 1! = 1, \quad \Gamma(3) = 2! = 2, \quad \Gamma(4) = 3! = 6.$$

La **Legge** $\Gamma(\alpha, \lambda)$, Gamma di parametri $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, ha densità

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & se\ t > 0 \\ \\ 0 & se\ t \le 0 \end{cases} . \tag{67}$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $\alpha := \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ e $\lambda := 2$, e si calcolino e grafichino le funzioni di ripartizione.

Teorema.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

46.2 Densità e leggi del chi quadrato

La legge $\chi^2(n)$ [del] chi quadrato (chi-quadrato, chi quadro, chi-quadro, inglese *chi-square* o *chi-squared*) ovvero χ^2 di parametro n o come si meglio dice *a n gradi di libertà* ha densità

$$f(x) = f(x;n) := \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & se\ \ x > 0 \\ 0 & se\ \ x \leq 0 \end{cases} . \tag{68}$$

Si scrivano esplicitamente e grafichino le densità per $n = 1, 2, 4, 6$, e si calcolino e grafichino le ultime 3 funzioni di ripartizione.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti i quantili. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche.

Il valore di maggior interesse in Statistica Inferenziale è $q_{0.95}$, e in subordine con 0.9 e 0.99:

$$P(X < q_{0.95}) = 0.95 = 95\%$$

$$equivalentemente \;\; P(X > q_{0.95}) = 0.05 = 5\%$$

e tale quantile non è un singolo numero perché viene ulteriormente precisato da n=1,2...

In particolare ci proponiamo di imparare a memoria il quantile $q_{0.95}$ relativo a $n = 11$ gradi di libertà, che però di spesso sulle tavole numeriche si trova riferito non a 0.95 bensì al valore 0.05:

$$\approx 19.68$$

di solito riportato con più decimali, per esempio 19.675 con 3 decimali.

Purtroppo c'è confusione nelle notazioni usate, Si veda il paragrafo (59.2).

Ecco alcuni valori:

su alcune tavole →	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01
su altre tavole →	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
n				$\chi^2_{0.05}(1)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(1)$ ↓	
1	0.004	0.02	2.71	3.84	6.63
2	0.10	0.21	4.61	5.99	9.21
3	0.35	0.58	6.25	7.81	11.34
4	0.71	1.06	7.78	9.49	13.28
5	1.14	1.61	9.24	11.07	15.09
6	1.63	2.20	10.64	12.59	16.81
7	2.17	2.83	12.02	14.07	18.48
8	2.73	3.49	13.36	15.51	20.09
9	3.32?	4.17	14.68	16.92	21.67
10	3.94	4.87	15.99	18.31	23.21
11	4.57	5.58	17.28	**19.68**	24.73
				↑ $\chi^2_{0.05}(11)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(11)$	

Ripetiamo che per noi 19.68 è $\approx q_{0.95}$ con 11 gradi di libertà, ma spesso sulle tavole sta sulla colonna 0.05.

46.3 Densità e quantili di Student, e legge di Cauchy

Come le leggi del chi quadrato, la t **di Student** è una famiglia di leggi, con un parametro, di solito indicato con n o ν, ancora detto *gradi di libertà*: $n = 1, 2, 3....$ Scriviamo le prime 2:

$$f(t;1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t^2+1} \qquad f(t;2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}$$

e nelle successive $\frac{t^2}{2}$ diventa $\frac{t^2}{3}$, $\frac{t^2}{4}$... e l'esponente $\frac{3}{2}$ diventa $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$... e cambia anche la costante moltiplicativa davanti, e ha una espressione che coinvolge la funzione Γ. I grafici un po' si assomigliano: simmetrici rispetto all'asse y, al crescere di n le campane diventano più alte e strette.

La $f(t;1)$ è la **densità di Cauchy**, che sorprendentemente non ha speranza matematica, ma tutte le altre sì, e allora ovviamente è 0 per la simmetria.

Di questa famiglia (insieme) di leggi, in Statistica sono molto importanti **i quantili**. I valori approssimati vengono calcolati da vari software e molti si trovano elencati in tavole numeriche, purtroppo di difficile lettura a causa di varie ambiguità, col serio rischio di confondere un parametro caratterizzante i quantili, α, con $1-\alpha$ oppure $2(1-\alpha)$ oppure $2\alpha-1$.

Nella riga di testa si trovano alcuni valori, talvolta con la specificazione *"one tail"*, e per associarli correttamente ad α, evitando di confonderlo con $1-\alpha$, o $2(1-\alpha)$, o $2\alpha-1$, si cerchi nella prima riga (cioè per $n=1$) il valore ≈ 6.31 corrispondente ad $\alpha = 0.95$:

$$X \sim t \text{ di Student a 1 grado di libertà} \qquad P(X \leq 6.31) \approx 0.95.$$

Ecco alcuni valori. Qua si intende che α è grande, diciamo > 0.8.

	two tails $2\alpha-1$ →	0.9	0.95	0.98	0.99
	two tails $2(1-\alpha)$ →	0.1	0.05	0.02	0.01
	one tail $1-\alpha$ →	0.05	0.025	0.01	0.005
k	**one tail** α →	0.95	0.975	0.99	0.995
1		$\underline{6.31}34$	12.706	31.820	63.657
...		...	...	...	...
100		1.6602	1.984	2.364	2.625

ESEMPIO$_\mu$ Probabilità che una v.a. di legge di Student a 2 gradi di libertà assuma un valore ≤ 2.52:

$$P(X \leq 2.52) = \int_{-\infty}^{2.52} f(t;2)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{2.52} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}+1\right)^{3/2}}\,dt$$

integrale non facile da calcolare al livello di questa trattazione elementare.
Con Wolframalpha `Integrate (1/(2Sqrt[2]))(1/(t^2/2+1)^(3/2)) from -Infinity to 2.52` dà

$$\approx 0.936 = 93.6\%.$$

Teoremi.

Legge	$E(X)$ μ	$Var(X)$ σ^2
$X \sim \chi^2(n)$ ovvero del χ^2 a n gradi di libertà	n	$2n$
$X \sim t$ di Student a n gradi di libertà	0 per $n > 1$	$\frac{n}{n-2}$ per $n > 2$

Osservazioni. Quelle che abbiamo visto, e le densità normale e log-normale che vedremo, sono fra le principali densità continue. Ma ne esistono infinite altre, alcune con un nome specifico, altre senza. Si considerino per esempio gli esercizi seguenti.

Esercizio 1$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

$$g(t) := \alpha\, \mathrm{e}^{-2|t|}$$

naturalmente dopo aver determinato la costante α. (La costante viene determinata dall'integrale unitario fra $-\infty$ e $+\infty$, che per la parità della densità è 2 volte l'integrale fra 0 e $+\infty$).

Esercizio 2$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

$$f(z) := \begin{cases} 0 & se\ \ z < \frac{1}{2} \\ c & se\ \ \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ \frac{c}{z^3} & se\ \ z \geq 1 \end{cases} \qquad \textit{discontinua!}$$

naturalmente dopo aver determinato c. (Ovviamente bisognerà usare la Formula (14), Regola di Chasles, fatta valere su $]a, b[=]-\infty, +\infty[$, suddividendo 2 volte l'integrale, nei punti $\frac{1}{2}$ e 1).

Esercizio 3$_\mu$ Calcolare la speranza matematica della densità

discontinua! $\quad u(x) := a(2 + \mathrm{sgn}(x))\ per\ -1 \leq x \leq 2,\ e\ 0\ altrimenti.$

47 Legge e speranza matematica di $g(X)$

47.1 Legge di $g(X)$

Se X è una variabile aleatoria discreta allora $g(X)$ è una variabile aleatoria qualunque sia la funzione g.
Per esempio il doppio del risultato di un lancio di dado, $2\,X$.

Per le variabili aleatorie continue invece, nella nostra trattazione elementare, richiediamo la continuità: se X è una variabile aleatoria continua e se g è una funzione sufficientemente regolare, e per noi in particolare continua, anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua.
Si pensi per esempio a $mX + q$, X^2, X^3 e $-X^3$.
Esempio concreto:

$$Y := 453{,}592\,37\,X$$

converte il peso X in libbre del primo bambino che nascerà vivo negli USA il prossimo anno, nel suo peso Y in grammi.

Se poi X e g sono molto regolari, X e $g(X)$ hanno anche speranza matematica..

Esempio 1 di calcolo della legge di $g(X)$ per v.a. continua: $m\,X + q$.
Troviamo funzione di ripartizione e poi densità di $m\,X + q$ con $m > 0$:

$$F_{m\,X+q}(t) =$$

per definizione e poi per algebra

$$= P(m\,X + q \le t) = P(m\,X \le t - q) =$$

per algebra, essendo $m > 0$

$$= P\left(X \le \frac{t-q}{m}\right) =$$

per definizione di funzione di ripartizione

$$= F_X\left(\frac{t-q}{m}\right)$$

e derivando rispetto a t la prima e l'ultima espressione con la regola di derivazione della funzione composta

$$f_{mX+q}(t) = \frac{1}{m} f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m > 0$$

e un analogo calcolo con $m < 0$ darà

$$f_{mX+q}(t) = -\frac{1}{m} f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m < 0$$

e le 2 ultime formule si riassumono in questa formula della densità

$$f_{mX+q}(t) = \frac{1}{|m|} f_X\left(\frac{t-q}{m}\right) \qquad m \neq 0$$

Esempio 2 di calcolo della legge di $g(X)$ per v.a. continua: X^2.
Con un analogo tipo di calcoli si troverà

$$F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \qquad \text{se } g(z) := z^2$$

e poi per tutte la densità si ottiene derivando, in particolare

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})) \qquad se\ x > 0$$

e ovviamente 0 se $x < 0$.

47.2 Standardizzazione di una variabile aleatoria

Definizione. Per una variabile aleatoria X discreta o continua dotata di speranza matematica μ e varianza σ^2, la nuova variabile aleatoria

$$Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$$

(che è $mX+q$ con $m := \frac{1}{\sigma}$ e $q := -\frac{\mu}{\sigma}$) si chiama **standardizzazione** di X o suo **z score**,
Richiede la conoscenza di media e varianza *veri*, cosa possibile per esempio per un dado: $\frac{X-\frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}}}$.
La standardizzazione può essere applicata anche ai valori di un dataset:

$$z_i := \frac{x_i - \bar{x}}{\mathrm{SD}}$$

e per calcolare la deviazione standard SD si userà la formula con $\frac{1}{n}$ se il dataset rappresenta tutta la popolazione di interesse, o quella con $\frac{1}{n-1}$ se ne è un campione.

Si noti che lo z score è adimensionale, per com'è definito.

Lo z score tende ad assumere valori intorno a 0, e quelli più vicini a 0 provengono dai valori (originali) più normali e quelli più lontani dai valori più estremi.

Esempio. Per un dado $X \sim \mathbb{U}\{1,6\}$ è $\mu = \frac{7}{2}$ e $\sigma^2 = \frac{35}{12}$, e allora per la somma Z di 2 dadi $E(Z) = 7$ e per l'indipendenza $\sigma^2 = \frac{35}{6}$ ovvero $\sigma = \sqrt{\frac{35}{6}}$.
Prendiamo ora 100 lanci di coppia di dadi virtuali:

12 8 8 4 5 10 5 6 7 7 8 7 2 4 5 9 11 5 5 12 6 8 7 9 6 7 9 8 9 9 8 10 6 5 5 5 3 6 6 5 7 5 10 8 9 9 6 5 4 7 7 8 4 6 6 11 9 7 6 7 9 4 5 7 5 3 7 8 5 7 9 4 5 5 5 3 9 3 9 4 8 10 8 6 9 8 10 7 7 7 9 8 9 8 4 6 6 8 4 7
Possiamo standardizzare

2.42465 0.548712 0.548712 -1.32723 -0.858241 1.48668 -0.858241 -0.389257 0.0797273 0.0797273 eccetera

Si noti nuovamente che lo z score tende ad assumere valori intorno a 0, e quelli più vicini a 0 provengono dai valori (originali) più normali e quelli più lontani dai valori più estremi.
E fa questo in modo "standard": ogni statistico riconosce un valore normalissimo intorno a 0, un po' discosto dalla media intorno a 1 o -1, soprendente intorno a ± 2, un valore eccezionale intorno a ± 3, molto eccezionale intorno a ± 4, eccezionalissimo intorno a ± 5... Sia che la variabile aleatoria iniziale variasse intorno al 3000 com'è per il peso del neonato in grammi, o intorno al 3.5 com'è per il dado.

Teorema.

Se W è standardizzazione di una v.a. discreta o continua

$$E(W) = 0 \qquad Var(W) = 1.$$

Esercizio. Si scrivano le standardizzazioni dei 2 dadi di (37.1), con quella stessa notazione. E di una moneta regolare.

Teorema. Come detto, data una variabile aleatoria continua X e una funzione sufficientemente regolare g, anche $g(X)$ è una variabile aleatoria continua. In condizioni di ulteriore regolarità X e $g(X)$ hanno speranza matematica.
Se la v.a. continua X ha densità f_X allora

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)\, dt.$$

in particolare (con $g(z) := z^n$)

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx \quad \text{si chiama } \textit{momento}\ n\text{-esimo.}$$

Il momento primo è proprio la speranza matematica di X.

Esempi. Vediamo 2 esempi tratti da un libro che si distingue nella didattica del Calcolo delle Probabilità e della Statistica: *Calcolo delle probabilità*, di Paolo Baldi, ed. McGraw-Hill. Alle pp. 125-126:

> Supponiamo che X sia uniforme su $[0,1]$. Quanto valgono $E[\sin(2\pi X)]$ e $E[\mathrm{e}^X]$?(...)
>
> $$E[\sin(2\pi X)] = \int_0^1 \sin(2\pi x)\, dx = 0$$
>
> $$E[\mathrm{e}^X] = \int_0^1 \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e} - 1.$$

(L'uso delle soprastanti parentesi quadre non è conforme alle standard seguito in questa dispensa, ma si tenga presente che le notazioni fra i vari Autori differiscono alquanto).

Esercizi. Si consideri una v.a. X con $f_X(x) := x$ fra 0 e $\sqrt{2}$ e 0 altrimenti. Trovare $E(\sin(2\pi X))$, $E(\mathrm{e}^X)$ ed $E(\ln X)$, e anche un'altra speranza matematica con una funzione a scelta.
Poi si cerchino le stesse 4 speranze matematiche con una nuova densità a scelta.

47.3 Esercizi sulla legge di $g(X)$

Esercizio. Si trovi densità e f.r. di X^3.

$$P(X^3 \le x) = P(X \le \sqrt[3]{x}) \qquad \text{cioè}$$

$$\boxed{F_{X^3}(x) = F_X(\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dopo aver riconosciuto che $g(x) := x^3$ è crescente suriettiva con inversa $\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ per $x \ne 0$,

$$\boxed{f_{X^3}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(\sqrt[3]{x}) \quad x \ne 0}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.

Esercizio. Si trovi densità e f.r. di $-X^3$.

$$P(-X^3 \le x) = P(X^3 \ge -x) = 1 - P(X^3 \le -x) = 1 - P(X \le \sqrt[3]{-x}) = 1 - P(X \le -\sqrt[3]{x})$$

cioè

$$\boxed{F_{-X^3}(x) = 1 - F_X(-\sqrt[3]{x})}$$

(che si poteva ottenere direttamente dopo aver riconosciuto che $g(x) := -x^3$ è decrescente suriettiva con inversa $-\sqrt[3]{x}$) e derivando, essendo $D\sqrt[3]{x} = D\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
,

$$\boxed{f_{-X^3}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, f_X(-\sqrt[3]{x}) \quad x \ne 0}$$

e in 0 la densità può essere posta 0 o qualunque altro valore ≥ 0.

X – Variabile aleatoria normale, log-normale e convergenze

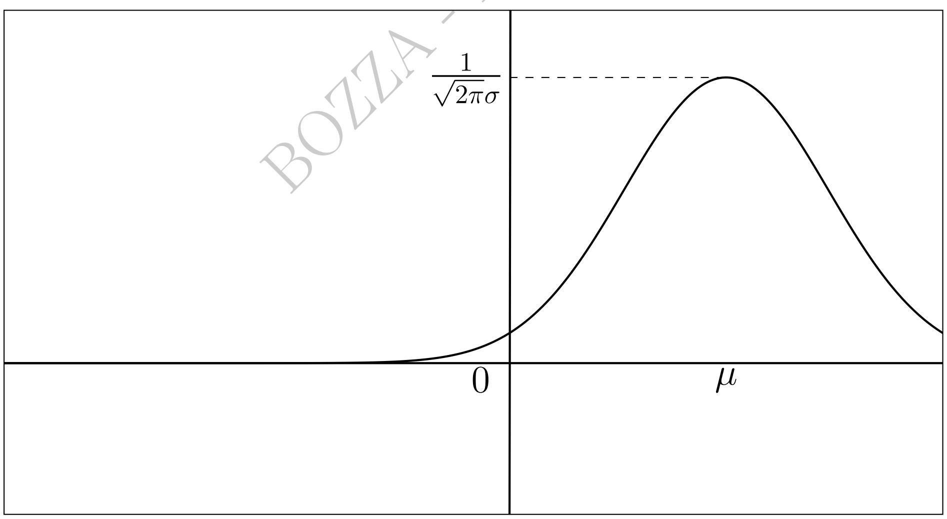
48 Densità e variabile aleatoria normale

48.1 Introduzione alla densità e v.a. normale

La densità **normale** ovvero **gaussiana** ha un grafico detto "a campana", con limiti 0 a $+\infty$ e $-\infty$, prima crescente e poi decrescente, prima con la concavità verso l'alto, poi verso il basso e infine verso l'alto.

Si tratta in qualche modo della più "pura" e "perfetta" delle densità a campana.

La *moda* (cioè l'eventuale unico punto di massimo di una densità di v.a. continua) esiste e coincide con la media μ, e la densità è simmetrica rispetto alla retta $x = \mu$, e a



causa di questa simmetria anche la mediana è μ: la probabilità di un valore prima di μ è uguale alla probabilità di un valore dopo μ. Per la simmetria la skewness è nulla.

Il massimo assoluto (ovviamente) vale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ e in $\mu \pm \sigma$ ci sono i 2 flessi (che si trovano facilmente con la derivata seconda), e allora

a grande varianza corrisponde campana bassa e larga
a piccola varianza corrisponde campana alta e stretta.

Questa legge è denotata con $N(\mu, \sigma^2)$, ha 2 parametri (come la legge Gamma) ed essi sono proprio la media e la varianza:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{densità normale } N(\mu,\sigma^2) \\[2em] f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\[2em] (\textit{standard},\ \phi(x),\ \text{se } \mu = 0 \text{ e } \sigma^2 = 1)\end{array}} \tag{69}$$

I parametri sono normalmente considerati μ e σ^2 (non μ e σ, ma si faccia attenzione che qualche software invece fa proprio così).

Si noti che è strettamente positiva su tutto $\mathbb{R}$: sono possibili valori grandissimamente positivi o negativi, ma sono pochissimo probabili (globalmente, ovvio: i singoli valori hanno tutti probabilità 0).

Teorema. Se $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ sono indipendenti

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$c + X \sim N(c + \mu_1, \sigma_1^2) \qquad c\,X \sim N(c\mu_1, c^2\sigma_1^2). \tag{70}$$

Per fissare le idee: una $N(200, 2)$ e una $N(300, 3)$ hanno densità 2 campane gaussiane, e la $X + Y$ ha a sua volta una densità a campana gaussiana, ma centrata in 500. (Non ha affatto una densità somma delle 2 campane, con forma "a cammello", come si potrebbe ingenuamente ipotizzare: la densità della somma di 2 variabili aleatorie non è la somma delle densità). E con varianza 5. Si sommano le medie, e si sommano le varianze, e si conserva la gaussianità.

Nota 1. Il fatto che la somma di 2 variabili aleatorie normali sia una variabile aleatoria normale, è notevole. La somma di

2 variabili aleatorie uniformi continue, per esempio, in generale non è affatto una variabile aleatoria uniforme continua.

Nota 2. Rimarchiamo di nuovo che la densità della somma di 2 variabili aleatorie non è la somma delle densità delle 2 variabili aleatorie.

Nota 3. Anche la f.r. della somma di 2 variabili aleatorie non è la somma delle funzioni di ripartizione delle 2 variabili aleatorie.

48.2 Variabile aleatoria normale standard

(A causa delle (70)) la standardizzazione di una qualunque variabile aleatoria normale è una variabile aleatoria normale $N(0,1)$. Fra una v.a. normale Y e la sua standardizzazione X valgono le relazioni

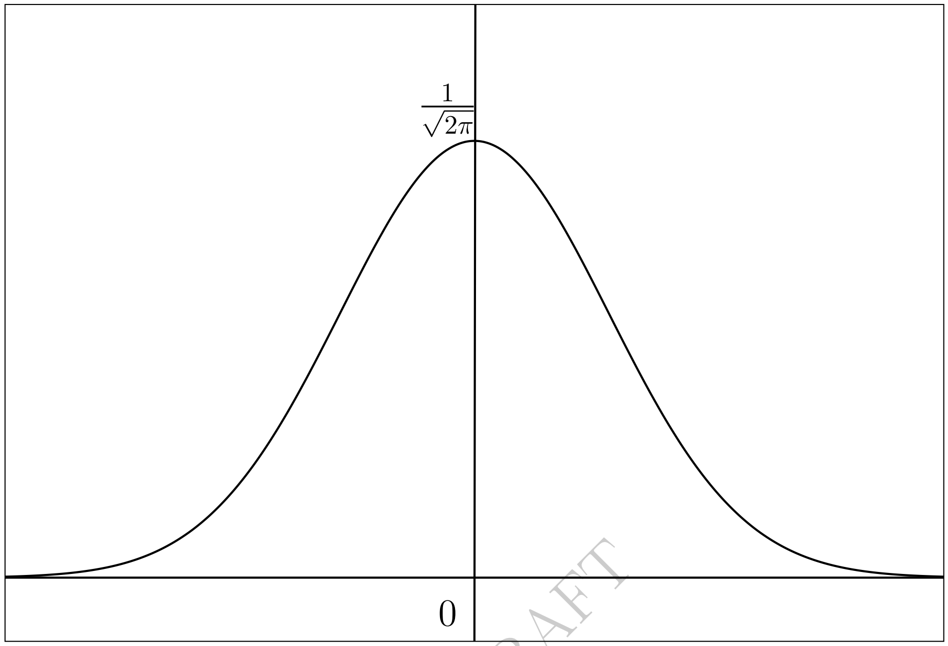
$$\boxed{\begin{array}{c} X \sim N(0,1) \; \textit{standardizzazione di} \; Y \sim N(\mu, \sigma^2) \\ \\ X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \qquad Y = \sigma X + \mu. \end{array}} \tag{71}$$

(Avendo media 0 e varianza 1, in base alla (69)) la variabile aleatoria normale standard ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} =: \phi(x)$$

(*densità normale standard*, denotata con $\phi(x)$).
Ha anche moda 0 e mediana 0 e skewness 0.

Il massimo è in 0 e vale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$. I punti di flesso sono in ± 1.



Nelle Scienze Applicate tradizionalmente si considera che valga "quasi 0" dopo 3 e prima di -3. Naturalmente non si azzera mai, ma la decrescenza a 0 è rapidissima: ha le *code leggere*.

La sua funzione di ripartizione si indica con $\Phi(x)$

$$\boxed{\Phi(x) \text{ f.r. normale standard}} \tag{72}$$

e si chiama *funzione di ripartizione normale standard*, in Inglese *(standard) normal cumulative distribution function*, e (per le (50) e (69)) è

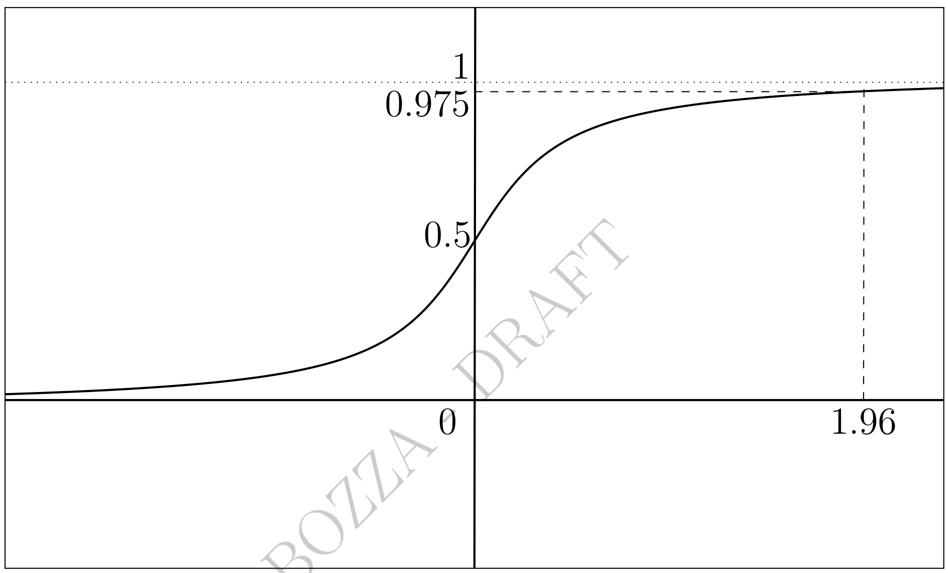
$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

e derivando, col Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale,

$$\boxed{\Phi'(x) = \phi(x)} \tag{73}$$

(corrispondentemente a (51)).

L'integrale che definisce questa *funzione speciale (dell'Analisi Matematica)* non può essere risolto in termini di funzioni elementari.
Valori numerici (approssimati) di $\Phi(x)$ si ottengono in vari modi che vedremo nella Lezione successiva.



48.3 Quantili normali

La funzione inversa di $\Phi(x)$ dà i quantili normali, molto importanti nella Statistica. Il quantile di ordine α si indica con ϕ_α:

$$\boxed{\phi_\alpha := \Phi^{-1}(\alpha)} \tag{74}$$

Il grafico della funzione ϕ_α ha dominio $]0, 1[$, in 0.5 vale (ovviamente) 0, tende a $-\infty$ in 0 e a $+\infty$ in 1.
Ovviamente quel grafico è il simmetrico di quello visto di $\Phi(x)$ rispetto alla bisettrice del I e II quadrante.
Si disegni quel grafico e su esso si trovi il punto $(0.975, \approx 1.96)$.

Si veda la figura nella prossima Lezione.

48.4 Scarti dalla media per v.a. normale

Se si sa che la variabile aleatoria X è normale si ottengono([114]) disuguaglianze, che ora vediamo, molto più stringenti di quelle ottenute con la Disuguaglianza di Cebyshev, valida per variabili aleatorie *qualunque*.

$$\boxed{\begin{gathered} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\[1em] P(|X-\mu| \le \sigma) \approx 68.3\% \\[1em] P(|X-\mu| \le 2\,\sigma) \approx 95.4\% \\[1em] P(|X-\mu| \le 3\,\sigma) \approx 99.7\% \\[1em] P(|X-\mu| \le 1.96\,\sigma) \approx 0.95 = 95\% \end{gathered}}$$

dove la quarta è una lieve modificazione della seconda per avere con più precisione 95%. Si faccia un disegno.

Per una normale standard diventano (semplificando i decimali)

[114]Si ha, per ogni $\delta > 0$,

$$P(|X-\mu| \le \delta) = P(|\sigma Y| \le \delta) = P(\sigma |Y| \le \delta) = P\Big(|Y| \le \frac{\delta}{\sigma}\Big)$$

e con facili calcoli si conclude

$$P(|X-\mu| \le m\,\sigma) = 2\,\Phi(m) - 1$$

e coi classici valori (che si trovano per esempio sulle tavole) si ottengono le approssimazioni.

$$\boxed{\begin{array}{rll} \text{Normale standard} & & Z \sim N(0,1) \\[1em] P(-1 \leq Z \leq 1) & \approx 68\% & \\[1em] P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) & \approx 95\% & (\text{o spesso } -2 \leq Z \leq 2) \qquad (\alpha) \\[1em] P(-3 \leq Z \leq 3) & \approx 99.7\% & \end{array}}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione. Compresa la (α) ovviamente.

Fermiamoci un momento!

Ha avuto ampio risalto sui media un articolo scientifico sull'invenzione di un nuovo tipo di test diagnostico del cancro, che si fa in meno di 10 minuti e non richiede un laboratorio – e allora potenzialmente potrà interessare le farmacie.
È stato pubblicato su una rivista scientifica di altissimo livello, Nature Communications.
Apprezziamo quante cose riusciamo a capire, con lo studio fatto finora, in questa figura dell'articolo: Link->

- le figure a campana

- le curve ROC

- l'AUC, area under the curve, usata per valutare la curva ROC ovvero la bontà del test diagnostico

- specificità, sensitività; e PPV (Positive Predictive Value) è quello che in questa trattazione è stato indicato VPP (Valore Predittivo Positivo, essenzialmente la predittività.

- i box [and wisker] plot – fatti nel modo semplice di questa trattazione:

> "In the box and whisker plots, the middle lines of the boxes represent the median (50th percentile) and the terminal line of the boxes represents the 25th to 75th percentile. The whiskers represent the lowest and the highest value"

- i bar chart

(I "peluzzi" sopra le colonne del bar chart, questione che non abbiamo trattato, si riferiscono alle deviazioni standard dei dataset di misurazioni).

49 Approssimazione di $\Phi(x)$ e ϕ_α

49.1 Grafici

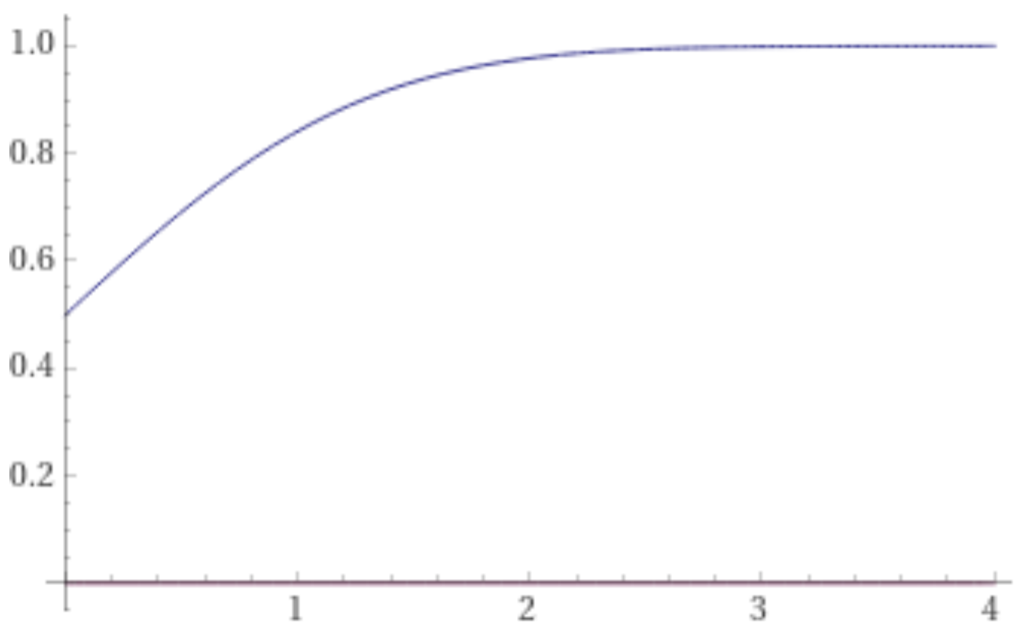


Figure 33: Funzione di ripartizione normale $\Phi(x)$. Naturalmente la funzione ha limite 0 in $-\infty$, ma il grafico della funzione è rappresentato solo per $x \geq 0$. (Screenshot da WolframAlpha).

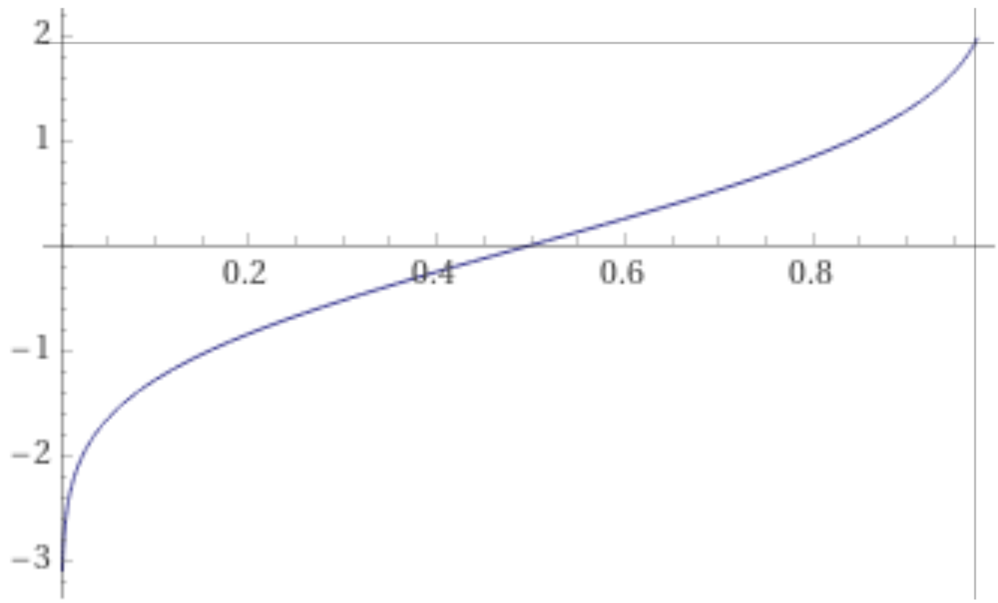


Figure 34: Funzione dei quantili normali ϕ_α. Naturalmente la funzione ha limite $-\infty$ in 0, e $+\infty$ in 1, ma il grafico della funzione è rappresentato solo fino a 0.975 ove essa vale ≈ 1.96. (Screenshot da WolframAlpha).

49.2 Approssimazioni

Valori numerici (approssimati) della funzione di ripartizione normale standard $\Phi(x)$ e dei quantili normali ϕ_α si ottengono:

(1) con quelle (rare) calcolatrici scientifiche che la implementano;

(2) online in www.wolframAlpha.com digitando

`CDF[NormalDistribution[0,1],`$_{\textit{valore di } x}$`]` per avere $\Phi(x)$,

`InverseCDF[NormalDistribution[0,1],`$_{\textit{valore di } \alpha}$`]` per avere ϕ_α;

(3) con molti software di manipolazione matematica, fra cui R e Maxima (gratuiti), e Mathematica$^{(R)}$;

(4) magari a memoria per alcuni pochi valori speciali, in particolare senz'altro l'ovvio $\phi_{0.5} = 0$ e

$$\boxed{\phi_{0.975} \approx 1.96} \tag{75}$$

e magari tutti questi:

x	$\Phi(x) = P(X \leq x)$	
0	0.5	il primo è ovvio per simmeteria
≈ 1.64	≈ 0.95	e il terzo vogliamo ricordarlo:
≈ 1.96	≈ 0.975	$\boldsymbol{\phi_{0.975} \approx 1.96}$ ovvero $\Phi(1.96) \approx 0.975$
≈ 2.58	≈ 0.995	e come sopra scriveremo gli altri.
$(+\infty)$	(1)	Quest'ultimo vale solo come limite.
ϕ_α	α	

(e si faccia attenzione che questi non sono i valori di $P(|X| < x)$);

(5) con le apposite tavole numeriche, che si trovano su internet cercando *normal table* o (e sono essenzialmente le stesse) *normal quantile table.*

(6) con apposite formule di approssimazione. Ne esistono molte decine, più o meno precise e più o meno semplici. Ne considereremo 3:
– questa semplicissima ma poco precisa, err. ass. < 0.04

$$\forall x \geq 0 \qquad \Phi(x) \approx \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{(3-x)^2}{12}} & x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

– quella di Shah (1985) di un esercizio seguente, err. ass < 0.006:

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\; 0 \leq x \leq 2.2 \\ 0.99 & se\; 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\; x \geq 2.6 \end{cases}$$

– questa più precisa[115] con err. ass. < 0.0002

$$\forall x \geq 0 \qquad \Phi(x) \approx 2\text{^}(-22\text{^}(1-41\text{^}(x/10)))$$

che ha un'inversa esprimibile con funzioni elementari che dà ovviamente i quantili normali.

Nota 1. Le prime 2 formule di approssimazione sono definite a tratti, sono poco precise ma hanno il vantaggio che si possono calcolare con le 4 operazioni e la radice quadrata. In particolare la prima, per un uso agevole della calcolatrice la si esprima così, in $[0,3]$:

$\sqrt{}$`((3-x)^2)·(-1)/12+1` *tutto sotto radice*

(Si calcola 3-x, si eleva al quadrato ovvero si moltiplica per se stesso, si moltiplica per -1, si divide per 12, si somma 1, si estrae la radice quadrata).

Nota 2. Sia le tavole numeriche che, di solito, le formule di approssimazione danno (approssimano)

$\Phi(x)$ solo per $x \geq 0$

ϕ_α solo per $\alpha \geq 0.5$

e per i valori di $x < 0$ e $\alpha < 0.5$ si usano le formula di simmetria

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)} \tag{76}$$

$$\boxed{\phi_{1-\alpha} = -\phi_\alpha} \tag{77}$$

(che seguono dalla parità della densità normale standard).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\approx$ % Per una variabile aleatoria normale standard X calcolare

$$P(-1.2 \leq X \leq 0.8)$$

---

[115] http://m-hikari.com/ams/ams-2014/ams-85-88-2014/epureAMS85-88-2014.pdf (A. Soranzo, E. Epure – 2014) Ecco la sua inversa (che si ottiene subito ricavando x, che è ϕ_α)

$$\forall \alpha \in [0, 0.5[\qquad \phi_\alpha \approx \frac{10}{\log 41} \log\Big(1 - \frac{\log((-\log\alpha)/\log 2)}{\log 22}\Big)$$

(che ha errori assoluto e relativo rispettivamente $|\varepsilon(\alpha)| < 5 \cdot 10^{-3}$ $\forall \alpha \in [0.5, 9925]$, $|\varepsilon_r(\alpha)| < 1\%$ $\forall \alpha \in [0.5, 0.99908]$);

usando questa classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\ 0 \le x \le 2.2 \\ 0.99 & se\ 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\ x \ge 2.6 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO è

$$P(-1.2 \le X \le 0.8) = P(X \le 0.8) - P(X < -1.2) =$$

trattandosi di densità continua le probabilità con $<$ e $\le$ sono uguali

$$= P(X \le 0.8) - P(X \le -1.2) =$$

per definizione di $\Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \Phi(-1.2) =$$

e con la forumla di simmetria $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$= \Phi(0.8) - \big(1 - \Phi(1.2)\big) =$$

$$= \Phi(0.8) - 1 + \Phi(1.2) =$$

e con l'approssimazione data

$$\approx \frac{0.8\,(4.4-0.8)}{10} + 0.5 - 1 + \Big(\frac{1.2\,(4.4-1.2)}{10} + 0.5\Big) =$$

$$= 0.788 - 1 + 0.884$$

e in definitiva (recuperando il simbolo $\approx$ da più sopra)

$$\boxed{\approx 0.672 = 67.2\%}$$

49.3 Variabile aleatoria log-normale

Se X è una variabile aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$ allora $Y := e^X$ si dice *log-normale* di parametri μ e σ^2, che però non sono rispettivamente media e varianza della nuova variabile aleatoria.
Inversamente, se Y è log-normale di parametri di parametri μ e σ^2, allora $X := \ln Y$ è $N(\mu, \sigma^2)$.

È evidente che mentre una v.a. normale può assumere qualunque valore reale, una v.a. log-normale può assumere solo valori positivi, data la corrispondenza $Y := \mathrm{e}^X$.
(E quelli proprio piccolissimi sono globalmente improbabili, proprio come per la v.a. normale sono improbabilissimi i valori grandissimamente negativi).

Consideriamo ora solo il caso $\mu = 0$ **e** $\sigma^2 = 1$:

$$\forall x > 0 \qquad F_{\mathrm{e}^X}(x) = P(\mathrm{e}^X \leq x) = P(X \leq \ln x) = F_X(\ln x)$$

e per i non positivi, considerando i 2 casi disgiunti $x = 0$ e $x < 0$

$$\forall x \leq 0 \qquad F_{\mathrm{e}^X}(x) = P(\mathrm{e}^X \leq x) = P(\mathrm{e}^X = x) + P(\mathrm{e}^X < x) = 0 + 0$$

e in definitiva

$$F_Y(x) = F_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & se \;\; x > 0 \\ 0 & se \;\; x \leq 0 \end{cases} .$$

Derivando troviamo la densità log-normale di parametri $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, ricordando che $\Phi'(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, e naturalmente (derivata della funzione composta) deriviamo anche ln:

$$\forall x > 0 \qquad f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \phi(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

trovandosi in definitiva la densità log-normale standard

$$\boxed{\text{densità log-norm. standard } f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} e^{-\frac{\ln^2 x}{2}} & se \;\; x > 0 \\ 0 & se \;\; x \leq 0 \end{cases}} \tag{78}$$

e con μ e σ^2 generici la

densità $Lognormal(\mu, \sigma^2)$
log-normale di parametri μ e σ^2

$$f_Y(x) = f_{\mathrm{e}^X}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma\, x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & se \;\; x > 0 \\ 0 & se \;\; x \leq 0 \end{cases} \tag{79}$$

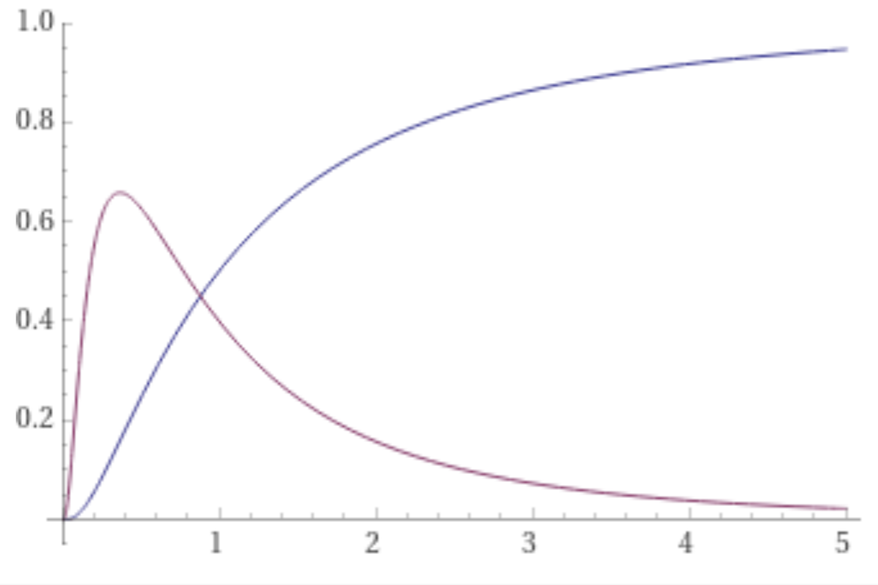


Figure 35: Densità log-normale standard e sua funzione di ripartizione

(Secondo alcuni Autori i parametri della $Lognormal(\mu, \sigma^2)$ sono μ e σ, secondo altri[116] sono μ e σ^2, e in questa trattazione seguiamo questo secondo standard, ma si faccia attenzione in particolare usando i vari software).

I 3 valori coincidenti per la normale, media moda e mediana, $E(X) = Mod(X)$ =mediana, tutti μ, hanno 3 destini diversi: per la log-normale $Y := \mathrm{e}^X$ la mediana e^μ, con $\mu = E(X)$:

$$P(Y \leq \mathrm{e}^\mu) = P(\mathrm{e}^X \leq \mathrm{e}^\mu) = P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \text{ per simmetria}$$

ma media e moda hanno espressioni diverse da e^μ.

Esercizio. Si faccia lo studio di funzione di (79). Quanto vale la funzione di ripartizione in -1, 0, $\mathrm{e}^{1.64}$, $\mathrm{e}^{2.58}$, 100?

[116] Si confrontino per esempio le Wikipedie italiana e in inglese.

49.4 Confronto fra normale e log-normale, e cigni neri

Si veda nella figura quanto possano assomigliarsi normale e log-normale nella regione intorno alla moda. Sono rappresentate $N(0.95, 0.24)$ e Lognormal$\left(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{16}\right)$.

Dati empirici, sperimentali, di una variabile aleatoria per sua natura X log-normale, potrebbe essere facile erroneamente ritenerli provenienti da una variabile aleatoria Y normale. Non cambierà molto nella regione intorno alla media, ma lontano da essa le *code destre* hanno comportamento diversissimo: le code log-normali sono molto più *pesanti*. Tantoché

$$P(X \geq 2) \approx 0.000\,607\,\%$$

$$P(Y \geq 2) \approx 0.28\,\%$$

circa 458 volte più probabile.

È – solo in parte – la questione dei *cigni neri*, eventi importanti erroneamente ritenuti quasi impossibili, e invece poi si verificano. Possono verificarsi per aver identificato come normale una distribuzione molto simile, non necessariamente log-normale, ma con almeno una coda molto più pesante. O facendo consimili errori. (Il concetto di cigno nero comunque è più ramificato).

Bisogna essere molto cauti nel ritenere normale il modello sottostante i dati empirici, che essendo limitati in numero non evidenziano i casi rarissimi – cosa preoccupante se si tratta di eventi avversi gravi a un medicinale. Se semplicemente lo riteniamo normale, magari confortati da qualche test statistico, e invece è solo quasi nomale, ma ha una coda (tipicamente destra ma può essere sinistra, o entrambe) molto più pesante della normale, finisce che eventi ritenuti tanto rari da non doversene preoccupare, invece poi tanto impossibili non sono.

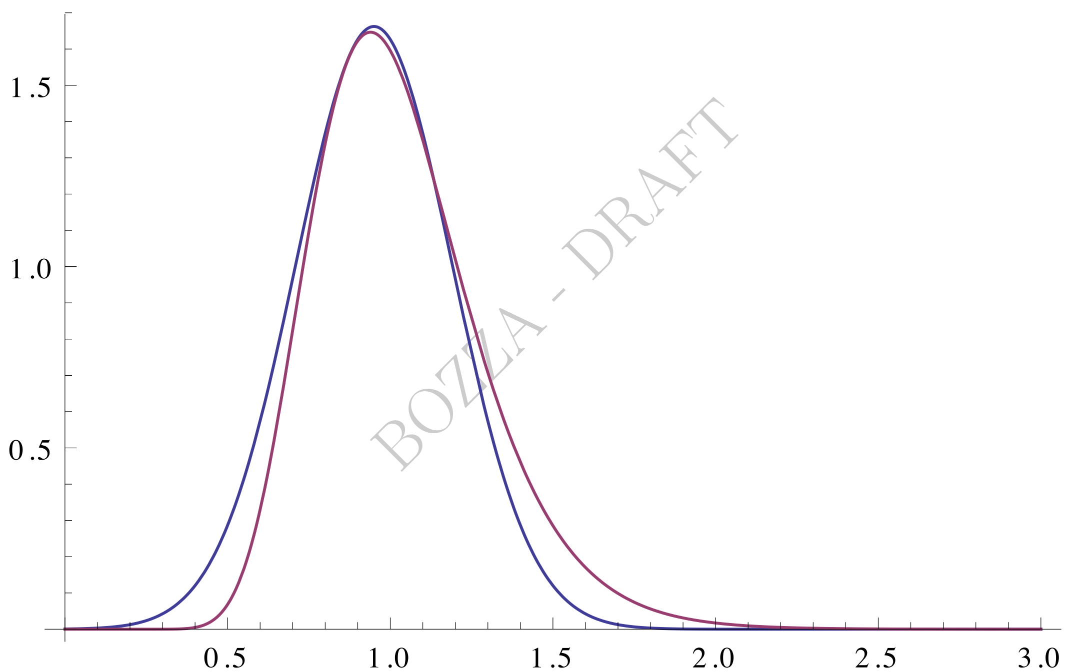


Figure 36: Una densità normale e una densità a log-normale

49.5 Distribuzione di Gompertz

Di Paolo Spada, su Pillole di Ottimismo, 2 dicembre 2020:

> La curva di Gompertz, la variante della funzione logistica più spesso citata come modello matematico dell'andamento epidemico, ha la classica forma a campana, ma con una certa asimmetria, sbilanciata verso sinistra, per cui la fase di discesa risulta complessivamente più lenta di quella di salita. Non ci dobbiamo quindi preoccupare se vediamo che il disegno di questa seconda ondata pare chiudersi meno velocemente di quel che vorremmo: è normale.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

50 Legge dei Grandi Numeri

50.1 Inquadramento euristico della situazione

Supponiamo di lanciare una moneta equilibrata un numero grandissimo di volte, e continuiamo a farlo, conteggiando il numero di teste e il numero di croci. Alcuni ingenui credono che i 2 numeri tendano a diventare sempre più simili, ma questo è falso: è impensabile che lanciando un milione di volte la moneta siano venute esattamente 500mila teste e 500mila croci, o 500 001 o anche 500 002 o simili. Anzi si potrebbe dimostrare che la differenza fra teste e croci tenderà in generale ad essere sempre più grande, non più piccola! Invece quello che tende a succedere è che le proporzioni di teste e di croci tenderanno ad uguagliarsi, tendendo entrambe ad $\frac{1}{2}$. Quello che possiamo effettivamente aspettarci dopo un milione di lanci è una situazione di questo tipo:

teste: 500 000 ± qualche centinaio: $\#teste = 500\,000 + r := n_0$
croci: 500 000 ∓ qualche centinaio: $\#croci = 500\,000 - r := n_1$
r: qualche centinaio in positivo o in negativo, p.es. 424 o -723
frazione di teste: $\frac{500\,000+r}{1\,000\,000} = \frac{1}{2} + \frac{r}{1\,000\,000} \approx 0.5$
frazione di croci: $\frac{500\,000-r}{1\,000\,000} = \frac{1}{2} - \frac{r}{1\,000\,000} \approx 0.5$.

Le *proporzioni empiriche* tendono ad uguagliarsi, non le quantità!
Questo diventerà ancora più evidente al crescere del numero di lanci, cioè l'approssimazione a 0.5 varrà con sempre più decimali, salvo casi sfortunatissimi, comunque sempre possibili.
Similmente avviene per qualunque p_1 fra 0 e 1 che sia la probabilità della testa della moneta (che se $p_1 \neq 0.5$ è non regolare): detto n il numero di lanci, e associato l'1 alla testa e 0 alla croce,

proporzione empirica di teste $\bar{p}_{n,1} = \frac{\#teste}{n} \to p_1$
proporzione empirica di croci $\bar{p}_{n,0} = \frac{\#croci}{n} \to p_0 := 1 - p_1$.

Similmente per un dado avremo 6 limiti $p_1,...,p_6$, cioè le proporzioni empiriche dei risultati tenderanno alle probabilità *vere* dei vari risultati, per esempio, per un dado regolare, sempre $\frac{1}{6}$:

$$\forall\, k \in \{1, ..., m\} \quad \bar{p}_{k,n} \to p_k = P(X = k) \tag{80}$$

e per il dado $m = 6$, e per una moneta invece $k \in \{0, 1\}$.
Questo tendere però non è quello deterministico, dei limiti delle successioni della matematica: seppure – come si può dimostrare – ha probabilità 0, rimane comunque possibile (!) che un dado *regolare* dia sempre 5, proprio *per sempre*, e allora in quel caso

$$\bar{p}_{5,n} = \frac{\#\, uscite\ del\ 5}{n} = \frac{n}{n} \equiv 1 \not\to \frac{1}{6} = P(X = 5) = p_5.$$

(Si noti però che questo evento possibile ha probabilità 0).

Esercizio. Ipotizzare e graficare le $\bar{p}_{k,n}$ per $n = 100$, $k = 1, ..., 6$.

50.2 Limite in probabilità e Legge dei Grandi Numeri

In quanto detto, resta non definito cosa si intende per il "tendere" ai numeri p_k, e si è ben detto che ci possono essere casi sfortunatissimi. Si tratta di un tendere probabilistico, non deterministico com'è quello dei limiti delle funzioni reali di variabile reale. Esso è precisato e inquadrato dal concetto di *convergenza in probabilità* di una successione di variabili aleatorie X_n, che definiamo senza insistervi particolarmente. Si immagini la X_n di cui parliamo come la proporzione empirica $\bar{p}_{1,n}$ di teste dopo n lanci, che, sì, è una variabile aleatoria, "prima" di fare i lanci. Il limite della convergenza in probabilità di una successione di variabili aleatorie è esso stesso in generale una variabile aleatoria; solo che nell'esempio prima considerato è la variabile aleatoria discreta

$$X := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = p$$

che vale 0.5 con probabilità 1. (Variabile aleatoria *costante*). Ma in generale il limite X di una convergenza in probabilità è proprio una variabile aleatoria con una funzione di ripartizione non banale, ed è una variabile aleatoria discreta o continua.

Definizione. Diremo che X_n converge in probabilità a X

$$X_n \to^P X \text{ se } \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \eta) = 0 \quad \forall\, \eta > 0 \tag{81}$$

(o indifferentemente con $> \eta$). (Ha un valore teorico, in questa trattazione elementare la useremo solo una volta fra poco: ci basta conoscerla e capirla).

Legge dei Grandi Numeri. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di ugual legge con speranza matematica μ e varianza σ^2. Allora per la *media empirica*

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

$$\text{è} \quad \forall\, \eta > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \eta) = 0$$

ovvero equivalentemente, **nelle ipotesi dette** (poco stringenti)

nelle ipotesi sopradette (poco stringenti)

$$\bar{X}_n \to^P \mu$$

ovvero:

la media empirica, sperimentale,

tende (in probabilità)

alla media "vera",

la speranza matematica (α)

Detto altrimenti: *sperabilmente* (qua è il senso probabilistico) troveremo *circa* la speranza matematica di una v.a. di densità sconosciuta – com'è in generale in Statistica, e nella pratica – facendo la media di *molti* valori tratti (indipendentemente, ovvio) da quella v.a. (Il senso del limite è nelle parole "circa" e "molti").

Con $X_h := 1$ per testa e 0 altrimenti per $h = 1, \ldots, n$, si riottiene il

primo caso considerato, con $\bar{X}_n$ la proporzione empirica $\bar{p}_{1,n}$.
Per una moneta regolare la frazione di teste tende in probabilità a $\frac{1}{2}$.
Per un dado regolare la frazione di risultati 3 tende in probabilità a $\frac{1}{6}$.

Possiamo fare i calcoli *esattamente*. La probabilità di k teste è

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

e ipotizzando una moneta regolare ($p = 1/2$, $p^k(1-p)^{n-k} = 2^{-n}$)

$$p_k = \binom{n}{k} 2^{-n}$$

e in particolare la probabilità i fare tante teste quante croci, che è 0 se n è dispari, per n pari è

$$\binom{n}{n/2} 2^{-n}$$

Con n piccolo è possibile fare facilmente il calcolo esatto, per esempio per $n \coloneqq 6$ la probabilità è $\frac{5}{16}$ e per $n \coloneqq 20$

$$\binom{20}{10} 2^{-20} \approx 0.176197 \quad \text{circa 1 su 6.}$$

L'esatto pareggio allora è alquanto improbabile[117] già con $n = 6$.

[117] La (82) con $n \coloneqq 20$ ci dà

$$10 - 2\sqrt{5} \le X \le 10 + 2\sqrt{5}$$

cioè

$$5.527... \le \mathit{numero\,di\,teste} \le 14.472...$$

ovvero

$$\mathit{numero\,di\,teste} = 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9 \vee 10 \vee 11 \vee 12 \vee 13 \vee 14$$

e questo evento ha probabilità

$$p_6 + \ldots + p_{14} = 2^{-20}\left(\binom{20}{6} + \ldots + \binom{20}{14}\right) =$$

$$= \frac{125647}{131072} \approx 0.959 = 95.9\%.$$

Prima si era detto *almeno* 75%, ora si trova *esattamente* 0.95.... (Ma questo calcolo per $n \coloneqq 1\,000\,000$ è improbo).

Consideriamo n lanci di moneta con probabilità $\frac{1}{2}$ di fare testa. Con la Disuguaglianza di Chebyshev si trova([118]) che con probabilità almeno del 75% il numero di teste verifica

$$\frac{n}{2} - \sqrt{n} \le X \le \frac{n}{2} + \sqrt{n}. \tag{82}$$

Allora con un milione di lanci, almeno al 75% il numero di teste sta fra 499 000 e 501 000.
Nella prossima Lezione vedremo che in effetti quella probabilità è > 95.4%, molto di più.
Si noti che effettivamente $\frac{501\,000}{1\,000\,000} \approx 0.5$, e similmente con 499 000.
Detto in altri termini

$$\frac{\frac{n}{2} \pm \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{2} \quad per \quad n \gg .$$

Ripetiamo che **si potrebbe dimostrare che la differenza fra teste e croci tenderà in generale ad essere sempre più grande, non più piccola!** Eppure, la proporzione tende al 50%. (Tende "in probabilità", ora sappiamo).

[118] Per lo studente interessato:

$$P(|X - E(X)| > c) \le \frac{Var(X)}{c^2} \qquad \forall\, c$$

equivale, con l'evento complementare, a

$$P(|X - E(X)| \le c) \ge 1 - \frac{Var(X)}{c^2}.$$

Se X è il contatore di teste (successi) in n lanci, allora $X \sim B(n,k)$. Essendo per la $B(n,k)$ la varianza $np(1-p)$ e la speranza matematica np, con la moneta regolare $n/4$ e $n/2$ rispettivamente,

$$P(|X - n/2| \le c) \ge 1 - \frac{n/4}{c^2}$$

e fissando $c := 2\sigma = 2\sqrt{Var B(n,k)} = 2\sqrt{n/4} = \sqrt{n}$

$$P(|X - n/2| \le \sqrt{n}) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}$$

cioè

$$P\Big((\Big|X - \frac{n}{2}\Big| \le \sqrt{n}\Big) \ge \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

e ricordando che $|f(x)| \le g(x)$ equivale a $-g(x) \le f(x) \le g(x)$ si trova la (82).

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (80), (81), (α) oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

51 Approssimazione Normale

Oltre alla convergenza in probabilità già vista, esistono altri tipi di convergenza per successioni di variabili aleatorie e in questa trattazione se ne considererà una che ora vediamo.

51.1 Convergenza in legge

Definizione. Diremo che X_n **converge in legge** a X

$$X_n \to^L X \text{ se } \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \tag{83}$$

(con ovvio significato dei simboli) per ogni punto x in cui $F_X(x)$ è continua. (Ha un valore teorico, non la useremo realmente in questa trattazione elementare: ci basta conoscerla e capirla).

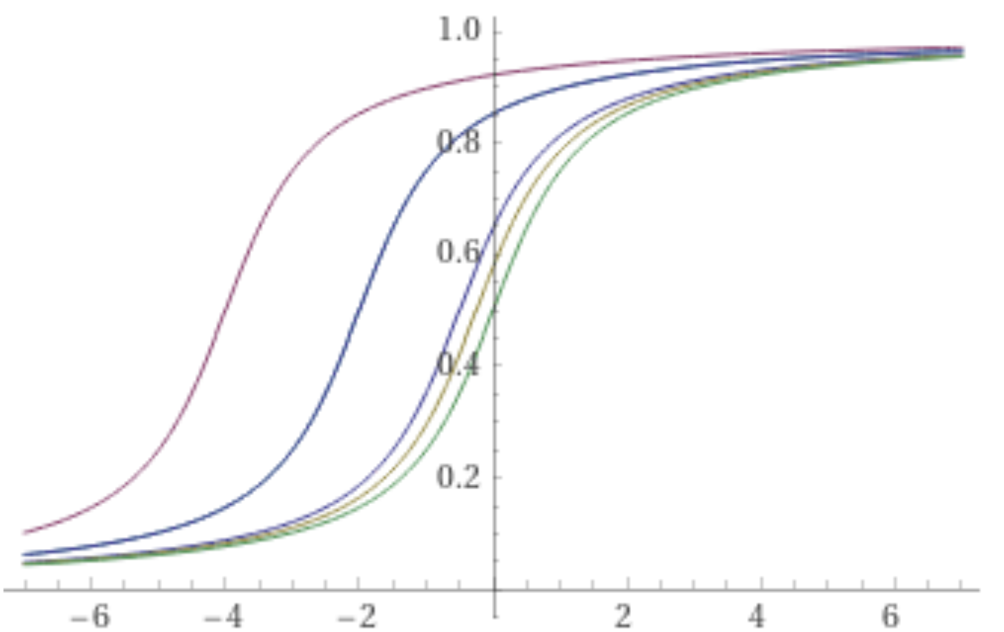


Figure 37: Verde: funzione di ripartizione di una certa v.a. X; altri colori, da sinistra verso destra: funzioni di ripartizione di X_1, X_2, X_3, X_4; non sono rappresentati gli infiniti grafici delle funzioni di ripartizione di X_5, X_6... ma li si immagini sempre più prossimi alla curva in verde, realizzando la convergenza in legge di X_n a X. Screenshot da WolframAlpha.

In sostanza la convergenza in legge corrisponde alla convergenza delle f.r. di X_n alla f.r. di X.

Si noti che le X_n possono essere discrete anche se X è continua. (Si immaginino curve a gradino, coi gradini sempre più piccoli, "fino a tendere" a un grafico liscio).

Rimarchiamo che la convergenza avviene per ogni x fissato (e in effetti neanche in tutti gli x è richiesta ma solo in quelli in cui la funzione di ripartizione $F_X(x)$ di X è continua) e quindi nella figura 37 la convergenza avviene per così dire dall'alto verso il basso e non da sinistra verso destra come magari potrebbe apparire.

51.2 Teorema Limite Centrale

Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti (discrete o continue) di ugual legge con speranza matematica μ e varianza σ^2. Allora la standardizzazione della somma delle prime n tende in legge ad una normale standard. Ciò si esprime in base alla (83) con una formula[119] non semplicissima di valore teorico. Da un punto di vista più applicativo, per le variabili aleatorie ora considerate vale allora l'

Approssimazione Normale

$$P\Big(X_1 + \ldots + X_n \le x\Big) \approx \Phi\Big(\frac{x-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) \tag{84}$$

qua sopra e qua sotto le condizioni da sapere

e tradizionalmente questa approssimazione si ritiene sufficientemente buona per $n \ge 30$ (secondo altri Autori $n \ge 50$) in questi

[119] Per il lettore interessato questa è la formula:

$$\exists\, X \sim N(0,1) \qquad S_n^* := \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\,\mu}{\sigma\,\sqrt{n}} \to^L X$$

casi:

* se le $X_k \sim B(m,p)$ con $m\,p \geq 5$ e $m\,(1-p) \geq 5$

* per tutte le altre distribuzioni degli esercizi scolastici e anche di questa trattazione, e spessissimo anche della pratica.

Osservazione. Allora, la forma a campana e in particolare la variabile aleatoria normale standard è una sorta di "attrattore" per le variabili aleatorie, perché anche se ne sono alquanto diverse, la loro somma standardizzata, a certe condizioni sopra dette, tende proprio alla $N(0,1)$, in legge.

Teorema. La convergenza in probabilità implica quella in legge.

51.3 Sul naturale formarsi delle campane

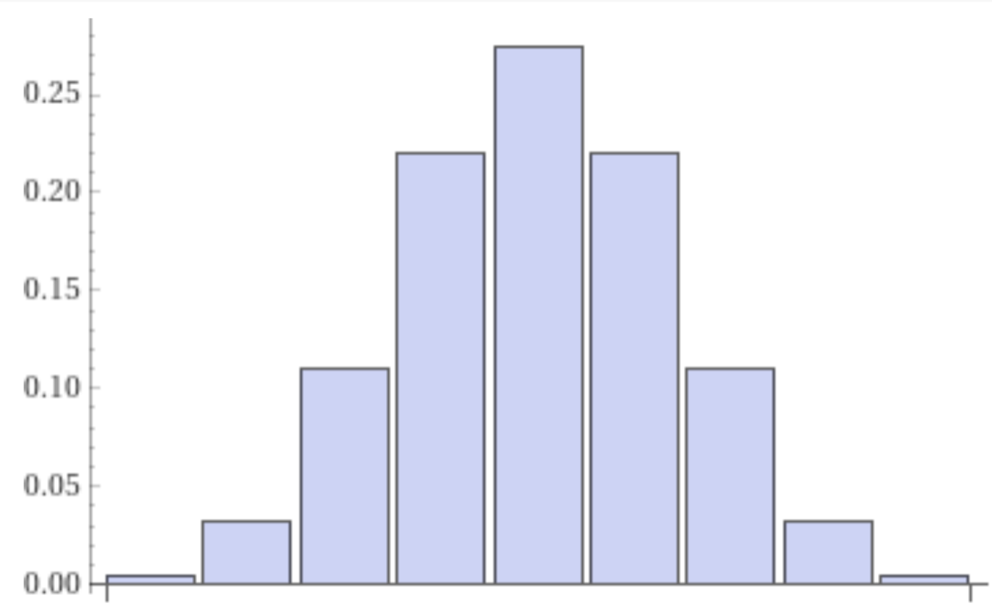


Figure 38: Densità binomiale $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$. I possibili valori della variabile aleatoria sono 0,...,8 e il più probabile è 4. Screenshot da WolframAlpha.

Che una variabile aleatoria somma di tante "copie" indipendenti di una stessa variabile aleatoria, per esempio il punteggio totale di 2 lanci di moneta con facce 0 e 1, poi di 3 lanci, poi di 4, eccetera, tenda *spesso* (non sempre: ci sono ben le ipotesi, certamente valide per la moneta) a produrre le forme a campana, è evidente già dalla densità binomiale, che appunto valuta la probabilità di k successi in n prove indipendenti, ovvero, detto altrimenti, è la densità della v.a. che somma gli uni delle teste di n lanci (avendo posto croce=0). Si veda la soprastante figura.

Si noti che la forma è sì a campana, ma lontanissima da quella della densità normale standard, che è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, mentre qua abbiamo una simmeteria intorno all'asse verticale $n = 4$. Questo è dovuto al fatto che non si è fatta la standardizzazione della somma, che avrebbe fra l'altro comportato proprio sottrarre 4, che è $n\,\mu$, alla somma (si veda la formula in nota nel paragrafo sul Teorema Limite Centrale).

Esempio. Calcoleremo la probabilità di ottenere più di 28 teste in 50 lanci di moneta equilibrata.
I risultati X_k hanno legge $B(1, \frac{1}{2})$, con speranza matematica $\mu = \frac{1}{2}$ e varianza $\sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, allora $\sigma = \frac{1}{2}$, e allora

$$P\Big(X_1 + \ldots + X_{50} > 28\Big) = 1 - P\Big(X_1 + \ldots + X_{50} \leq 28\Big) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\Big(\frac{28 - 50 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{50}}\Big) \approx 1 - \Phi(0.849) \approx 1 - 0.802 \approx 0.2 = 20\%.$$

La classica approssimazione (Shah 1985)

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{x\,(4.4-x)}{10} + 0.5 & se\, 0 \leq x \leq 2.2 \\ 0.99 & se\, 2.2 < x < 2.6 \\ 1 & se\, x \geq 2.6 \end{cases}$$

in 0.849 darebbe 0.801 invece del più preciso 0.802 che troviamo con Wolframalpha. Ma per il risultato finale ragionevolmente espresso da 20% non cambia nulla.

ESERCIZIO$_\mu$
Calcolare con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con 1 000 000 di lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra 499 000 e 501 000 compresi.

SVOLGIMENTO
Per il contatore di teste

$$X_1 + .. + X_{1\,000\,000}$$

cerchiamo

$$\begin{aligned} q &= P(499\,000 \le X \le 501\,000) = \\ &= P(X \le 501\,000) - P(X < 499\,000) = \\ &= P(X \le 501\,000) - P(X \le 498\,999) \end{aligned} \tag{85}$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di 1 000 000 di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$\begin{aligned} &P(X_1 + ... + X_{1\,000\,000} \le x) \approx \\ &\approx \Phi\Big(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Phi\Big(\frac{x - 1\,000\,000\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{1\,000\,000}}\Big) = \\ &= \Phi\Big(\frac{x - 500\,000}{500}\Big) \end{aligned}$$

e applicandola alla (86) la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} q &= \Phi\Big(\frac{501\,000 - 500\,000}{500}\Big) - \Phi\Big(\frac{498\,999 - 500\,000}{500}\Big) = \\ &= \Phi\Big(\frac{1\,000}{500}\Big) - \Phi\Big(\frac{-1\,001}{500}\Big) \approx \\ &\approx \Phi(2) - \Phi(-2) = \end{aligned}$$

e con la formula di simmetria

$$\Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\,\Phi(2) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_{0.975} \approx 1.96 \approx 2$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 = 0.95 = 95\%$$

51.4 Lo scarto di una radice quadrata dalla metà

Calcolaeremo con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con $n \geq 100$ lanci di moneta [regolare] un numero di teste compreso fra $\frac{n}{2}-\sqrt{n}$ e $\frac{n}{2}+\sqrt{n}$ compresi. Per semplicità di calcolo ipotizzeremo n quadrato perfetto pari.

Per il contatore di teste

$$X := X_1 + .. + X_n$$

cerchiamo

$$\begin{aligned} q &= P(n/2 - \sqrt{n} \leq X \leq n/2 + \sqrt{n}) = \\ &= P(X \leq n/2 + \sqrt{n}) - P(X \leq n/2 - \sqrt{n} - 1) \end{aligned} \tag{86}$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di n di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$\begin{gathered} P(X_1 + ... + X_n \leq x) \approx \\ \approx \Phi\Big(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Phi\Big(\frac{x - n\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) = \\ = \Phi\Big(\frac{x - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) \end{gathered}$$

e applicandola alla (86) la probabilità cercata è

$$\begin{gathered} q = \Phi\Big(\frac{n/2 + \sqrt{n} - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{n/2 - \sqrt{n} - 1 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) = \\ = \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{-\sqrt{n} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) = \\ = \Phi(2) - \Phi\left(-2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \end{gathered}$$

per la formula di simmetria

$$= \Phi(2) - 1 + \Phi\left(2 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \star$$

ed eliminando senza qua voler approfondire il minuscolo $\frac{2}{\sqrt{n}}$ (minuscolo perchè $n \geq 100$)

$$= \Phi(2) - 1 + \Phi(2) =$$

$$= 2\,\Phi(2) - 1 \approx$$

e ricordando la $\phi_{0.975} \approx 1.96 \approx 2$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 = 0.95 = 95\%$$

Volendo fare il calcolo con più precisione, riprendendo da $\star$ (usando la $f(x+h) \approx f(x) + h\,f'(x)$ valida per piccolo h)

$$\star \quad = \Phi(2) - 1 + \Phi(2) + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$= 2\,\Phi(2) - 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$\approx 2 \cdot 0.975 - 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

$$= 0.95 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,\Phi'(2) =$$

che è più del 95%.

51.5 Gettare un occhio sulla Statistica Inferenziale

L'esempio precedente, che possiamo riassumere dicendo che c'è circa il 5% di probabilità che lanciando una moneta regolare il numero di teste disti dalla metà del numero dei lanci più della radice quadrata del numero dei lanci, ci consente una spettacolare anticipazione del nucleo fondantale della Statistica Inferenziale.

Durante una guerra viene costruito per 20mila prigionieri un campo di detenzione che ha due ali con ugual numero di detenuti: in una i detenuti bevono l'acqua di un pozzo, e nell'altra ala l'acqua di un altro pozzo. Non c'è nessun problema etico e nessuna malevolenza nel dare l'acqua dei due diversi pozzi nelle due ali; questo è quello che si chiama un *esperimento naturale*, che si forma da sè. Ad un certo punto sono ormai morti metà dei prigionieri, e nello stesso giorno gli altri vengono liberati e un tecnico del personale analizza l'acqua dei due pozzi e scopre che in uno c'è molto nickel, o qualunque altra sostanza, ma diciamo nickel per fissare le idee, e nell'altro non c'è (in nessuna misura rilevabile). A questo punto il medico del campo ipotizza che il nickel possa influire significativamente sulla sopravvivenza ovvero la mortalità, seppure non sa se favorevolmente o sfavorevolmente. Scopre che 5050 sono morti in un'ala e 4950 nell'altra, e uno potrebbe dire che sì, c'è un forte indizio che il nickel abbia influenzato la sopravvivenza ovvero la mortalità. Questa sarebbe stata la logica conclusione di uno studioso dei secoli passati. Invece la moderna Statistica Inferenziale dice che no, il risultato non è *statisticamente significativo*. Lo scarto di 50 da 5000 è troppo piccolo. Cè una probabilità circa del 5% che il valore cada fuori di $[4900, 5100]$, e ben maggiore del 5% che cada fuori di $4951, 5049$, com'è successo, anche se è $\frac{1}{2}$ la probabilità che ogni singolo deceduto provenisse da una delle due ali del campo.

La moderna Statistica Medica viene fatta in generale proprio così, "al 95%" (di *confidenza*, come si dirà).

Esempio ulteriore: scarto di mezza radice quadrata.

Calcoleremo con l'approssimazione normale la probabilità di ottenere con $n \geq 100$ di lanci di moneta (regolare) un numero di teste compreso fra $\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}$ e $\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2}$ compresi. Per semplicità di calcolo si ipotizzeremo n quadrato perfetto pari.

Per il contatore di teste

$$X_1 + .. + X_n$$

cerchiamo

$$\begin{aligned} q &= P(n/2 - \sqrt{n}/2 \le X \le n/2 + \sqrt{n}/2) = \\ &= P(X \le n/2 + \sqrt{n}/2) - P(X \le n/2 - \sqrt{n}/2 - 1) \end{aligned} \tag{87}$$

Il sopradetto contatore di teste è somma di n di variabili aleatorie indipendenti $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ciascuna con media e varianza

$$\mu = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

e allora

$$\begin{aligned} &P(X_1 + \ldots + X_n \le x) \approx \\ &\approx \Phi\Big(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = \Phi\Big(\frac{x - n\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) = \\ &= \Phi\Big(\frac{x - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) \end{aligned}$$

e applicandola alla (87) la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} q &= \Phi\Big(\frac{n/2 + \sqrt{n}/2 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{n/2 - \sqrt{n}/2 - 1 - n/2}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) = \\ &= \Phi\Big(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{n} - 1}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\Big) = \\ &= \Phi(1) - \Phi\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \end{aligned}$$

per la formula di simmetria

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) =$$

ed eliminando senza qua voler approfondire il minuscolo $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(1) =$$

$$= 2\,\Phi(1) - 1 \approx$$

e ricordando la $\Phi(1) \approx 0.84$

$$\approx 2 \cdot 0.84 - 1 = 0.68 = 68\%$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (83), (84), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

52 Note finali sul Calcolo delle Probabilità

52.1 Esiste la probabilità?

La posizione epistemologica della probabilità è non banale.

Esempio 1.
Alessio e Berto sono due gemelli identici, maschi, italiani. Alessio legge che l'1% dei maschi europei hanno un certo gene. Essendo maschio europeo ritiene di avere l'1% di probabilità di avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). Berto legge che il 10% degli italiani hanno quello stesso gene. Essendo italiano ritiene di avere il 10% di probabilità di avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). La cosa sorprendente è che essendo gemelli identici, entrambi hanno il gene, oppure non ce l'hanno.

Chissà qual è la probabilità che abbiano quel gene...

Si noti che a seconda che si consideri il soggetto come italiano, o maschio europeo, si hanno valori diversi per la – sfuggente – *probabilità di avere quel gene.*

La valutazione (numerica) della probabilità dipende da ciò che si sa del soggetto, non è qualcosa di associato inesorabilmente al soggetto stesso – quel qualcosa <u>non esiste</u>.

Quel qualcosa non esiste!

Nota. Eppure molte persono leggono statistiche di quel genere, e *realmente* pensano che riguardino *loro stessi*, come se le malattie colpissero *a caso*, come una lotteria – che quella sì non guarda in faccia nessuno – senza relazione con la condizione economico-sociale, lo stile di vita e le dinamiche esistenziali pregresse, l'età, il genere, eccetera eccetera. (Fino a giungere al *singolo caso*).

(E l'alcol e il fumo e le droghe leggere e le droghe pesanti...)

(Per fissare le idee si consideri quanto il covid grave è correlato statisticamente all'obesità e alla carenza di vitamina D, prima di autocalcolarsi le pseudo-probabilità di morire di covid così, per caso, tipo lotteria, basandosi su statistiche generiche del tipo "2 contagiati su 100 muoiono", o anche più dettagliate, per regioni, o per sesso, o per età; si ripensi anche ad Alessio e Berto dell'esempio).

Una malattia infantile risulta mortale in, diciamo, 1 caso su n? L'agiato lettore farebbe bene riflettere con *quali* sventurati fa la media un suo eventuale figliolo. Figli di poveri tossicodipendenti che raccolgono da terra siringhe sporche di sangue, e le utilizzano. Bambini denutriti per povertà, anche estrema, con spaventose carenze nutrizionali. Che poi magari quella statistica è fatta a livello europeo, e comprende *milioni* di Rom in Romania, in condizioni di disagio estremo. O bambini non poverissimi ma comunque non curati a bene: si cerchi in rete, della bimba morta *di fame* a Milano, e i genitori il giorno dopo avrebbero comprato un'automobile...

La fortuna è cieca ma la sfortuna ci vede benissimo

(e "sa" ove colpire più probabilmente).

52.2 Ma alla fine la probabilità verrà considerata?

Si potrebbe ipotizzare che con una conoscenza esatta dei possibili benefici ovvero danni e delle loro probabilità, l'umanità nel suo

complesso e magari pure i singoli, farebbero le scelte giuste, più razionali, tali da massimizzare la speranza matematica del vantaggio.
A parte le difficoltà nel realizzare con tale precisione le ipotesi, anche se sono verificate l'essere umano si comporta ben diversamente. Leggiamo per esempio a proposito del premio Nobel Kahneman e di un suo collaboratore:

> Attraverso numerosi esperimenti di psicologia cognitiva, infatti, Kahneman e Tversky dimostrarono come le scelte degli esseri umani violassero sistematicamente i principi della razionalità economica([120])

Le persone col pallino della razionalità, poche, non giocano mica alle lotterie, in cui la speranza matematica è negativa ovvero in perdita, ma quasi tutta l'umanità, invece, ci gioca. E similmente avviene praticamente per tutto: le scelte umane sono probabilisticamente irrazionali.

52.3 ...Forse sì, ma dalle intelligenze artificiali

Altra questione è quella dell'incipiente ingresso nel nostro mondo delle intelligenze artificiali: il freddo calcolo probabilistico che necessariamente faranno le automobili a guida automatica è diverso dalle attuali scelte operative umane.
Se

non facendo nulla, un carrello fra poco ucciderà 10 persone con probabilità stimata del 90%

ma facendo una cosa, per esempio azionando una leva, una persona può farne morire 1 sola, altra,

nessuna persona ragionevole farà quella cosa, e lascerà gli eventi al loro corso. Un'intelligenza artificiale invece proprio farà quella cosa, perché la speranza matematica è più favorevole:

nel primo caso, speranza matematica -9 (cioè 9 vite umane in meno)

[120] Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Teoria del prospetto*.

nel secondo caso, speranza matematica -1. Che è meglio di -9.

Naturalmente ci si prospetta un mondo dove le intelligenze artificiali guideranno non solo le automobili, ma praticamente tutti i sistemi. Compreso il sistema sanitario, facendo eventulamente scelte razionalistiche, umanamente folli, se non controlleremo bene il processo.
Attualmente la Legge ancora distingue il corretto modo di operare adatto agli uomini da quello per le cose e gli animali.
A questo proposito si osservi che sopprimere una persona sana ed espiantarne 5 organi vitali può salvare 5 persone da morte imminente certa al lieve prezzo di 1 sola vita umana: un vantaggio enorme. Una terapia molto efficace, un sistema sanitario efficientissimo. Che è esattamente quello che ogni persona normale farebbe se avesse un allevamento di, poniamo, visoni, rimasto momentaneamente senza mangime: se questo può salvare 5 di ogni 6 capi dell'allevamento, senz'altro daremmo da mangiare un sesto dei visoni agli altri cinque sesti.
Eppure (per fortuna, secondo lo scrivente) con le persone è ancora illegale quell'espianto d'organi. Anzi addirittura non è nemmeno obbligatoria la donazione di rene, pur non letale, al fratello/sorella gemello omozigote, morente, magari con altissima probabilità di successo terapeutico.
Proprio l'attuale covidizzazione della società ha messo in luce questa incipiente zootecnizzazione della società umana.
Questo tipo di argomentazioni basate sulla speranza matematica può portare molto lontano se non verrà fermato.

La leggenda del Sedicente Santo Probabilista

Che un dì mentre mangiava un paninozzo, incontrò languenti a terra una donna poverella, il suo marito poverello, e il loro figlio poverello, tutti ormai allo stremo morenti di fame, che lo supplicarono un pezzo di paninozzo. Ei disse "Nol do, chè io cognosco le cose del Mondo, e la Matematica Speranza, e s'io or per certo vi salvo, voi probabilmente prolificherete un altro pargoletto, e non n'abbian poi a morir di fame quattro infelici invecechè tre. Men vo, scevro da tal colpa & libero da tal responsabilità, leggero come vapor sulfureo."

52.4 Il Calcolo delle Probabilità è controintuitivo

Già abbiamo visto il sorprendente fatto dell'aspettativa di vita residua, che sempre "si crea" davanti al robottino considerato in (42.6): gli restano in media da vivere sempre 72 anni. E sarebbe anche possibile fare regole diverse per ll suo spegnimento, fissandole *prima di avviarlo*, in modo che, se sopravvive al primo anno, gliene aspettano da vivere mediamente perfino più di 71, anche 100 o un milione.

Similmente è sempre uguale il numero di estrazioni del lotto da aspettare mediamente per avere una certa combinazione qualunque, indipendentemente dai "ritardi" tanto seguiti da certuni.
Per esempio sempre 18 estrazioni, per il numero singolo, su una determinata ruota.

Abbiamo anche visto il fenomeno del *cigno nero*.

Paradosso del compleanno

> Il paradosso afferma che la probabilità che almeno due persone in un gruppo compiano gli anni lo stesso giorno è largamente superiore a quanto potrebbe dire l'intuito: infatti già in un gruppo di 23 persone la probabilità è circa 0,51 (51%); con 30 persone essa supera 0,70 (70%), con 50 persone tocca addirittura 0,97 (97%), anche se per arrivare all'evento certo occorre considerare un gruppo di almeno 366 persone (367 se si considera l'anno bisestile).[121]

Il Problema di Monty Hall

[121] Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Paradosso del compleanno*

• Dietro ciascuna di tre porte c'è un'automobile o una capra (due capre, un'automobile in tutto); la probabilità che l'automobile si trovi dietro una data porta è identica per tutte le porte;

• Il giocatore sceglie una delle porte; il suo contenuto non è rivelato;

• Il conduttore sa ciò che si nasconde dietro ciascuna porta;

• Il conduttore deve aprire una delle porte non selezionate, e deve offrire al giocatore la possibilità di cambiare la sua scelta;

• Il conduttore aprirà sempre una porta che nasconde una capra;

  • Cioè, se il giocatore ha scelto una porta che nasconde una capra, il conduttore aprirà la porta che nasconde l'altra capra;

  • Se invece il giocatore ha scelto la porta che nasconde l'automobile, il conduttore sceglie a caso una delle due porte rimanenti;

• Il conduttore offre al giocatore la possibilità di reclamare ciò che si trova dietro la porta che ha scelto originalmente, o di cambiare, reclamando ciò che si trova dietro la porta rimasta.

Le possibilità di vittoria aumentano per il giocatore se cambia la propria scelta?
(...) La risposta è sì; le probabilità di trovare l'automobile raddoppiano. ([122])

[122]Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Problema di Monty Hall*; che continua: "(...) L'obiezione più comune alla soluzione è fornita dall'idea che, per varie ragioni, il passato possa essere ignorato quando si valutano delle probabilità. Dunque, la scelta della prima porta e il ragionamento del conduttore circa quale porta aprire si possono trascurare; dal momento che si può scegliere tra due porte, la probabilità di scegliere quella giusta dovrebbe essere pari al 50%, indipendentemente che si decida di cambiare o mantenere la porta scelta."

Esistono molti paradossi del Calcolo delle Probabilità.
Alcuni mostrano quanto esso sia controintuitivo, come sopra.
Altri mostrano quanto sia problematica la definizione stessa di probabilità. LINK->

Il seguente esercizio ci mostra invece un fatto sorprendente.

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
$\ast \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità $\frac{1}{n}$, con n un numero che per adesso non specifichiamo. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probabilità c'è che andando n volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso, per n molto grande, diciamo pure per n tendente all'infinito?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{punto al 1-esimo viaggio}) = \ldots = P(\text{punto all'}n\text{-esimo viaggio}) = \frac{1}{n}$$

Evento complementare:

$$P(\text{non punto al 1-esimo viaggio}) = \ldots = P(\text{non punto all'}n\text{-esimo viaggio}) = 1 - \frac{1}{n}$$

Evento composto:

$$P(\text{mai punto negli } n \text{ viaggi}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \quad (n\,volte)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Evento complementare:

$$P(\text{punto almeno 1 volta negli } n \text{ viaggi}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

e allora al limite per n tendente all'infinito

$$P(\text{punto almeno 1 volta negli } n \text{ viaggi con } n \text{ grandissimo}) \approx$$

$$\approx \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

e ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

e allora in conclusionela probabilità cercata vale

$$\boxed{1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.632 = 63.2\%}$$

(Per esempio con $n = 10$ si ha $\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 0.651$).
Detto molto grossolanamente: se facendo una cosa si prende una malattia con probabilità $\frac{1}{n}$, facendo quella cosa n volte si prende la malattia con probabilità circa del 63%, supponendo l'indipendenza degli eventi ed n molto grande.
Si noti la sorprendente (quasi) indipendenza dal numero n.

Un'analoga (quasi) indipendenza l'abbiamo vista con le dismutazioni.

52.5 Conclusioni

Nel mondo perfetto e pulito di monete e dadi e giochi d'azzardo (com'è il Problema di Monty Hall), si presentano fenomeni controintuitivi, ma almeno chiari.

Alcuni esempi visti ci mostrano come sia sottile la questione dell'esistenza stessa di una probabilità in senso oggettivo e univoco – ed esistono esempi molto più sottili.

Nella realtà del mondo ordinario, storico, complessissimo, vi è

come una ricorrente tentazione di applicare verso il futuro le frequenze empiriche rilevate, cioè di dare alla probabilità frequentista un valore predittivo su sistemi non isolati come invece sono i dadi e le monete, per quanto eventualmente non regolari (se sono regolari la probabilità frequentista non serve, ci basta quella classica).
Questo potrà ancora funzionare abbastanza bene per singoli sistemi biologici (una gravidanza umana probabilmente durerà circa 9 mesi, come risulta abbia sempre fatto), **in particolare sull'effetto dei farmaci** (che tende – almeno in parte – a riprodursi nel tempo nei vari soggetti trattati) ma, nei fatti, diventa largamente illusorio per la Storia umana nel suo complesso. Uno stratega militare del passato disse che "le previsioni a tre mesi valgono zero". (Comunque, in tempo di pace le situazioni sono più stabili che in tempo di guerra).
Venendo a tempi più recenti, il Nobel per l'Economia Paul Samuelson ci ricorda che

> The stock market has forecast nine of the last five recessions([123])

Le previsioni sul futuro delle farmacie in Italia e del loro mercato, sono molto aleatorie. Chi l'avrebbe mi detto qualche decina d'anni fa, che entrando in una farmacia si sarebbero visti foulard, profumatori d'ambiente, pupazzetti di Babbo Natale, eccetera!

Definitivamente,

> Prediction is very difficult, especially about the future.

[123] In https://en.wikiquote.org/wiki/Paul_Samuelson

Esercizio risolto$_L$ Tre urne A, B e C contengono palline bianche e nere secondo lo schema

$$A : 2b + 2n \qquad B : 3b + 1n \qquad C : 1b + 3n.$$

Si estrae una pallina da A e si vede il colore:
• se è bianca la si mette in C e poi si estrae una pallina da C e la si mette in A;
• se è nera la si mette in B e poi si estrae una pallina da B e la si mette in A.
Qual è la probabilità di ripristinare la situazione iniziale?
Quali altri casi si possono avere e con quali probabilità?

come all'inizio

2/5 ↗○ A ○○●● B ○○○● C ○●●●

C ○○●●●

3/5 ↘● A ○●●● B ○○○● C ○○●●

nuovo caso I

B ○○○●

B ○○○● 1/2 ↗○ A ○●●

A ○○●●

C ○●●● 1/2 ↘● A ○○●

nuovo caso II

3/5 ↗○ A ○○○● B ○○●● C ○●●●

B ○○○●●

2/5 ↘● A ○○●● B ○○○● C ○●●●

come all'inizio

C ○●●●

Ripristino della soluzione iniziale: può avvenire in 2 modi, eventi disgiunti; ciascuno dei 2 addendi è un prodotto perché corrispende ad eventi composti (cioè $\cap$ ovvero *et*) indipendenti; probabilità: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$.
Nuovi casi e loro probabilità, valendo le osservazioni soprastanti:
I: $(A : 1b + 3n;\ B : 3b + 1n;\ C : 2b + 2n)$, $p' = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$,
II $(A : 3b + 1n;\ B : 2b + 2n;\ C : 1b + 3n)$, $p'' = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$.
Esercizio$_\mu$ Costruire e risolvere un esercizio analogo.

B1 – ESERCIZI SUL CALCOLO DELLE PROBABILITà

Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il testa con 5 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 5 volte il testa con 6 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 5 volte il croce con 7 lanci di una moneta regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il numero 2 con 5 lanci di un dado regolare a 4 facce?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 1 volta il numero 3 con 7 lanci di un dado regolare a 4 facce?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 4 volte il numero 2 con 5 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte il numero 1 con 8 lanci di un dado regolaree?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 7 volte il numero 7 con 8 lanci di un dado regolare a 8 facce?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 3 volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 6 volte un numero primo con 7 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere almeno 6 volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero primo con 6 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero primo con 10 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero quadrato di volte un numero primo con 8 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo di volte un numero quadrato con 6 lanci di un dado regolare?
Esercizio$_\mu$ Che probabilità c'è di ottenere un numero triangolare di volte testa con 9 lanci di una moneta regolare?

Sezione B2 – Statistica Inferenziale

Nota basale sulla Statistica

Una cosa è la Statistica teorica, che tratteremo, fatta sui numeri, che riteniamo veri, e un'altra cosa è la realtà, che con tutti i suoi interessi materiali finisce spesso per inquinare i numeri.

"Oste è buono il vino?" "Buonissimo!"
Un gruppo di amici vuole andare in una delle due enoteche della città e per scegliere quale delle due si affida alla Statistica. Piero afferma che il vino dell'enoteca A è *buono*. L'oste dell'enoteca B afferma che il suo vino è *buonissimo*. Essi pertanto scelgono l'enoteca B, in base alle risultanze della Statistica.

Questa premessa sul **conflitto di interessi** appare vieppiù necessaria oggi, durante la pandemia, in cui la valutazione dell'efficacia e della sicurezza dei vaccini viene affidata principalmente a chi li vende, invece che a enti terzi. (Le varie Agenzie del farmaco non fanno gli studi in doppio cieco). Al 2021, i contratti di acquisto degli Stati – per cifre da capogiro – prevedono che i vari produttori presentino le risultanze degli studi in doppio cieco di lungo periodo entro, chi il 2022, chi il 2023. *I produttori*. (I quali già hanno presentato i loro studi su tempi brevi per ottenere le autorizzazioni in via emergenziale, e i prodotti sono già in uso).

In `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7397951/` si trova la nota sul ritiro di un articolo scientifico sui vantaggi del fumo di sigaretta contro il covid-19, con due autori poi risultati in conflitto di interessi con l'industria del tabacco. (Ma nell'articolo pubblicato – da una prestigiosa rivista – avevano dichiarato di non avere nessun conflitto di interesse).
L'articolo è ancora pubblicato su ResearchGate: "Conflict of Interest statement. None"

Si potrà sperare che siano ben liberi da conflitti di interesse al-

meno quelli che lavorano per la FDA (Food and Drug Administration) e le altre Agenzie nazionali e transnazionali, anello intermedio fra i legislatori e i produttori.
Leggiamo sul British Medical Journal:

> "Open Payments reported that [omissis], professor at the University of Michigan School of Public Health and acting chair for the FDA's covid vaccine authorisation meetings, had received over $24 000 (o ((simbolo della sterlina)) 16 970; € 19 650) in payments from drug companies in 2019."
> https://www.bmj.com/content/373/bmj.n1283

Scevri dunque da illusioni (ma sorpresi dalla tolleranza dimostrata da quasi 8 miliardi di persone verso pochi) immergiamoci dunque nello studio dei *numeri* della Statistica, volendoli supporre *veri*, numeri che con la loro purezza sono stati di consolazione ad intere generazioni di matematici, nel corso dei secoli.

Sulla realtà reale invece pesa il
"this is not science, this is business"
citato dall'Editore del British Medical Journal nel 2021. Scrive
https://www.open.online/2021/11/08/covid-19-vaccini-peter-doshi-appel

> Veniamo ora alla frase più controversa di Doshi, che si presta facilmente a manipolazioni. Lui afferma infatti a un certo punto che «questa non è Scienza». Cosa voleva dire esattamente? «È stata estrapolata dal contesto la frase "questa non è Scienza" – spiega Stingi – ma lui in quel caso stava facendo una critica all'aspetto del business. (...)»

Appunto.

XI – Stimatori puntuali e intervallari

53 Introduzione alla Statistica Inferenziale

IL PRIMO COMPITO DELLA STATISTICA INFERENZIALE: DISTINGUERE FRA VARIAZIONI SIGNIFICATIVE E NON SIGNIFICATIVE: Lezioni (53), (57), (61.1), (**??**), (59), (60).
PER ESEMPIO PER DISTINGUERE
  PLAUSIBILI EFFETTI CASUALI
DA
  SPERABILI EFFETTI CAUSALI
DEI FARMACI.

Vedremo anche altre 2 cose: gli stimatori, Lezione (54), e gli intervalli di fiducia, Lezioni (55), (56).

53.1 Introduzione

Se abbiamo un dado appena comprato da un rivenditore di cui ci fidiamo, lo riteniamo regolare, cioè riteniamo equiprobabili i suoi risultati, e similmente per una moneta nuova di zecca:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{\textit{dado equilibrato}}_{\textit{ovvero regolare}} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\textit{moneta equilibrata}}_{\textit{ovvero regolare}}$$

Su queste basi con il Calcolo delle Probabilità possiamo fare moltissime affermazioni certe sui suoi risultati comunque incerti:
– per esempio che conviene scommettere che la somma di 2 lanci del dado sarà 7 piuttosto che 8,
– e conviene scommettere che su un milione di lanci della moneta il numero di teste sarà fra 499 000 e 501 000 piuttosto che no.
Questo è appunto il Calcolo delle Probabilità, e abbiamo visto quante implicazioni ha nella Farmacia.

Tuttavia, gli effetti di un farmaco sono ben lontani da questo tipo di regolarità che hanno il dado e la moneta equilibrati.

Qua entra in campo la Statistica Inferenziale. Mentre nel Calcolo delle Probabilità si parte da una distribuzione e si trovano molte affermazioni conseguenti, come quelle sopra riportate, nella Statistica Inferenziale si suppone noto il tipo di distribuzione, per esempio binomiale o normale o log-normale, ma si ignorano i valori dei parametri della distribuzione, e si vogliono fare affermazioni ragionevoli su essi. Specialmente sulla media e la varianza.

Per esempio potremmo avere un dado di forma irregolare, fatto con un astragalo, o giocare a testa e croce con un frisbee, e ci ritroviamo con distribuzioni di tipo noto ma con parametri incogniti:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 \end{pmatrix}$$

$$Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

La statistica inferenziale vuole fare affermazioni ragionevoli sui parametri di distribuzioni per il resto note.

Per esempio, vogliamo affermare ragionevolmente se p è $\frac{1}{2}$ oppure no, che potrebbe corrispondere al farmaco che non fa nè bene nè male, oppure no, qualcosa fa.
Solo ragionevolmente parlando.
La certezza sfugge inesorabilmente alla Statistica Inferenziale.

Tali affermazioni ragionevoli verranno fatte non sulla base della simmetria com'è per dadi e monete, che fa ritenere l'equiprobabilità dei casi possibili, bensì sulla base di molti valori sperimentali ovvero empirici (determinazioni) della variabile aleatoria oggetto di indagine – cioè sulla base di una determinazione (storica, realmente avvenuta nel tempo) di un campione aleatorio. Cioè, lanciamo molte volte l'astragalo o il frisbee, o diamo il farmaco a molti soggetti, e conteggiamo i risultati.

Così spiega Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *inferenza statistica*:

> Si considereranno principalmente campioni casuali semplici di dimensione $n > 1$, che possono venire interpretati come n realizzazioni indipendenti di un esperimento di base, nelle medesime condizioni.

> Dal momento che si considera un esperimento casuale, si coinvolge il calcolo delle probabilità. Nell'inferenza statistica c'è, in un certo senso, un rovesciamento di punto di vista rispetto al calcolo delle probabilità. Nell'ambito di quest'ultimo, noto il processo di generazione dei dati sperimentali (modello probabilistico) siamo in grado di valutare la probabilità dei diversi possibili risultati di un esperimento. Nella statistica il processo di generazione dei dati sperimentali non è noto in modo completo (il processo in questione è, in definitiva, l'oggetto di indagine) e le tecniche statistiche si prefiggono di indurre le caratteristiche di tale processo sulla base dell'osservazione dei dati sperimentali da esso generati.

Dovremo però cercare di ragionevolmente distinguere il plausibile effetto casuale, dallo sperabile effetto causale.
Per esempio è ben possibile che una moneta o frisbee pur regolare abbia fatto 3 teste su 4 lanci, ma se dà testa 300 volte su 400, sarà ragionevole ritenere che no, non sia regolare.
Fra il plausibile effetto casuale e lo sperabile effetto causale una certa linea di confine viene demarcata da formule basate sulle funzioni del chi quadrato, della t di student, della gaussiana, e altre.
La linea di confine resta sottile e problematica.

Così ancora spiega Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla stessa voce *inferenza statistica*:

> Nell'ambito dell'inferenza statistica, si distinguono due scuole di pensiero, legate a diverse concezioni, o interpretazioni, del significato della probabilità:
>
> - Inferenza classica, o frequentista;
> - Inferenza bayesiana.
>
> La prima è legata agli storici contributi di R. Fisher, K. Pearson, e rappresenta la posizione maggioritaria. La seconda, allo stato attuale (2005) ancora minoritaria, ma in crescita, è fondata sull'uso del risultato del teorema di Bayes ai fini dell'inferenza statistica.

Questa trattazione elementare segue il primo modello.

53.2 Esempio

La probabilità che il contatore X_n di teste in n lanci di moneta regolare assuma un valore

$$\frac{n}{2} - \sqrt{n} \leq X_n \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}$$

(che con la Disuguaglianza di Chebyshev si può dimostrare esser $> 75\%$) con calcoli non banali si può dimostrar essere $> 95.4\%$ per ogni $n \geq 4$, cioè

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| \leq \sqrt{n}\right) > 95.4\% \qquad \forall\, n > 4. \tag{88}$$

Questo ci permette di fare una prima puntatina nella statistica della Farmacia.

Supponiamo di avere una popolazione di monete regolari, e consideriamo malattia la loro regolarità, cioè il fare testa con probabilità $\frac{1}{2}$.
Ne prendiamo un bel campione per fare un test terapeutico, diciamo 10 000. (Il numero di soggetti ragionevole da considerare è questione statistica non banale; qua scegliamo 10 000).
Le curiamo con una goccia di farmaco (per esempio una goccia di colla al centro dalla parte della testa) e ci chiediamo se la cura ha funzionato, cioè se adesso sono meno regolari. Cioè ci chiediamo se le abbiamo curate dalla loro regolarità.
Lanciamo le 10 000 monete 1 volta ciascuna ottenendo 10 000 risultati indipendenti e diciamo $X_{10\,000}$ il numero di teste.
Noi vorremmo che questo numero sia molto diverso 5 000, cioè la metà di 10 000.
Supponiamo di ottenere 5 100: possiamo essere soddisfatti?
(5100 è proprio $n + \sqrt{n}$).
Sì perché se le monete erano ancora regolari c'era meno del 4.6% di probabilità ($100\% - 95.4\%$) che venisse un risultato così estremo, lontano dalla metà. (Siamo soddisfatti ma di poco, se veniva 5 200 o magari 6 000 era molto meglio).

La soglia ordinaria di *significatività* della Statistica è il 5%.
Se ne otteniamo 5 050 non siamo soddisfatti: una tale deviazione è ben compatibile con la regolarità.
Questa è solo un'idea iniziale: nella pratica scientifica seria, bisogna fissare la soglia prima di fare l'esperimento.

Si noti però che in generale nella Farmacia in generale con un farmaco si vuole sbilanciare un parametro <u>in una fissata direzione</u>, (si pensi alla glicemia troppo alta o alla sideremia troppo bassa), non semplicemente smuoverlo in una direzione qualunque.
Questo complicherà le cose. Per intanto abbiamo capito essenzialmente cosa vuol dire distinguere variazioni significative da variazioni non significative: queste ultime *potrebbero ben essere* (qui sta il 95%) *fluttuazioni casuali.*

Con l'approssimazione normale si può dimostrare che, purché n sia sufficientemente grande, lo sbilanciamento di teste rispetto alla metà in una direzione o nell'altra

$$\left| X_n - \frac{n}{2} \right|$$

con probabilità $\approx 68.3\%$ è $< \frac{1}{2}\sqrt{n}$,
con probabilità $\approx 27\%$ sta fra $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ e $\sqrt{n}$,
con probabilità $\approx 4.6\%$ è $> \sqrt{n}$

Riscriviamo l'ultima:

$$P\left(\left| X_n - \frac{n}{2} \right| > \sqrt{n} \right) \approx 4.6\% \qquad \forall\, n \; molto \; grande \tag{89}$$

strettamente imparentata alla (88) perché 4.6 è 100-95.4.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (88), (89), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

54 Stimatori e stimatori non distorti

54.1 Parametri e stimatori; stimatori non distorti

Supponiamo che fra poco avremo le altezze di $n := 100$ persone, prese a caso dai 60milioni di italiani, e allora l'altezza di un italiano a caso è una variabile aleatoria X, e gli n numeri che stiamo per avere sono essi stessi variabili aleatorie X_1,...,X_n, e dopo che li avremo saranno numeri $x_1, ..., x_n$, detti *determinazioni* della variabile aleatoria. Chiameremo anche *campione aleatorio* le variabili aleatorie X_1,...,X_n e *campione* i numeri $x_1, ..., x_n$, ma non ci formalizzeremo su questa distinzione.

Ottenere da n numeri una *stima* di un *parametro* incognito di una v.a. ovvero della sua legge, è un *problema di stima*. Ogni funzione

$$h(X_1, ..., X_n)$$

(per esempio $\max(X_1, .., X_n)$) di un campione aleatorio si dice *stimatore*, in generale stimatore di un parametro incognito u della densità della variabile aleatoria, variabile aleatoria che sappiamo esistere ma non conosceremo mai in forma esatta (legge ovvero distribuzione, cioè densità o funzione di ripartizione), ma di cui avremo n determinazioni. Scriveremo

$$\hat{v} := h(X_1, ..., X_n)$$

e diremo che $\hat{v} = h(X_1, ..., X_n)$ (variabile aleatoria) è uno stimatore di v e $\hat{v} = h(x_1, ..., x_n)$ (numero) è una stima di v.

Rimarchiamo che lo stimatore è una variabile aleatoria, funzione di un numero indeterminato n di variabili aleatorie. Certo, dopo che delle variabili aleatorie del campione avremo una determinazione, immediatamente avremo una determinazione dello stimatore, che a quel punto sarà un numero.

Esempio duplice di stimatore. Per esempio per una v.a. $\mathbb{U}[0,a]$ o $\mathbb{U}\{0,a\}$ (uniforme fra 0 e a, continua o rispettivamente discreta)

$$\hat{a} := 2\,\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \qquad = 2\,\bar{X}_n \tag{90}$$

è lo *stimatore dei momenti* del parametro a. (Il doppio della media aritmetica).

Per esempio se 3 persone si sono iscritte indipendentemente a una corsa e hanno avuto i numeri progressivi n_1, n_2, n_3, il doppio della media – in assenza di altre informazioni – è una stima del numero di iscritti. (Approssimativamente: in effetti i 3 numeri si possono ritenere determinazioni di una v.a. $\mathbb{U}\{1,a\}$ e non $\mathbb{U}\{0,a\}$.

Quello della formula data non è l'unico stimatore per a, ne esistono infiniti, ma ben pochi sensati. Un altro considerato molto sensato per $\mathbb{U}[0,a]$ è il massimo dei valori del campione, $\hat{a} := \max(X_1, ..., X_n)$, di cui non ci occuperemo.

ESERCIZIO$_\mu$ $\approx$
Dato questo campione aleatorio

$$0.5288, 0.0344, 0.6112, 0.072, 0.4584, 0.5104, 0.7296$$

di una variabile aleatoria Z uniformemente distribuita sull'intervallo $[0,a]$, stimare a con lo stimatore dei momenti, con 4 cifre decimali.

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard del punto decimale.

Lo stimatore dei momenti è il doppio della media aritmetica.
(Ovvero in formule, per una v.a. Z, $\hat{a} := 2\,\frac{Z_1+...+Z_n}{n} = 2\,\bar{Z}_n$).
La media degli $n = 7$ numeri è

$$\bar{Z}_7 = \frac{0.5288 + 0.0344 + 0.6112 + 0.072 + 0.4584 + 0.5104 + 0.7296}{7} \approx 0.420686$$

e moltiplicando per 2, si ha, con 4 cifre decimali,

$$\hat{a} = 2\,\bar{Z}_7 =$$

$$\boxed{\hat{a} \approx 0.8414}$$

Nota. (Il campione era stato ottenuto con $a = 0.8$ con l'istruzione

```
v = Table[0.8 RandomInteger[1000]/1000., i, 1, 7]
```

col software Mathematica$^{(R)}$).

Ulteriore esempio. Per una v.a. uniforme $\mathbb{U}[-u, u]$ lo *stimatore dei momenti* di u è

$$\hat{u} := \sqrt{\frac{3\,(X_1^2 + ... + X_n^2)}{n}}$$

54.2 Stimatori non distorti

Esistono molti criteri di bontà di uno stimatore, e noi ne considereremo uno: diremo che lo stimatore $\hat{u}$ del parametro incognito u è *non distorto* (o *corretto*; in inglese *unbiased*) se la speranza matematica di $\hat{u}$ è u, cioè $E(\hat{u}) = u$.

54.3 Stimatori non distorti di media e varianza

La differenza basale fra la *statistica descrittiva* e la *statistica inferenziale* è che la prima opera (in generale) su numeri e la seconda su variabili aleatorie, con il che la prima ricade in quella che abbiamo chiamato *matematica della certezza* e la seconda nella *matematica dell'incertezza*.
Se abbiamo n numeri

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

nella statistica descrittiva queste sono la media e la varianza degli n numeri:

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad Var(x_1, x_2, ..., x_n) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 \,.$$

Se invece supponiamo che $x_1, x_2, ..., x_n$ siano *determinazioni* di una variabile aleatoria X con una certa media μ e una certa varianza σ^2 *incognite*, dalle precedenti formule possiamo immediatamente definire questi (ragionevoli) stimatori – che sono variabili aleatorie – di μ e σ^2:

$$\hat{\mu} := \bar{X} := \bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \tag{91}$$

$$W := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2 \,.$$

Si dimostra che il primo è stimatore *non distorto* della media μ, cioè $E(\bar{X}_n) = \mu$, ma il secondo non è stimatore non distorto di σ^2, cioè la sua speranza matematica è diversa dal parametro che si vuol stimare.
Si dimostra invece che (e si noti la differenza nel denominatore)

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 \left[:= \hat{\sigma}^2 \ {\scriptstyle \leftarrow scrittura\ rara,\ scriveremo\ S^2} \right] \tag{92}$$

è lo *stimatore non distorto della varianza*: $E(S^2) = \sigma^2$.

54.4 Cenno agli stimatori di massima verosimiglianza

Lo stimatore $\hat{a}$ *di massima verosimiglianza* "cerca di essere" quello che renderebbe massimamente probabile l'uscita di x_1,...,x_n, se a valesse $\hat{a}$. Il metodo per trovarlo si basa sulle derivate e non è semplicissimo.
Ci limitiamo a dare la formula dello stimatore di massima verosimiglianza del parametro λ della legge esponenziale:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n} \,. \tag{93}$$

(Che non è non distorto).

ESERCIZIO$_\mu$ ≈
Stimare il parametro λ di una densità esponenziale da questo campione:

16.62, 3.810, 35.97, 4.322, 2.725, 11.44, 0.6671, 14.85, 3.816, 12.54.
Si dia il risultato con 2 cifre significative.

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard del punto decimale.
La media aritmetica degli $n = 10$ valori è $\bar{X}_n = 10.676$.
Lo stimatore di massima verosimiglianza è il reciproco della media

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n} \approx$$

con 2 cifre significative

$$\boxed{\approx 0.094.}$$

Nota. Salvo approssimare i valori a 4 cifre significative, il campione era stato ottenuto su WolframAlpha con parametero 0.1, abbastanza vicino allo 0.094 trovato con lo stimatore, con l'istruzione

```
10 random numbers exponential distribution lambda=0.1
```

che naturalmente, se richiamata da qua, in generale darà altri 10 numeri, sempre provenienti da quella variabile aleatoria esponenziale simulata, con vero parametro $\lambda = 0.1$. Di volta in volta lo stimatore darebbe diversi valori per $\hat{\lambda}$, plausibilmente "vicini" al vero $\lambda = 0.1$.

54.5 Riassumiamo: gli stimatori puntuali

Prima di tutto, in questo paragrafo chiameremo stimatori puntuali quelli che finora abbiamo chiamato semplicemente stimatori; esistono poi gli stimatori intervallari, che sono coppie di variabili aleatorie da intendere come estremi di un intervallo, che vedremo.

Per una v.a. discreta o continua X, supponiamo di sapere che:
1) ha distribuzione di un certo tipo noto dipendente da un parametro incognito, sia esso a, per esempio $\mathbb{U}[-b, b]$ o $N(\mu, 1)$ o $N(0, \sigma^2)$ o $\Gamma(\alpha, 1)$ (dove a è rispettivamente b, μ, σ^2 e α);
2) avremo n determinazioni indipendenti x_1,...,x_n di X, che per ora, "prima" di averle, sono n variabili aleatorie X_1,...X_n.

Non sapremo mai quanto vale a ma vogliamo stimarlo con uno *stimatore puntuale* $\hat{a}$ mediante i dati $x_1,...,x_n$, ovvero (prima di averli) $X_1,...,X_n$.

Concretamente lo stimatore ci appare come una funzione di un numero arbitrario n di variabili, come $2\,\frac{X_1+...+X_n}{n}$ ovvero $2\,\frac{x_1+...+x_n}{n}$.

Ai fini delle Scienze Applicate, queste formule si trovano semplicemente elencate, sui vari testi, come questo, mentre produrle non è facilissimo. I matematici e in particolare gli statistici le producono, dimostrando le loro varie qualità positive, per esempio l'essere non distorti e altre.

A un livello superiore si considerano parametri 2-dimensionali, come $a := (\mu, \sigma^2)$.

La teoria degli stimatori dei momenti è ricca e interessante e qualcosa si trova nei Complementi a questa Lezione ma nella nostra trattazione elementare ci limitiamo molto.

54.6 Nota dolente finale e prospettive future

La probabilità che lo stimatore dia il valore esatto del parametro può, genericamente e imprecisamente parlando, ritenersi bassa per variabili aleatorie discrete, e nulla per variabili aleatorie continue.
Eppure, il valore che danno è molto meglio che niente, e si pensi semplicemente alla media. Questo è dovuto essenzialmente al fatto che anche se non danno il valore esatto del parametro da stimare, è "grande" la probabilità che l'errore sia "piccolo", seppure qua non approfondiamo la questione.
Resta il fatto che quel singolo numero non contiene in sè l'informazione sulla sua plausibile precisione. Questo limite verrà superato dai molto più moderni stimatori intervallari: invece di dare un singolo

valore, daranno un intervallo all'interno del quale "sperabilmente" cade il valore da stimare; e ci sarà una sorta di misura per quel livello di sperabilità, il *livello di confidenza*.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (90), (91), (92), (93), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

Naturalmente bisogna conoscere anche le formule di media e varianza, riportate in questa Lezione, che sono state già illustrate in Statistica Descrittiva.

* Complementi *

54.7 Complementi – gli stimatori da un libro classico

Diamo qualche dettaglio sugli stimatori seguendo abbastanza da vicino un libro che si distingue nella didattica del Calcolo delle Probabilità e della Statistica: Calcolo delle probabilità, di Paolo Baldi, ed. McGraw-Hill.

Stimatore dei momenti col momento primo.
Lo stimatore $\hat{a}$ *dei momenti, col momento primo*, attribuisce al parametro a quel valore che farebbe avere alla densità $f_a(x)$ come media, ovvero speranza matematica ovvero momento primo, il valore che è proprio la media di $X_1,...X_n$.

Esempio 1. Per una densità $N(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 noto (ora $a := \mu$)

$$\hat{\mu} := \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n).$$

Esempio 2. Per una densità esponenziale di parametro λ (ora $a := \lambda$) è

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} =^{EQ} \bar{X}_n$$

$$\Rightarrow \ \hat{\lambda} := \frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{X_1 + ... + X_n}\ .$$

Esempio 3. Per una densità $\Gamma(\alpha,\lambda)$ con α noto (ora $a := \lambda$) è

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} =^{EQ} \bar{X}_n$$

$$\Rightarrow \ \hat{\lambda} := \frac{\alpha}{\bar{X}_n} = \frac{n\,\alpha}{X_1 + ... + X_n}\ .$$

Esempio 4. Per una densità uniforme $\mathbb{U}[-u,u]$ è

$$E(X) = \frac{u-u}{2} = 0$$

che non dipende dal parametro incognito $a = u$: il metodo dei momenti col solo momento primo non si può applicare.

Metodo di calcolo dello stimatore dei momenti 1) Si calcola la speranza matematica di $f_a(x)$ come funzione di a;
2) se dipende da a la si uguaglia a $\bar{X}_n$, media di $X_1,...,X_n$;
3) si risolve (se possibile) l'equazione in a;
Quella soluzione trovata, in termini di $X_1,...,X_n$ è lo stimatore dei momenti, inteso come funzione (ed è una variabile aleatoria), per esempio

$$\hat{a} := \frac{n}{X_1 + ... + X_n}$$

e in termini di $x_1,...,x_n$ è lo stimatore dei momenti inteso come valore dello stimatore, nel caso specifico di un campione $x_1,...,x_n$ considerato, per esempio

$$\hat{a} := \frac{n}{x_1 + ... + x_n}$$

e quando a $x_1,...,x_n$ si sostituiscano i loro valori, è un numero, per esempio

$$\hat{a} := \frac{3}{8+7+5} = \frac{3}{20} = 0.15.$$

4) Se $E(X)$ non dipende dal parametro incognito a, si usi allora il momento secondo uguagliandolo alla media quadratica.

Esempio 4 bis. Per una densità uniforme $\mathbb{U}[-u, u]$ è

$$E(X) = \frac{u-u}{2} = 0$$

che non dipende dal parametro incognito $a = u$. Con il momento secondo $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_a(x)\, dx$, ora che la densità è $\frac{1}{2u}$ fra $-u$ e u,

$$E(X^2) = \int_{-u}^{u} \frac{x^2}{2u} dx = \left[\frac{x^3}{6u}\right]_{-u}^{u} = \frac{u^3}{6u} - \frac{-u^3}{6u} = \frac{u^3}{3u} =$$

$$= \frac{u^2}{3} =^{EQ} \frac{1}{n}(X_1^2 + ... + X_n^2) \quad \leftarrow \textit{media quadratica}$$

$$\rightarrow \qquad \hat{u} := \sqrt{\frac{3\,(X_1^2 + \ldots + X_n^2)}{n}}\,.$$

55 Intervalli di fiducia e caso di μ di $N(\mu, \sigma^2)$

55.1 Introduzione agli intervalli di fiducia

Se X è una variabile aleatoria normale $N(\mu, \sigma^2)$ con μ incognito, e ne avremo un campione aleatorio X_1,...,X_n (variabili aleatorie indipendenti tutte con la stessa legge $N(\mu, \sigma^2)$) oppure ne abbiamo delle determinazioni (numeri) x_1,...,x_n, possiamo stimare μ con la media campionaria $\hat{\mu} := \bar{X}_n$ e allora numericamente $\hat{\mu} = \bar{x}_n$. Potrebbe essere per esempio $\bar{x}_n \approx 2.019$ sia se $n = 1$ sia se $n = 100$: la *stima puntuale* ottenuta non distingue i due casi mentre è chiaro che nel secondo caso il valore 2.019 è molto più "sicuro" se non nella sua esattezza (che comunque ha probabilità 0) almeno nella sua vicinanza al valore vero.

Questo della media aritmetica è il modo antico di fare nella Statistica, anche Medica.
Invece il modo moderno è quello di dare un intervallo di valori in cui *sperabilmente* sta il valore vero, come ora mostreremo.

La *stima intervallare* è costituita da 2 stimatori $\hat{u}$ e $\hat{v}$ tali che il parametro incognito, sia ora esso a (per esempio μ di $N(\mu, \sigma^2)$) sia nell'*intervallo aleatorio* $[\hat{u}, \hat{v}]$ con probabilità $\geq 95\%$

$$P(a \in [\hat{u}, \hat{v}]) \geq 95\% \qquad \text{e secondo altri Autori } =$$

fino a che $\hat{u}$ e $\hat{v}$ sono variabili aleatorie dipendenti da X_1,...,X_n, cioè prima di venire determinate coi dati numerici x_1,...,x_n: dopo, il parametro a o sta o non sta nell'intervallo determinato, e sarebbe arduo anche solo definire in che senso si potrebbe attribuire una probabilità a quel fatto; si potrebbe farlo solo con la concezione soggettiva della probabilità ma con essa si può proporre *qualunque* valore di probabilità. (È un po' come chiedersi che probabilità ha 2019 di essere primo: o è primo o non lo è, non c'è una grande questione probabilistica). La questione è sottile e di fatto diffusissima è la credenza erronea che a stia nell'intervallo di confidenza con probabilità 95%, o più in generale $(1-\alpha)100\%$. L'articolo scientifico riportato in questo link-> su sito governativo statunitense (associato al PubMed)

> provide an explanatory list of 25 misinterpretations of P values, confidence intervals, and power.

Fissati i valori $x_1,\ldots,x_n$ e conseguentemente i valori di $\hat{u}$ e $\hat{v}$ non si parla più di probabilità ma di *(livello di) confidenza*, p.es. 95%.

Scriveremo per esempio

$$a \in [1.9, 2.1] \quad \alpha = 0.05$$

ma altri Autori scriveranno diversamente e variamente, per esempio

$$\mathrm{C.I.}_{95} = 1.9 - 2.1$$

dove C.I. sta per *confidence interval* e 95 sta per 95% ovvero $\alpha = 0.05$.

Tutto questo si estende mutando la soglia 95% in qualunque altro *livello* $1-\alpha$, e normalmente si usano anche 90% e 99%, e si estende a qualunque parametro incognito di una densità per il resto nota.

Il complemento α di $1-\alpha$ si chiama *(livello di) significatività*, e in generale è $5\% = 0.05$ o $10\% = 0.1$ o $1\% = 0.01$.
Purtroppo α e $1-\alpha$ vengono scambiati fra loro nei vari testi.

Il *(livello di) di significatività* è affine al *p value* dei test statistici, che vedremo in seguito, salvo che quest'ultimo non è prefissato ma si calcola dopo: è l'ultimo valore di significatività possibile coi dati che abbiamo, il valore discriminante. Se avessimo pre-fissato un α più piccolo non saremmo riusciti a dimostrare niente, neppure con l'incerta certezza statistica. La speranza è avere un p value piccolissimo, indice di una forte certezza statistica.

55.2 Intervalli di fiducia per μ per campioni gaussiani

Precisiamo dapprima che *intervallo di fiducia* e *intervallo di confidenza* sono sinonimi.

In questo paragrafo considereremo, per una $N(\mu, \sigma^2)$:
• la stima intervallare di μ essendo noto σ^2;
• la stima intervallare di μ essendo ignota anche σ^2.

Tutte le formule di questo paragrafo valgono per campioni gaussiani e (approssimatamente) anche per campioni non gaussiani se la numerosità è $n \geq 30$ e la densità non è "troppo" asimmetrica.

Per μ con σ^2 <u>nota</u>, intervallo di fiducia bilatero centrato al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è "piccolo", come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, "grande"):

$$\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad (\alpha = ...) \tag{94}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha = ...)$$

(si specifichi α se noto) e in particolare ricordiamo il valore $\phi_{0.975} \approx 1.96$ da cui l'intervallo classico con livello di confidenza del 95%, cioè $\alpha = 0.05$,

$$\left[\bar{X}_n - 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (\alpha = 0.05) \tag{95}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

Come sopra, per μ con σ^2 <u>non nota</u>, caso più verosimile:

$$\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] \quad (\alpha = ...) \tag{96}$$

$$\text{ovvero} \quad \bar{X}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad (\alpha = ...)$$

(si specifichi α se noto) con i quantili di Student e la radice quadrata S_n dello stimatore S_n^2 della varianza.

Si noti che esistono infiniti intervalli bilateri allo stesso livello, non centrati in $\bar{X}_n$, e 2 unilateri; ne mostreremo solo 1 unilatero.

Per μ, un intervallo unilatero al livello di confidenza $1-\alpha$:

$$\Big]-\infty,\, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{1-\alpha}(n-1)\Big]. \quad \text{\small (\textit{Qua ovviamente } σ^2 \textit{ non nota}).} \tag{97}$$

(Si specifichi α se noto).

La quantità $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ che ricorre nelle precedenti formule ha un nome:

$$\textit{errore standard} := \frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{98}$$

e potrebbe trovarsi abbreviato *se*, dall'inglese.

Note sui quantili. I valori dei quantili di Student si trovano sulle tavole, cartacee o sulla rete, di non immediata lettura purtroppo, e vengono calcolati da molti software.
Per grandi valori di n, i quantili di Student possono in pratica sostituirsi coi quantili normali, le cui tavole sono di più facile lettura. Questa sostituzione diventa possibile perché per grandi valori di n lo stimatore S_n^2 tende a σ^2, cosicché di fatto la varianza diventa "sperabilmente nota" e (circa) uguale a S_n^2.
Preferiremo non fare quest'approssimazione incerta, preferendogli la formula (96), ma ci si aspetti di trovarla nei testi scientifici, in particolare l'incerta formula per il classico 95%

$$\bar{X}_n \pm 1.96\, \frac{S_n}{\sqrt{n}} \quad (\alpha = 0.05)$$

che almeno eviteremo come la peste per piccoli n. Certo per $n > 120$ l'approssimazione 1.96 non è cattiva; ecco alcuni quantili di Student per $\alpha = 0.05$ ovvero $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$:

30 2.042
40 2.021
60 2.000
120 1.980
∞ 1.960
ed eccolo, infine al limite, l'1.96.
D'altra parte, è inutile cercare qua il pelo nell'uovo, quando poi nella pratica l'1.96 stesso viene approssimato spesso con 2, da cui la classica formulazione *pratica*, che troviamo su Wikipedia (in inglese) alla voce Confidence interval:

plus or minus twice the standard error

cioè

$$95\%\ \text{C.I.:}\quad \bar{X}_n \pm 2\,\frac{S_n}{\sqrt{n}} \tag{99}$$

di largo uso *pratico*, ma la eviteremo, preferendogli la formula (96). Ma può essere utile per semplici stime a mente.

Tavole (stampabili) dei quantili normali, di Student e del chi quadrato (e altre) si trovano per esempio a questo `link->`

Ecco un esempio di intervallo di fiducia tratto da un articolo scientifico riportato su PMC, sito governativo statunitense:

> The seroprevalence of latent toxoplasmosis in subjects involved in traffic accidents (N = 146) and in the general population living in the same area (N = 446) was compared [...] subjects with latent toxoplasmosis had a 2.65 (C.I.$_{95}$= 1.76-4.01) times higher risk of an accident than the toxoplasmosis-negative subjects.

(Si noti che la *stima puntuale* 2.65 non è al centro dell'intervallo $[1.76, 4.01]$, che è bilatero ma non centrato).

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$
≈ Determinare l'intervallo di fiducia per la media, consueto (bilatero centrato) al 95%, con questo campione gaussiano di varianza 9:
17.65 24.38 22.86 20.09 20.71 25.75 21.85
15.82 22.53 19.66 20.26 18.99 17.09 20.52.
Fra le molte possibili scritture della soluzione, stavolta si usi la

$$\mathrm{CI}_{95} = [a, b]$$

("CI" sta per *confidence interval*; si usano anche "95%CI" e molte varianti).

SVOLGIMENTO
Con la media del campione di rango $n = 14$

$$\bar{X}_{14} = \frac{1}{14}\,(17.65 + 24.38 + 22.86 + 20.09 + 20.71 + 25.75 + 21.85+$$

$$+15.82 + 22.53 + 19.66 + 20.26 + 18.99 + 17.09 + 20.52) = \frac{288.16}{14} \approx 20.582\,86$$

e con la nota formula dell'intervallo di fiducia in questione

$$\mathrm{CI}_{95}: \quad \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ora con $\sigma = \sqrt{9} = 3$

$$20.582\,86 \pm 1.96\,\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$20.582\,86 \pm 1.96\,\frac{3}{3.741\,66}$$

$$20.582\,86 \pm 1.96 \cdot 0.801\,784$$

$$20.582\,86 \pm 1.571\,5$$

$$\boxed{\mathrm{CI}_{95} = [19.0, 22.2]}$$

o anche

$$\boxed{\mathrm{CI}_{95} = [19.01, 22.15]}$$

(Salvo un'approssimazione a 2 cifre decimali fatta a mano, i valori erano stati simulati con WolframAlpha con la varianza 9 e la media 20, che effettivamente sta nell'intervallo trovato, seppure in posizione alquanto decentrata. Seguendo questo link potete farvi produrre un altro campione siffatto di 14 elementi, e cliccando di nuovo un altro ancora: `https://www.wolframalpha.com/input/?i=14+random+normal+distribution+mean%3D20+variance%3D9`; campioni sempre nuovi appena prodotti).

ES.ERCIZIO$_{\mu 2019}$
≈ Di 200 soggetti si è misurato un parametro fisiologico producendo un campione che si ritiene gaussiano, e con un foglio di calcolo si è trovato

$$\frac{1}{200}\sum_{k=1}^{200} X_k = 83.21 \qquad \frac{1}{199}\sum_{k=1}^{200}(X_k - \bar{X}_{200})^2 = 1\,405.38$$

Con la grossolana *formula pratica*, di largo uso nelle Scienze Applicate,

$$C.I._{95}: \;\; \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

trovare il consueto intervallo di fiducia della media, nella forma $C.I._{95} : [a, b]$.

SVOLGIMENTO
(Il termine $\pm 1.96\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ ha un errore circa del 2% per $n = 60$ e circa dell'1% per $n = 120$, rispetto al più corretto $\pm\frac{S_n}{\sqrt{n}}\,t_{0.975}(n-1)$, coi quantili di Student, e poi tende a 0; ma tutto ciò non serve per rispondere al quesito).
Ci sono dati

$$\bar{X}_{200} = 83.21 \qquad S^2_{200} = 1\,405.38$$

da cui con la *formula pratica* riportata

$$C.I._{95}: \;\; 83.21 \pm 1.96\,\frac{\sqrt{1\,405.38}}{\sqrt{200}} \approx$$

$$\approx 83.21 \pm 1.96\,\frac{37.4884}{14.1421} \approx$$

$$\approx 83.21 \pm 1.96 \cdot 2.651 =$$

$$= 83.21 \pm 5.1956$$

e infine nella forma richiesta

$$\boxed{C.I._{95}: \;[78.0, 88.4]}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (94), (95), (96), (98), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
In particolare, con le (97), (99), bisognerebbe saper operare se vengono fornite.

ESERCIZI SULLA LEZIONE 54

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$
≈ Conoscendo la varianza 3.2 di una variabile aleatoria normale si determini l'intervallo di fiducia bilatero consueto della media al livello 95% relativamente a questo campione

-1.32 3.78 1.58 1.55 3.96 0.85 4.78 3.74 3.25 0.99

esprimendolo in entrambe le forme usuali: $a \pm b$, e anche $[u, v]$.

Svolgimento.

La media degli $n = 10$ dati é 2.316.
Consideriamo la classica formula dell'intervallo di fiducia al 95% ovvero 5%

$$\mu = \bar{X}_n \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (\alpha = 0.05)$$

per la quale ora troviamo $2.316 \pm 1.96\,\frac{\sqrt{3.2}}{\sqrt{10}}$ e a conti fatti

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.316 \pm 1.109 \quad (\alpha = 0.05) \\[1em] \mu \in \left[1.207, 3.425\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

ovvero, con sole 3 cifre significative come nei dati originali,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = 2.32 \pm 1.11 \quad (\alpha = 0.05) \\[1em] \mu \in \left[1.21, 3.42\right] \quad (\alpha = 0.05) \end{array}}$$

(Si potrebbe obiettare che un corretto arrotondamento a 3 cifre significative di 3.425 é 3.43 e non 3.42; questo é vero ma il 3.425 era giá esso stesso un arrotondamento, di 3.4247..., e arrotondando a 3 cifre significative quest'ultimo, che é il vero valore, si ottiene appunto 3.42).
(I valori erano stati ottenuti simulando $N(2.4, 3.2)$).

56 Intervalli di fiducia per la varianza

Per σ^2 con μ non nota, (un) intervallo di fiducia bilatero al livello (di confidenza) $1-\alpha$, dove α è “piccolo”, come $0.05 = 5\%$ (da non confondersi con $1-\alpha$, “grande”):

$$\Big[\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\, S_n^2\,,\ \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\, S_n^2\Big]. \quad \textit{(Non centrato in } S_n^2). \tag{100}$$

Come sopra, un intervallo unilatero:

$$\Big[0\,,\ \frac{n-1}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\, S_n^2\Big]. \tag{101}$$

Nota 1. Le 2 formule soprastanti valgono per campioni gaussiani e (approssimatamente) anche per campioni non gaussiani se la numerosità è $n \geq 30$ e la densità non è “troppo” asimmetrica.

Nota 2. I quantili del chi quadrato, oltre a venire calcolati (approssimatamente) da molti software, si trovano (approssimati) per alcuni tipici valori di α e piccoli valori di n su apposite tavole numeriche, e poi vale (teorema) l'approssimazione

$$\forall\, n \geq 30 \qquad \chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}\Big(\phi_\alpha + \sqrt{2\,n-1}\Big)^2. \tag{102}$$

Nota 3. Si possono considerare anche intervalli di fiducia per altri parametri e altri tipi di variabili aleatorie, per esempio$^\uparrow$ per p di $B(1,p)$.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria la formula (100), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
In particolare, con le (101), (102) bisognerebbe saper operare se vengono fornite.

XII – Test Statistici

57 I Test Statistici

Dalle determinazioni x_1,...,x_n di un campione aleatorio X_1,...,X_n tratto da una v.a. X di densità nota salvo un suo parametro a, vogliamo rispondere con “sì” o “no” , con “ragionevole certezza statistica” ovviamente, a una domanda sul parametro incognito.

a per noi in generale è un numero incognito, come p che poi è la media μ in $B(1,p)$, ma lasciamo aperta la possibilità, di livello superiore, che sia una coppia di numeri come (μ,σ^2).

La domanda potrebbe essere per esempio $\mu > 0$? per una v.a. $N(\mu,\sigma^2)$, oppure $p = \frac{1}{2}$? per una v.a. $B(1,p)$ che nella realtà sensibile può significare per esempio la regolarità di una moneta; da decidersi con ragionevolezza statistica dai risultati di molti lanci.

In Farmacia: la glicemia è diminuita? (Cioè, così tanto da far ragionevolmente ipotizzare un effetto causale piuttosto che casuale).

Il test statistico si preordina – prima di avere i dati in mano ovvero prima di fare un esperimento nella realtà sensibile – formulando un'ipotesi statistica, indicata con H o H_0, *ipotesi nulla*, e una ipotesi *alternativa*, indicata con A o rispettivamente H_1, per esempio

$$H : p = \frac{1}{2} \qquad A : p \neq \frac{1}{2}\,.$$

Anticipiamo che l'ipotesi nulla H va identificata in generale col caso che si spera che non sia. (“Vogliamo A!”).

Un esempio minimo potrebbe essere così: lanceremo 5 volte la moneta e rifiuteremo l'ipotesi di regolarità se viene testa 0 o 5 volte, perché se la moneta è regolare quei risultati hanno complessivamente probabilità 1/16, un po' pochino.
In realtà la statistica usuale viene fatta “a 1/20”, cioè al 5 ovvero 95%; ma largheggiando possiamo fare Statistica “al 90%” e allora

respingeremmo l'ipotesi della regolarità con 0 o 5 teste su 5 lanci.

L'insieme $\{0,5\}$ è la *regione critica* ovvero di rigetto dell'ipotesi (nulla). La regione critica di solito viene espressa come un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ in cui una certa funzione del campione aleatorio può cadere (e allora rifiutiamo H) o non cadere (non rifiutiamo H). In questi termini, potremmo porre la regione critica $\{0,5\}$ e verificare se vi cade $X_1+...+X_5$ o più usualmente porre $D := \{0,1\}$ e verificare se vi cade $\bar{X}_5$. In casi più significativi di questo microscopico esempio la regione critica di solito ha una forma del tipo $x > x_0$ (test unilatero) oppure $x < x_1 \vee x > x_2$ (test bilatero). Vediamo un altro esempio. Sia I la variabile aleatoria che è la glicemia (iniziale) di un soggetto qualunque di un campione di 20 soggetti (persone iperglicemiche) e F la glicemia (finale) dopo la somministrazione di un certo farmaco. Ci potrebbe interessare se mediamente la glicemia diminuisce con quel farmaco cioè se la media (parametro incognito) della variabile aleatoria $X := I - F$ è > 0. (Iniziale grande, finale piccola).
Si formula l'ipotesi nulla: il farmaco non riduce la glicemia:

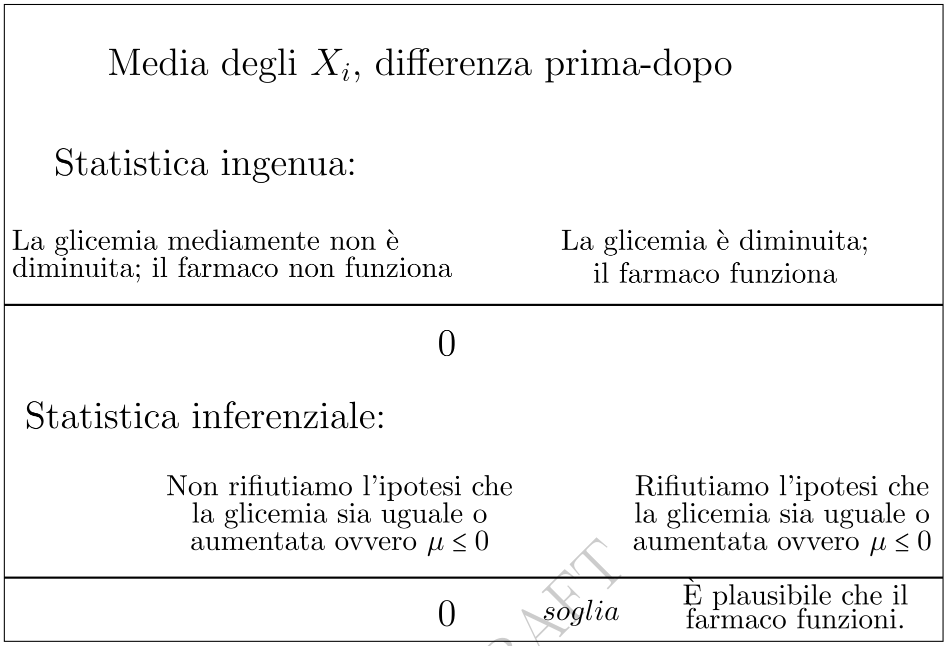
$$H : \mu \leq 0 \qquad \text{(finale grande come o più dell'iniziale)}$$

essendo μ la media di X.
In realtà spero che riduca la glicemia: ipotesi alternativa:

$$A : \mu > 0 \qquad \text{(finale più piccola dell'iniziale)}$$

Misuriamo la glicemia nei 20 soggetti (campione, o più precisamente determinazione $i_1, \ldots, i_{20}$ di un campione aleatorio $I_1, \ldots, I_{20}$). Diamo ai 20 soggetti il farmaco. Misuriamo di nuovo la glicemia dei 20 soggetti ottenendo così 20 determinazioni $f_1, \ldots, f_{20}$ della variabile aleatoria F. Facciamo 20 sottrazioni ottenendo 20 determinazioni $x_1, \ldots, x_{20}$ della variabile aleatoria X, differenza *prima-dopo* ovvero iniziale-finale. Della variabile aleatoria X vogliamo sapere se la media (speranza matematica) è > 0, come speriamo, oppure no.

L'idea ingenua è fare la media aritmetica dei 20 numeri e concludere che se è > 0 il farmaco ha diminuito la glicemia.
Se fosse così in questo e analoghi casi, la statistica inferenziale non servirebbe, ma non è così: quella verifica non dice di per sè sostanzialmente nulla perché non distingue l'effetto del farmaco dalle inevitabili fluttuazioni casuali di X, che, non per niente, è da considerarsi una variabile *aleatoria*. (Non possiamo certo aspettarci un effetto *deterministico* del farmaco, che *sempre* riduca la glicemia).
È invece necessario applicare un opportuno test statistico, cioè di fatto applicheremo una non banale formula che ci potrà dire, nel caso che la media aritmetica degli x_i sia > 0, che quell'effetto con ragionevole plausibilità non è casuale. Se invece la media aritmetica viene negativa l'esperimento è andato male e la statistica non ci aiuta ulteriormente. Alla fine rifiutiamo o non rifiutiamo l'ipotesi nulla. Speriamo di rifiutarla.
Alcuni dicono "accettare" l'ipotesi nulla ma il modo corretto di vedere le cose è "non rifiutarla". Non abbiamo dimostrato che è vera: semplicemente non siamo riusciti a dimostrarla *verosimilmente falsa*.



Insomma X deve essere mediamente ben > 0, non solo > 0, per escludere con ragionevole verosimiglianza la fluttuazione casuale.

Quanto > 0, lo dicono apposite formule che vedremo, che fanno uso dei quantili, di Student in questo caso.

I quantili si trovano e soprattutto si trovavano su tavole numeriche, che permettevano di ottenere la "ragionevolezza al 95%" o ancor meglio al 99%, e anche con altri *livelli di confidenza* tipici.
Diciamo subito che nella pratica si trova scritto indifferentemente "al 99%" o "all'1%" con lo stesso significato, e similmente con 95 e 5, eccetera: purtroppo c'è un'ambiguità terminologica.
Da adesso in questo paragrafo facciamo rifermento al valore "piccolo": non 0.95 ma 0.05, non 0.99 ma 0.01, eccetera.
Oggi quei quantili vengono calcolati da numerosi software. L'uso di questi software ha permesso nei tempi moderni un passo ulteriore: trovare proprio la soglia discriminante, l'ultimo valore per il quale si passa dal non rifiutare al rifiutare l'ipotesi nulla, e questo valore soglia può ben essere diverso da 0.05 o 0.01, per esempio

può essere 0.046, ed è il p-value.
Questo 0.046 è proprio il p-value dei 10 000 lanci di moneta con 5 100 teste prima considerato, come si potrebbe calcolare col computer: rifiutiamo l'ipotesi (nulla) di regolarità (per poco). Ma al livello dell'1%, detto del 99% da altri Autori, non possiamo rifiutarla. (Stiamo cercando di fare un'affermazione troppo categorica ma l'esperimento non ce lo consente; ce lo consentirebbe se fossero venute molte più teste.).

L'ideale è trovare un p-value piccolissimo, magari $< 10^{-6}$, ma almeno ≤ 0.05.

Definizione. Formalmente il p-value è definito come la probabilità di ottenere un valore uguale o più estremo di quello ottenuto, nell'ipotesi che sia vera l'*ipotesi nulla*.

Vengono pubblicati anche articolo scientifici con p value 0.1 ma apprezzatissimi sono p value come 10^{-3} o minori, anche 10^{-6} o più piccoli ancora.
Solo per fare un esempio fra innumerevoli, il preprint[124] *Solar UV - B/A Radiation is Highly Effective in Inactivating SARS-CoV-2* trova per l'ipotesi nulla (sostanzialmente: che il covid sia indipendente dall'irraggiamento solare locale) dei p value dell'ordine di 10^{-11}. E un altro preprint[125] trova dei p value anche dell'ordine di 10^{-5}–10^{-3} per l'ipotesi nulla che nella prima ondata la diffusione del covid sia stata indipendente dall'abbondanza locale di maiali d'allevamento, e perfino, tentativamente, pur nell'incertezza dei dati, 0.005 per l'indipendenza dall'abbondanza locale di cinghiali, per zone in cui è stato possibile trovare allo stesso livello di suddivisione geografica dati sul covid e sulla densità di cinghiali.

In casi semplici il p-value può essere calcolato a mano, per es-

[124]DOI: https://doi.org/10.1101/2020.06.03.20121392
[125]DOI: 10.13140/RG.2.2.29852.31367

empio con i 5 lanci di moneta prima considerati, per rifiutare l'ipotesi (nulla) della regolarità, il risultato "0 teste o 5 teste" ha p-value $1/16 = 0.0625$ e l'ipotesi non viene rifiutata al livello del 5% ovvero 0.05 ovvero del 95% ovvero 0.95. Il valore $\frac{1}{16}$ viene da

$$= P(T,T,T,T,T \vee C,C,C,C,C) =$$

$$= P(T,T,T,T,T) + P(C,C,C,C,C) =$$

probabilità di 5 successi o 0 successi, casi ugualmente estremi, e di più estremi di quanto ottenuto non ce n'è, con $B(5, \frac{1}{2})$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}\,.$$

Oppure rifiutiamo l'ipotesi della regolarità, al classico livello debole del 10%, invece di quello standard del 5%.

57.1 Il test della signora del tè

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, un esperimento degli anni '30 del secolo scorso, alla base della moderna Statistica:

> The experiment is the original exposition of Fisher's notion of a null hypothesis (...) The lady in question (Muriel Bristol) claimed to be able to tell whether the tea or the milk was added first to a cup. Fisher proposed to give her eight cups, four of each variety, in random order (...) The experiment provides a subject with 8 randomly ordered cups of tea – 4 prepared by first pouring the tea, then adding milk, 4 prepared by first pouring the milk, then adding the tea. The subject has to select 4 cups prepared by one method (...) The null hypothesis is that the subject has no ability to distinguish the teas (...) The critical region for rejection of the null of no ability to distinguish was the single case of 4 successes of 4 possible, based on the conventional probability criterion $< 5\%$. This is the critical region

> because under the null of no ability to distinguish, 4 successes has 1 chance out of 70 ($\approx 1.4\% < 5\%$) of occurring (...) in the actual experiment the lady succeeded in identifying all eight cups correctly (...) in 70 (the combinations of 8 taken 4 at a time). (...) the famous case of the 'lady tasting tea' (...) one of the two supporting pillars ... of the randomization analysis of experimental data.

Il valore $\frac{1}{70}$ viene dalla Probabilità Combinatoria, essendo

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

i modi di scegliere 4 elementi su 8 (combinazioni di 8 elementi a 4 a 4). L'indovinare solo 3 tazze su 4 invece è un evento molto probabile, $\approx 24.3\%$, nell'ipotesi nulla di tirare a caso ovvero di non avere la capacità affermata, e si calcola in modo non semplicissimo (distribuzione ipergeometrica) analogo al calcolo per il terno al lotto.

57.2 Test a una coda e a due code

Wikipedia ci illustra un test per la regolarità della moneta molto meglio fatto di quello prima esposto con 5 lanci, e ne prevede 20. La regione critica è $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, che ha probabilità 0.041 se la moneta è regolare, a cui corrisponde la *regione di accettazione* $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, l'insieme complementare. Questo è un *test a due code*.
Il valore 0.41 è la probabilità di un grave allontanamento da 10, metà di 20, speranza matematica del numero di teste nell'ipotesi di regolarità, cioè speranza matematica di $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$:

$$P(X \le 5 \vee X \ge 15) = P(X \le 5) + P(X \ge 15) =$$

$$= 1 - P(6 \le X \le 14) = 1 - \sum_{k=6}^{k=14} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} =$$

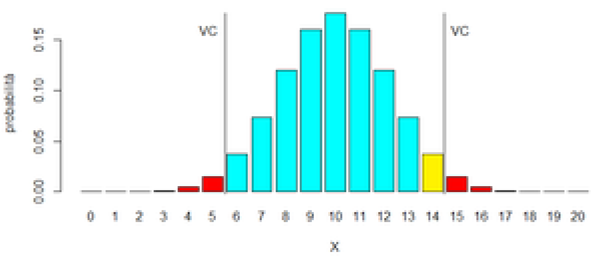


Figure 39: Rosso: regione di rifiuto del test a due code. Giallo: il numero 14 si aggiunge alla coda destra 15,...,20 dando – senza la coda sinistra – la regione di rifiuto del test a una coda. By Ppong.it in wikimedia.

$$= 1 - 2^{-20} \sum_{k=6}^{k=14} \binom{20}{k}$$

calcolabile con pazienza oppure con WolframAlpha che dà ≈ 0.4139.

Leggiamo in

https://it.wikipedia.org/wiki/Test_di_verifica_d%27ipotesi

> Tale valore p è la probabilità di ottenere un valore altrettanto o più estremo di quello osservato, ammesso che la moneta fosse effettivamente bilanciata. Nel nostro caso è pari a 0,041, ovvero del 4,1%. Giudicando bassa tale probabilità, rigettiamo l'ipotesi di bilanciamento della moneta in esame, ritenendo accettabilmente basso il rischio di compiere un errore di giudizio. La probabilità di rifiutare l'ipotesi sottoposta a verifica, nel caso questa fosse corretta, è pari al massimo valore-p che saremmo stati disposti ad accettare.
> (...) supponiamo che noi già prima di fare l'esperimento sospettassimo che fosse sbilanciata verso la testa, in tal caso potremmo dire che l'ipotesi nulla, che noi abbiamo intenzione di smentire, è che la probabilità che esca testa sia minore o uguale a 0,5, anziché necessariamente pari a 0,5. In tal modo evitiamo di rifiutare l'ipotesi nulla se otteniamo un numero di teste basso, ma se, al contrario, contiamo più di 10 teste, calcoliamo il valore-p senza tenere in considerazione i possibili risultati inferiori a 10. Come risultato, la regione di rifiuto perde gli elementi da 1 a 5, ma si allarga sulla destra includendo

14.

L'ipotesi e l'alternativa del test a una coda considerato sono

$$H : p \leq \frac{1}{2} \qquad A : p > \frac{1}{2}\,.$$

58 Errori di I e II Specie

Come detto, prima di eseguire un test statistico dobbiamo formulare un'ipotesi nulla H e la complementare ipotesi alternativa A. Per esempio

$$H: \quad \mu \leq 0$$
$$A: \quad \mu > 0$$

dove μ potrebbe essere la media di una variabile aleatoria X di cui disporremo di un campione aleatorio $X_1, \ldots, X_n$. I ruoli delle 2 ipotesi non sono interscambiabili: in linea generale come ipotesi alternativa va fissata quella che speriamo vera (e come ipotesi nulla quella che ci avrebbe fatto perdere tempo).
Tratto ovvero prodotto ovvero rilevato il campione $x_1,\ldots,x_n$, ne calcoliamo l'opportuna funzione che la statistica ci insegnerà a seconda del tipo di test, sia essa ora $g(x_1,..,x_n)$, per esempio la media $\bar{x}_n$, ci sono 4 casi relativamente alla regione critica D, a $g(x_1,..,x_n)$, e alla verità dell'ipotesi H:

1) $g(x_1,..,x_n) \in D$ ed è vera H:
male respingo ipotesi vera: errore di prima specie.
2) $g(x_1,..,x_n) \in D$ ed è vera A:
bene respingo ipotesi falsa: è il caso sperato. (α)
3) $g(x_1,..,x_n) \notin D$ ed è vera H:
non respingo ipotesi vera: ho perso tempo.
4) $g(x_1,..,x_n) \notin D$ ed è vera A:
male non respingo ipotesi falsa: errore di seconda specie.

L'errore di prima specie è considerato molto più grave.
Ad esempio per un farmaco si può mettere l'ipotesi che non curi, sperando di falsificarla con l'esperimento.
La cosa peggiore è diffondere a milioni di persone un farmaco che non cura, solo perché in un *trial clinico* – necessariamente molto più limitato – ha dato buona prova di sè, causando appunto l'errore di prima specie – di fatto sempre possibile.

Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, in cui chiamano *null hypothesis H0* l'*ipotesi nulla* H_0, ma purtroppo *hypothesis* quella che in questa trattazione è chiamata *alternativa*:

> Hypothesis: "A patient's symptoms improve after treatment A more rapidly than after a placebo treatment."
>
> Null hypothesis (H0): "A patient's symptoms after treatment A are indistinguishable from a placebo."
>
> A Type I error would falsely indicate that treatment A is more effective than the placebo, whereas a Type II error would be a failure to demonstrate that treatment A is more effective than placebo even though it actually is more effective.

Stabiliamo cosa intendiamo per "il farmaco funziona".
Per esempio
aumenta la sopravvivenza a 5 anni rispetto al placebo
riduce la massa tumorale
riduce la glicemia negli iperglicemici.

I 4 casi in dettaglio sono questi.

1) e 3) è vera l'ipotesi H: il farmaco è inutile o dannoso (esempio: sopravvivenza a 5 anni uguale o diminuita).
2) e 4) è vera l'alternativa A: il farmaco è utile (esempio: sopravvivenza a 5 anni aumentata).

1) e 2) La sperimentazione dà esito buono.

1) Per caso i soggetti trattati sono vissuti a lungo e il farmaco dannoso fa bella figura e magari si diffonde: GRAVISSIMO.

2) I soggetti trattati sono vissuti a lungo grazie al farmaco che giustamente fa bella figura

3) e 4) La sperimentazione dà esito cattivo.

3) non respingo l'ipotesi che il farmaco sia inutile o dannoso; il farmaco inutile o nocivo è stato correttamente riconosciuto tale sperabilmente non verrà commercializzato. Ho perso tempo, speravo fosse utile.

4) Per caso i soggetti trattati sono vissuti poco ma il farmaco in generale funziona: il farmaco utile viene purtroppo abbandonato. Peccato.

Gli errori di prima e seconda specie hanno un analogo molto suggestivo negli errori giudiziari. L'ipotesi nulla è l'innocenza:

	innocente	colpevole
condannato	errore di I specie	ottimo
assolto	bene (ma perso tempo)	errore di II specie

Sull'assoluzione del colpevole, errore meno grave della condanna di un innocente, vale il classico: IN DUBIO PRO REO.
(Ovviamente lo scopo dell'apparato giudiziario non è assolvere gli innocenti ma condannare i colpevoli: se facesse questo e non altro realizzerebbe il suo compito, per questo è scritto "perso tempo").

In Medicina e Farmacia, gli errori di I e II specie si presentano anche nella considerazione dei test diagnostici, **ma con una seria duplicità ovvero ambiguità.**

In ambito medico alcuni considerano

ipotesi nulla: la malattia è presente

altri

ipotesi nulla: malattia non presente.

Con riferimento al <u>secondo modo</u> di impostare la questione, si ha allora questo schema:

	sano	malato
positivo	falso positivo: errore di I specie *male respingo ipotesi vera*	vero positivo: ottimo: trovato!
negativo	vero negativo bene ma perso tempo	falso negativo: errore di II specie (condizione non rilevata)

In quest'ottica, il peggio sarebbe curare un sano, il falso positivo a un test diagnostico, a rischio di danneggiarlo: era già sano! PRIMUM NON NOCERE.
Nell'altra ottica il peggio, l'errore di I specie, sarebbe il falso negativo, in pratica non avvertire della malattia il malato.
Attenzione a quest'ambiguità.

58.1 Nota sul parametro medico su cui si fa il test

Per un chemioterapico si può ipotizzare di testare la sopravvivenza a 5 anni (confrontando farmaco e placebo); oppure la riduzione della massa tumorale in un breve tempo; se poi in un

tempo doppio il paziente muore, questo non rientra nella statistica. È ovvio che la sopravvivenza a 5 anni richiede una sperimentazione lunghissima, e costosa.
Ma per quanto di altissimo valore, anche quel solo parametro è poco, nella complessità della realtà: non si è tenuto conto della qualità della vita in seguito alla somministrazione del farmaco.

Tutt'altra questione: non si è tenuto conto neppure del costo economico: gli stessi soldi il Sistema Sanitario potrebbe spenderli con maggiore beneficio complessivo per la cura di altre malattie. (Resource Management, e in caso di sanità privata anche ROI, Return On Investment).

A questo proposito, su cosa si testa, leggiamo sul British Medical Journal, in `https://www.bmj.com/company/newsroom/covid-19-vaccine-trials-cannot-tell-us-if-they-will-save-lives/`, datato 21 ottobre 2020, e si noti che qua la prestigiosissima rivista scientifica tende a sostenere un punto di vista scientifico, non *differenti* interessi:

> None of the current trials are designed to detect a reduction in any serious outcome such as hospitalisations, intensive care use, or deaths
>
> Vaccines are being hailed as the solution to the covid-19 pandemic, but the vaccine trials currently underway are not designed to tell us if they will save lives, reports Peter Doshi, Associate Editor at The BMJ today.
>
> Several covid-19 vaccine trials are now in their most advanced (phase 3) stage, but what will it mean exactly when a vaccine is declared "effective"?
>
> Many may assume that successful phase 3 studies will mean we have a proven way of keeping people from getting very sick and dying from covid-19. And a robust way to interrupt viral transmission.

> Yet the current phase 3 trials are not actually set up to prove either, says Doshi.
>
> "None of the trials currently underway are designed to detect a reduction in any serious outcome such as hospitalisations, intensive care use, or deaths. Nor are the vaccines being studied to determine whether they can interrupt transmission of the virus," he writes.([126])

[126] E continua:
He explains that all ongoing phase 3 trials for which details have been released are evaluating mild, not severe, disease - and they will be able to report final results once around 150 participants develop symptoms.

In Pfizer and Moderna's trials, for example, individuals with only a cough and positive lab test would bring those trials one event closer to their completion.

Yet Doshi argues that vaccine manufacturers have done little to dispel the notion that severe covid-19 was what was being assessed.

Moderna, for example, called hospitalisations a "key secondary endpoint" in statements to the media. But Tal Zaks, Chief Medical Officer at Moderna, told The BMJ that their trial lacks adequate statistical power to assess that endpoint.

Part of the reason may be numbers, says Doshi. Because most people with symptomatic covid-19 infections experience only mild symptoms, even trials involving 30,000 or more patients would turn up relatively few cases of severe disease.

"Hospitalisations and deaths from covid-19 are simply too uncommon in the population being studied for an effective vaccine to demonstrate statistically significant differences in a trial of 30,000 people," he adds. "The same is true regarding whether it can save lives or prevent transmission: the trials are not designed to find out."

Zaks confirms that Moderna's trial will not demonstrate prevention of hospitalisation because the size and duration of the trial would need to be vastly increased to collect the necessary data. "Neither of these I think are acceptable in the current public need for knowing expeditiously that a vaccine works," he told The BMJ.

Moderna's trial is designed to find out if the vaccine can prevent covid-19 disease, says Zaks. Like Pfizer and Johnson and Johnson, Moderna has designed its study to detect a relative risk reduction of at least 30% in participants developing lab-confirmed covid-19, consistent with FDA and international guidance.

Zaks also points to influenza vaccines, saying they protect against severe disease better than mild disease. "To Moderna, it's the same for covid-19: if their vaccine is shown to reduce symptomatic covid-19, they will feel confident it also protects against serious outcomes," Doshi writes.

But Doshi raises another important issue - that few or perhaps none of the current vaccine trials appear to be designed to find out whether there is a benefit in the elderly, despite their obvious vulnerability to covid-19.

If the frail elderly are not enrolled into vaccine trials in sufficient numbers to determine whether there is a reduction in cases in this population, "there can be little basis for assuming any benefit against hospitalisation or mortality," he warns.

Doshi says that we still have time to advocate for changes to ensure the ongoing trials address the questions that most need answering.

For example, why children, immunocompromised people, and pregnant women have

D'altra parte il testo sopra riportato è ormai (2021) superato, e in progresso di tempo molto è stato fatto per valutare i risultati mancanti negli studi iniziali, e ormai noi tutti sappiamo che i vaccini salvano delle vite.

largely been excluded; whether the right primary endpoint has been chosen; whether safety is being adequately evaluated; and whether gaps in our understanding of how our immune system responds to covid-19 are being addressed.

"The covid-19 vaccine trials may not have been designed with our input, but it is not too late to have our say and adjust their course. With stakes this high, we need all eyes on deck," he argues.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H e alternativa A, ad un certo livello α, la regione critica sia $[20.18, +\infty[$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 19.2, e che sia vera A. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il quantile

SVOLGIMENTO

Lo stimatore T vale 19.2 che $\notin$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) è falsa (perché è vera l'alternativa). Allora "male non respingo ipotesi falsa", cioè

$$\boxed{\text{Si commette un errore di seconda specie}}$$

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$\star$ Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H, e alternativa A vera, al livello $\alpha = 0.1$, la regione critica sia $T > 734.66$ e il calcolo dello stimatore del test dia $T = g(x_1, ..., x_n) = 786.45$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non ha senso perché α deve essere ≤ 0.05 ossia 5%.

SVOLGIMENTO

Lo stimatore cade nella regione critica, perché $786.45 > 734.66$, e allora l'ipotesi (nulla) viene respinta, ed essa è falsa perché l'alternativa è vera. Siamo nel caso *"bene respingo ipotesi falsa"* che, come è ben noto, per i test statistici

$$\boxed{\text{Era il caso in generale sperato}}$$

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria la formula (α) oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

59 Il Test del χ^2, quello basico

59.1 La teoria del Test del χ^2, quello basico

Il primo test del chi quadrato, dei due che considereremo, lo chiameremo semplicemente *Test del chi quadrato (quello basico)*.
Un altro test detto del chi quadrato verrà illustrato nella Lezione successiva.
Questo test del chi quadrato basico si riferisce a una variabile aleatoria discreta, sia essa X, con un numero finito k di valori che possiamo identificare con k numeri interi, per esempio 0,1 oppure 1,...,6; per fissare le idee diciamo 1,...,k. Nel discorso che segue si possono immaginare, per fissare le idee, $n = 600$ lanci di un dado. Certo, se è regolare possiamo aspettarci circa 100 volte il risultato 1, e il 2, eccetera.
Se abbiamo n determinazioni x_1,...,x_n di X, ce ne sono n_1 che valgono 1, n_2 che valgono 2,..., n_k che valgono k. Sono le *"frequenze assolute (osservate ovvero empiriche)"*. (Dividendole per n si ottengono le *"frequenze relative (osservate ovvero empiriche)"* $\bar{p}_i := \frac{n_i}{n}$, che tendenzialmente dovrebbero assomigliare alle p_i, le probabilità *"teoriche"*, e con esse si ottiene la formula alternativa che daremo in parentesi).
Il test vuole respingere l'ipotesi (nulla) che la densità di X sia data dai valori $(p_1, ..., p_k)$. Per esempio escludere la regolarità di un dado, cioè $H\,:\,(p_1, ..., p_6) = (\frac{1}{6}, ..., \frac{1}{6})$, $A\,:\,(p_1, ..., p_6) \neq (\frac{1}{6}, ..., \frac{1}{6})$. (Naturalmente gli indici potrebbero essere 0,...,$k-1$).
Fissato *prima* di vedere i dati (come sempre si deve fare in un test statistico serio) il livello di confidenza α, tipicamente 0.95, (in questa Lezione α è "grande") il rifiuto si ha se

$$T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) \quad \left(\text{o: } n \sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{p}_i - p_i)^2}{p_i}\right) \qquad (103)$$

purché

$$n\,p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, ..., k. \qquad (104)$$

Se con l'ultima classe si ha $n\,p_k < 5$, si associano le classi $k-1$ e k, e se col nuovo $\tilde{p}_{k-1} = p_{k-1} + p_k$ si ha $n\,\tilde{p}_{k-1} \geq 5$ si fa il test per la nuova v.a. a $k-1$ valori. Per esempio si considera un dado "a 5 valori": 1, 2, 3, 4, $5 \vee 6$, con frequenze assolute n_1, n_2, n_3, n_4, $n_5 + n_6$, e nell'ipotesi p_1, p_2, p_3, p_4, $p_5 + p_6$. Similmente se la prima, o più raramente un'altra probabilità, è troppo piccola, $n\,p_m < 5$, si può provare ad associare 2 classi consecutive.

Alcuni Autori richiedono la condizione > 10 invece che ≥ 5.

Esempio di Wikipedia tratto dal già citato libro di Paolo Baldi. Con 2000 lanci di un dado con frequenze assolute osservate 388, 322, 314, 316, 344, 316, si rifiuta, al livello del 5%, ovvero del 95%, la regolarità perché

$$T \approx 12.6 > 11.07 \approx \chi^2_{0.05}(5).$$

(Naturalmente T è T_{2000}).

59.2 Le tavole del chi quadrato

Tavole numeriche dei quantili del chi quadrato si trovano sia in formato cartaceo su molti libri, sia online cercando `chi square table`.

Purtroppo c'è confusione nelle notazioni delle tavole numeriche, con il serio rischio di confondere nella pratica α con $1-\alpha$ usando le tavole. Soprattutto di confondere le colonne relative a 0.95 e 0.05. (E similmente 0.9 con 0.1, e 0.99 con 0.01).
Il quantile q_α di parametro n di solito viene denotato $\chi^2_{1-\alpha}(n)$. In una tavola numerica, si cerchi il valore ≈ 19.68, quantile di ordine $\alpha = 0.95$ relativo al parametro $n = 11$ (in certe tavole denotato r, ν...), **undicesima riga della tavola**, cioè fissiamo l'attenzione su $X \sim \chi^2(11)$:

– se *Link1* 19.68 è l'unicesimo valore della colonna 0.95, intendete

$P(X \leq 19.68) \approx 0.95$ che è l'α di questa Lezione: $q_\alpha = \chi^2_{1-\alpha}(n)$

$$P(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

$$\text{per esempio } q_{0.95} = \chi^2_{0.05}(n)$$

(ma si noti che nella notazione con la q non è specificata la dipendenza da n)

$$\text{e in particolare per } n = 11 \quad q_{0.95} = \chi^2_{0.05}(11) \approx 19.68$$

– se *Link2* 19.68 è l'unicesimo valore della colonna 0.05, intendete

$P(X \geq 19.68) \approx 0.05$ (del tutto equivalente a quella sopra) e bisogna calcolare 1− per avere l'α **"grande"** di questa Lezione. E conseguentemente si intendano tutti i valori della tavola.

Simili problematiche e soluzioni coi vari software.

Attenzione anche al fatto che il valore (approssimato) 19.68 può trovarsi scritto con migliore approssimazione 19.6751, o eventualmente anche altrimenti.

Ecco alcuni valori:

su alcune tavole →	0.95	0.90	0.10	0.05	0.01
su altre tavole →	0.05	0.10	0.90	0.95	0.99
n				$\chi^2_{0.05}(1)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(1)$ ↓	
1	0.004	0.02	2.71	3.84	6.63
2	0.10	0.21	4.61	5.99	9.21
3	0.35	0.58	6.25	7.81	11.34
4	0.71	1.06	7.78	9.49	13.28
5	1.14	1.61	9.24	11.07	15.09
6	1.63	2.20	10.64	12.59	16.81
7	2.17	2.83	12.02	14.07	18.48
8	2.73	3.49	13.36	15.51	20.09
9	3.32?	4.17	14.68	16.92	21.67
10	3.94	4.87	15.99	18.31	23.21
11	4.57	5.58	17.28	**19.68**	24.73
				↑ $\chi^2_{0.05}(11)$ *per altri* $\chi^2_{0.95}(11)$	

Ripetiamo che per noi 19.68 è $\approx \chi^2_{0.05}(11)$.

Eercizio$_\mu$ $\ast$ Testare l'ipotesi nulla dell'uniforme distribuzione per il campione 18 35 22.

TAVOLA DEI QUANTILI DEL CHI QUADRATO — 0.05

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68

SVOLGIMENTO

È usato lo standard del punto decimale.

L'ipotesi nulla H è l'uniforme distribuzione, che si spera di respingere:

$$H: \ (p_1 \, p_2 \, p_3\,) = \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\right)$$

$$A: \ (p_1 \, p_2 \, p_3\,) \neq \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\right)$$

e A è l'alternativa.
Con $k = 3$, $n_1 = 18$, $n_2 = 35$, $n_3 = 22$ e $n = 18 + 35 + 22 = 75$ dobbiamo verificare se

$$n\,p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, ..., k \ \wedge \ T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

È $n\,p_i = 75 \cdot \frac{1}{3} = 25 > 5$ per $i = 1, 2, 3$: la condizione è verificata, abbondantemente (e alcuni Autori richiedono la condizione > 10 invece che > 5).
Fissando il classico $\alpha = 0.95$, si trova nella tavola il quantile d'interesse:

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.05}(2) \approx 5.99$$

Statistica T_n:

$$T_{75} := \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_i - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{(18 - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(35 - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} + \frac{(22 - 75 \cdot \frac{1}{3})^2}{75 \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{7^2 + 10^2 + 3^2}{25} = \frac{158}{25} \approx 6.32 > 5.99$$

Il quantile è superato e allora

si respinge al livello 0.05 l'ipotesi dell'uniforme distribuzione.

(Ovvero, al livello 95%, come altri direbbe). (Si *respinge*, o si *rifiuta*).

ESERCIZIO$_\mu$ Si fa un sondaggio su questo quesito: "Quanto costa il regalo che vorreste a Natale, in euro, approssimato all'intero?"
Si ottiene questo dataset X:

250 700 200 30 69 400
30 50 29 120 110 100
800 9000 90 60 600
500 200 52 500 100
1129 150 0 200 679 20 50
500 3000 198 28 795
124 200 80 580 30 800
50 49 1500 100 1100 3500
180 0 5 0 50 50 900

(a) Eliminati gli outlier nulli, produrre il corrispondente dataset Y ottenuto con la sola cifra iniziale di ogni dato di X, e fare il corrispondente istogramma a barre con le frequenze relative percentuali a destra di ogni barra (orizzontale).
(b) Testare l'ipotesi che la cifra iniziale sua distribuita uniformemente (come molti

pensano dovrebbe essere e invece in generale non succede).

SVOLGIMENTO

(a) Dataset Y delle cifre iniziali, dopo l'eliminazione degli outlier nulli:
2 7 2 3 6 4
3 5 2 1 1 1
8 9 9 6 6
5 2 5 5 1
1 1 2 6 2 5
5 3 1 2 7
1 2 8 5 3 8
5 4 1 1 1 3
1 5 5 5 9

Rango del dataset: $n = 50$.

Frequenze assolute, e frequenze relative:
numero di 1, $n_1 = 12$, $f_1 = 12/50 = 0.24$
numero di 2, $n_2 = 8$, $f_2 = 8/50 = 0.16$
numero di 3, $n_3 = 5$, $f_3 = 5/50 = 0.1$
numero di 4, $n_4 = 2$, $f_4 = 2/50 = 0.04$
numero di 5, $n_5 = 11$, $f_5 = 11/50 = 0.22$
numero di 6, $n_6 = 4$, $f_6 = 4/50 = 0.08$
numero di 7, $n_7 = 2$, $f_7 = 2/50 = 0.04$
numero di 8, $n_8 = 3$, $f_8 = 3/50 = 0.06$
numero di 9, $n_9 = 3$, $f_9 = 3/50 = 0.06$

Istogramma a barre con le frequenze relative in percentuale:

```
1 |000000000000 24%
2 |00000000 16%
3 |00000 10%
4 |00 4%
5 |00000000000 22%
6 |0000 8%
7 |00 4%
8 |000 6%
9 |000 6%
```

(Che non pare molto uniforme).

(b) Test per l'uniformità di

valori	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequenze assolute	12	8	5	2	11	4	2	3	3

$$H: (p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6\, p_7\, p_8\, p_9\,) = \left(\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\right)$$

$$A: (p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6\, p_7\, p_8\, p_9\,) \neq \left(\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\right)$$

Dobbiamo verificare se

$$n\,p_i \geq 5 \quad \text{per } i = 1, \ldots, k \;\; et \;\; T_n := \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i} > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

Con $n = 50$ è $n\,p_i = 50 \cdot \frac{1}{9} > 5$ per $i = 1, \ldots, 9$. (La condizione è verificata).
Quantile, essendo $k = 9$ e fissando ragionevolmente $\alpha = 0.95$:

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.05}(8) \approx 15.51$$

Statistica T_n:

$$T_{50} := \sum_{i=1}^{9} \frac{(n_i - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{(12 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(8 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(5 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(2 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} +$$

$$+ \frac{(11 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(4 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(2 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(3 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} + \frac{(3 - 50 \cdot \frac{1}{9})^2}{50 \cdot \frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{532}{25} = 21.28 > 15.51$$

e superandosi il quantile

si rifiuta al livello 95% l'ipotesi dell'uniforme distribuzione

(Si noti che si riesce a respingerla anche al livello 99% ovvero 1% perché si supera anche il quantile $\chi^2_{0.01}(8) \approx 20.09$. Il p-value, il valore discriminante fra rifiuto e non rifiuto, verosimilmente non è lontano, ma è comunque $p < 0.01$, un buon risultato).

59.3 Densità di Benford

È addirittura possibile che il genere di dataset dell'esercizio precedente segua la *densità di Benford*

$$\left(\lg 2 \;\; \lg \frac{3}{2} \;\; \lg \frac{4}{3} \;\; \lg \frac{5}{4} \;\; \lg \frac{6}{5} \;\; \lg \frac{7}{6} \;\; \lg \frac{8}{7} \;\; \lg \frac{9}{8} \right)$$

ma come sappiamo $\lg 9 \approx 0.95$ e $\lg 8 \approx 0.9$ e allora $\lg \frac{9}{8} = \lg 9 - \lg 8 \approx 0.05$ e con questa p_9 non è verificata la condizione $n\,p_i > 5$ con $n = 50$: troppo pochi dati, non si può eseguire il test, e nemmeno riunendo le ultime 2 classi.

Una caratteristica della distribuzione di Benford è che la probabilità complessiva delle 3 cifre 1, 2 e 3 è maggiore della probabilità complessiva di tutte le altre 6 messe insieme, e nel nostro dataset avviene che 25 numeri su 50 iniziano per 1, 2 o 3. Un numero "qualunque", ma non iniziante per 0, proveniente dalla realtà sensibile – per quanto ciò possa significare – è più probabile che inizi per 1, 2 o 3 piuttosto che con 4, 5, 6, 7, 8 o 9, contrariamente a quello che si potrebbe pensare.

• • •

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (103) e (104), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

60 Test del χ^2 di indipendenza

60.1 Inquadramento della questione

In questa trattazione elementare, verrà considerato solo il caso più semplice, con 4 valori/dati. Fissiamo subito le idee su un esempio. Supponiamo di avere 280 monete uguali di sconosciuta probabilità di dare testa, e che a 50 di esse venga fatta meccanicamente una piccola incisione al centro sulla faccia della testa. Le monete trattate hanno tutte un'uguale sconosciuta nuova probabilità di dare testa. (Di maggiore interesse potrebbe essere il trattamento con un farmaco, e l'eventuale morte a 5 anni, ma le monete e i dadi restano modelli generali ottimali, anche perché da essi *a priori ci aspettiamo* di default un comportamento casuale, mentre per un farmaco saremmo portati a supporre causalità – contenendo la tal molecola *dovrebbe* fare un certo effetto – eventualmente inesistenti: nella *statistica medica* dobbiamo appunto verificare se funziona, *contando i morti*, per così dire). Lanciamo una volta ciascuna delle 280 monete e contiamo le teste nelle 2 classi. Supponiamo di avere questa situazione (risultato=viene 1)

	non risultato	risultato
non trattati	188	42
trattati	43	7

Naturalmente 43 + 7 sono le 50 monete trattate, e 188 + 42 sono le rimanenti 230, non trattate. Il trattamento ha diminuito la probabilità di dare testa? Verrebbe da dire di sì, perché fra i trattati la frequenza relativa di 1 è 7/50 = 0.14 mentre fra i non trattati è 42/230 = 0.183 ma dobbiamo ragionevolmente escludere un effetto casuale: tale miglioramento potrebbe apparire per caso anche se a nostra insaputa il tecnico preposto non avesse affatto compiuto l'incisione dichiarata.

Abbiamo una variabile aleatoria X con 2 valori, "trattate" e "non trattate", e una variabile aleatoria Y con 2 valori, "testa" e "croce". Il test statistico è definito da

$$H : \text{indipendenza} \qquad A : \text{non indipendenza}$$

(vorremmo escludere l'indipendenza, cioè che l'incisione non abbia prodotto risultato).

Come in tutti gli altri test statistici che consideriamo, si fisserà un livello di confidenza α, tipicamente $0.95 = 95\%$, ovvero un livello di significatività $1-\alpha$, tipicamente $0.05 = 5\%$.
(Si ritiene che per correttezza scientifica ovvero deontologica, questo valore vada fissato *prima* di fare i calcoli).

Si calcolerà uno *stimatore* (ovvero *statistica*) T, dalla formula alquanto complessa, e lo si confronterà col quantile $\chi^2_{1-\alpha}(k)$ del chi quadrato con

$$k := (m-1)\cdot(n-1) = (\#righe - 1) \times (\#colonne - 1) \tag{105}$$

gradi di libertà, (qua 1) e se T supera il quantile

$$T > \chi^2_{1-\alpha}(k) \tag{106}$$

si respinge l'ipotesi, altrimenti non la si respinge (che alcuni dicono "si accetta"), al livello di significatività $1-\alpha$ ovvero di confidenza α.

60.2 Semplice statistica per trial clinico

In pratica per la tabella 2×2

	guariti	non guariti
farmaco 1	a	b
farmaco 2	c	d

il calcolo completo è il seguente, al livello 0.05.

Rifiuto l'ipotesi nulla

$$H: \text{ il farmaco 1 equivale al farmaco 2}$$

se

$$\boxed{T := \frac{(a\,d - b\,c)^2\,n}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)} > 3.84} \qquad (107)$$

(Altri Autori usano una formula leggermente diversa e più complessa con la *correzione di Yates*).

(Si tratta ovviamente dell'equivalenza dei farmaci dal solo punto di vista delle guarigioni, non del costo o di un'eventuale tossicità a lunga scadenza, e la guarigione andrà ben definita, in particolare nella sua determinazione temporale).

Naturalmente il valore 3.84 è il quantile del chi quadrato (a 1 grado di libertà com'è dovuto per la tabella 2×2) al livello 0.05; e si potrà modificarlo per livelli diversi, in particolare 6.63 al livello 0.01; si veda la tavola del chi quadrato in 59.2.

Coi valori

	guariti	non guariti
xmicina	52	10
streptomicina	40	21

in `http://www.quadernodiepidemiologia.it/epi/assoc/chi_qua.htm` trovano $T = 5.46 > 3.84$ e concludono

> consente di ritenere che la differenza fra i due gruppi sia significativa al livello di probabilità 5% ma non al livello di probabilità 1%.

E infatti immettendo i dati per esempio in `https://www.socscistatistics.com/tests/chisquare/default2.aspx`, dove c'è un calcolatore online del chi quadrato, troviamo che

`chi-square statistic is 5.4607`

e che il valore discriminante fra il rifiuto e il non rifiuto cioè il

p`-value is .019449. Significant at p < .05.`

Naturalmente il valore 5.46 si ottiene con la (107), anche con la calcolatrice.

L'intero calcolo può essere fatto online gratuitamente anche per tabelle più grandi in altri siti web, oltreché con vari software statistici usati nelle Scienze Applicate.

Varie condizioni sulla non eccessiva "capricciosità" dei 4 valori vengono fatte dai vari Autori, per garantire la bontà della comunque inevitabile approssimazione del test. La questione è comunque contemporaneamente complessa e largamente arbitraria, e non la tratteremo. Confidiamo piuttosto che il software che il ricercatore poi userà nella pratica, dia un suo avvertimento in casi dubbi.

60.3 Test di Fischer esatto

Si può evitare l'approssimazione che è intrinseca nel test del chi quadrato d'indipendenza col *Test di Fischer esatto*, che ha una formula molto più complicata che viene comunque calcolata in un'istante dai computer, a meno che i numeri non siano esorbitanti.

Il test di Fischer esatto è migliore del test del chi quadrato, che tuttavia è in generale ancora preferito *per tradizione*.

60.4 Morti per tutte le cause

E certo, una terza colonna, con i morti per tutte le cause, *all causes*, sarebbe utilissima per confronto. Per esempio così:

	malattia	non malattia	morti per tutte le cause
vaccino	a	b	c
placebo	d	e	f

Su trial clinici grandi e sufficientemente prolungati nel tempo, i morti ci saranno inevitabilmente, in entrambe le classi: come vago ordine di grandezza, si consideri che in un anno muore circa l'1% di un insieme di persone prese a caso in Stati sufficientemente sviluppati.

60.5 Il solito problema: cosa misuriamo? Placebo

Con quale tipo di placebo fare il confronto?
In passato erano comuni trial clinici con placebo tutt'altro che inerti, per esempio un altro vaccino o una soluzione di idrossido di alluminio testando il vaccino HPV. Qua possiamo solo rimarcare lo sconcerto di taluni per questa pratica, senza poter approfondire. Ma nei recenti (2020) trial per i vaccini contro il covid-19 si è salutato con compiacimento l'uso della vera soluzione salina come placebo.

60.6 Trucchi del mestiere

E certo sarebbe una cosa carina che il doppio cieco non venga beffato con pillole... di diversi colori (vedi https://www.theguardian.com/business/2014/apr/10/tamiflu-saga-drug-trials-big-pharma

Ma non ci si illuda troppo. Nel trial clinico che ha portato all'autorizzazione in via emergenziale del vaccino contro il covid-19, la Pfizer ha presentato un testo impresentabile per uno statistico (eppure è stato presentato e approvato) in cui il numero di *exclusions* (casi esclusi per un qualche motivo: uno dei grossi problemi della Statistica nel mondo reale) era quintuplo nel gruppo vaccino rispetto al gruppo placebo, senza dare alcuna spiegazione plausibile per questo fatto, inverosimile dal punto di vista statistico: se veramente chi somministrava vaccini e placebo non sapeva, le exclusions avrebbero dovuto trovarsi bilanciatamente nei due gruppi. Si veda sul British Medical Journal https://blogs.bmj.com/bmj/2021/01/04/peter-doshi-pfizer-and-modernas-95-effective-vacci

> What is concerning is the imbalance between randomized groups in the number of these excluded individuals: 311 from the vaccine group vs 60 on placebo.

Ma le manipolazioni statistiche andavano ben oltre, si veda https://blogs.bmj.com/bmj/2021/02/05/clarification-pfizer-and-modernas-95-e riducendosi la dichiarata efficacia del 95% a 2 possibilità

> calculations of 19% and 29% vaccine efficacy

Ma poi, in definitiva, è saltato fuori che c'erano taroccamenti sui dati stessi: https://www.bmj.com/content/375/bmj.n2635, per esempio

> vaccine packaging materials with trial participants' identification numbers written on them left out in the open, potentially unblinding participants

L'importante, comunque, è che il vaccino previene il contagio, la contagiosità, la malattia, la malattia severa, la terapia intensiva, e la morte, nel mondo reale, al di là del trial clinico iniziale: https://www.adnkronos.com/vaccini-moderna-e-pfizer-protezione-per-anni-dal- 3IkcynLUR4dzdvJPbVXvyL

E, per buona misura, che la ricercatrice che ha documentato fotograficamente i taroccamenti sia stata licenziata. Queste cose non s'han da fare, perchè potrebbero minare la *fede nella Scienza*.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria l'unica formula *contemporaneamente* numerata *et* riquadrata, la (107), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

61 Alcuni Test di Student

In questa Lezione α è un numero positivo e minore di 1 ma "grande", diciamo $> 0.5 = 50\%$, tipicamente $0.95 = 95\%$ (oppure $0.99 = 99\%$).

Diremo i test
al livello di significatività $1 - \alpha$,
al livello di confidenza α
e altri diranno, e anche noi talvolta, semplicemente,
al livello α
al livello $1 - \alpha$, per esempio 5%, da cui traiamo $\alpha = 0.95$.
Stando attenti a non confondere α e il suo complemento: α è grande in questa Lezione, $1 - \alpha$ piccolo; entrambi fra 0 e 1.

61.1 Test di Student per la media $\leq$ e $=$

Supponiamo di avere dei numeri – per esempio parametri fisiologici, naturali o conseguenti ad una terapia – e di chiederci se la loro media è maggiore di 1492, per esempio.
A questo la Statistica antica, in pratica la Statistica Descrittiva, risponde molto semplicemente: si fa la media aritmetica e si risponde "sì" se è > 1492.
Invece la Statistica moderna, in pratica la Statistica Inferenziale, accetta che la media sia > 1492 in maniera statisticamente significativa, o per meglio dire respinge l'ipotesi che sia ≤ 1492, solo se la media aritmetica è ben più grande di 1492.

Quanto più grande? Fissato il livello di confidenza
– basterà poco se la numerosità n è grande.
– ci vorrà molto se la variabilità S^2 è grande.

Il tutto è risolto da una formula. Essa combina n e S^2 e α coi quantili di Student. E risponde *sì* o *no* in termini di *vero* o *falso*.

Teorema. Sia $X_1,...,X_n$ un campione gaussiano cioè $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ sono indipendenti (o anche non gaussiano se n è sufficientemente grande), sia μ_0 un numero reale. Allora (coi soliti stimatori $\bar{X}_n$ e S_n^2 di media e varianza) si hanno questi 2 test al livello α (e altri dicono al livello $1-\alpha$; in ogni caso per noi α è "grande", tipicamente 0.95 o addirittura 0.99):

$$\begin{cases} H : \mu \le \mu_0 \\ A : \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad rifiuta\, H\, se\ \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} > t_\alpha(n-1) \tag{108}$$

$$\begin{cases} H : \mu = \mu_0 \\ A : \mu \ne \mu_0 \end{cases} \qquad rifiuta\, H\, se\ \left|\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}\right| > t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1) \tag{109}$$

Gli autori che usano $1-\alpha$ per α hanno formule diverse. Quanto grande n, nel caso non gaussiano cioè normale? Secondo diversi Autori $n > 30$ oppure $n > 120$. Se normale, va bene per qualunque n.

In pratica. Coi valori $x_1,..,x_n$ si calcola lo stimatore T che è

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \qquad \text{o nel secondo caso il valore assoluto di questo}$$

e
se supera il quantile si respinge l'ipotesi (vero = sì = rifiuto H) altrimenti "non la si respinge" (falso = no = non rifiuto H).

61.2 Note euristiche sui 2 Test di Student

Consideriamo la formula (108).
– Supponiamo dapprima fissato il livello α.
Con n grande, T tende a superare il quantile anche con piccola superiorità di $\bar{X}_n$ su μ_0.
Con S^2 grande, T stenta a superare il quantile anche con grande superiorità di $\bar{X}_n$ su μ_0. (Dati inconsistenti, si contraddicono).
– Ma anche α partecipa, e infatti è nel quantile.
Più α è piccolo, ovvero più è grande il livello di confidenza $1-\alpha$

ricercato, più cresce il quantile ovvero la soglia da superare (col triplice contributo combinato di grande n, grande sopravanzare di $\bar{X}_n$ su μ_0, e/o piccolo S^2).

Considerazioni analoghe valgono per la formula (109).

61.3 Esempio estremo per fissare le idee

Con $n = 2$, due soli dati, è $n - 1 = 1$ e ci serve $t_\alpha(1)$ da trovarsi con le tavole o i software o addirittura coi calcoli perché $f(t;1)$ è la densità di Cauchy:

$$f(t;1) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t;1) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\arctan x - \frac{1}{\pi}\arctan(-\infty) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$$

e la sua inversa dà i quantili di student $t_\alpha(1)$ risolvendo

$$F(x) \overset{EQ}{=} \alpha \qquad > 0.5 \text{ (“grande”)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x = \alpha \qquad \Big/ + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\arctan x = \alpha - \frac{1}{2} \qquad \Big/ \cdot \pi$$

$$\arctan x = \pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

un'attenta analisi mostrerebbe che possiamo applicare la tangente

$$\Big/ \tan \qquad \text{(che “mangia” l'arcotangente)}$$

$$x = \tan\left(\pi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right)$$

che è il quantile di Student cercato,

$$t_\alpha(1) = \tan(\pi(\alpha - 0.5)) \qquad \alpha > 0.5$$

e alcuni valori li avremo in forma esatta:
($t_{0.5}(1) = 0$, basta che $\bar{X}_n = \bar{X}_2 > \mu_0$, ma l'affermazione è irrilevante per troppo basso livello di confidenza, 50%)
$t_{\frac{2}{3}}(1) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$
$t_{\frac{5}{6}}(1) = \sqrt{3} \approx 1.73$
($t_1(1) = +\infty$, cioè mai: livello di confidenza voluto troppo alto)
ottendendosi questa tavola dei quantili di Student

α	0.5	0.667	0.833	1
$t_\alpha(1)$	0	0.577	1.73	$+\infty$

che fanno capire chiaramente la situazione. Ma nessuno di quei 4 quantili è usato nella pratica. Più significativamente, con una calcolatrice che ci dia la tangente di
$\pi(0.95 - 0.5)$
$\pi(0.99 - 0.5)$
$\pi(0.995 - 0.5)$
otteniamo questa tavola dei quantili di Student

α	0.95	0.99	0.995
$t_\alpha(1)$	6.31375	31.8205	63.6567

Li troviamo confermati nella tavola della Lezione (46). Indicati con "one tail", cioè test "a una coda", perché indaghiamo sul $\leq$ e non $\neq$, che sarebbe a 2 code.

Dal sito del NIST in https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda3672.htm traiamo la seguente più completa tavola dei quantili di Student.

ν 0.90 0.95 0.975 0.99 0.995 0.999
1. 3.078 6.314 12.706 31.821 63.657 318.313
2. 1.886 2.920 4.303 6.965 9.925 22.327

3.	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4.	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5.	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6.	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7.	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.782
8.	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.499
9.	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.296
10.	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.143
11.	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.024
12.	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.929
13.	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14.	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15.	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16.	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17.	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18.	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19.	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20.	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21.	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22.	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23.	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24.	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25.	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26.	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27.	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28.	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29.	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30.	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31.	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32.	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33.	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34.	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35.	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36.	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37.	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38.	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39.	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40.	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
41.	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301
42.	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296
43.	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291
44.	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
45.	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
46.	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47.	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48.	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49.	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50.	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
51.	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258
52.	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255
53.	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251

54.	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248
55.	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
56.	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242
57.	1.297	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239
58.	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237
59.	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234
60.	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
61.	1.296	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229
62.	1.295	1.670	1.999	2.388	2.657	3.227
63.	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225
64.	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223
65.	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	3.220
66.	1.295	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218
67.	1.294	1.668	1.996	2.383	2.651	3.216
68.	1.294	1.668	1.995	2.382	2.650	3.214
69.	1.294	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213
70.	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
71.	1.294	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209
72.	1.293	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207
73.	1.293	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206
74.	1.293	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204
75.	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643	3.202
76.	1.293	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201
77.	1.293	1.665	1.991	2.376	2.641	3.199
78.	1.292	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198
79.	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640	3.197
80.	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
81.	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194
82.	1.292	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193
83.	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191
84.	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190
85.	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189
86.	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.188
87.	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187
88.	1.291	1.662	1.987	2.369	2.633	3.185
89.	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184
90.	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
91.	1.291	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182
92.	1.291	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181
93.	1.291	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180
94.	1.291	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179
95.	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178
96.	1.290	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177
97.	1.290	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176
98.	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175
99.	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175
100.	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
$+\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Si noti nell'ultima riga il limite all'infinito e in particolare il valore

$$1.96 \approx \phi_{0.975} = t_{0.975}(+\infty)$$

Esempio. Dal classico Matematica e Statistica – Le basi per le Scienze della vita, di Marco Abate.

> *Il proprietario dell'azienda vinicola da te preferita teme che il tasso alcolico del suo vino quest'anno possa non essere più pari al 12.5% indicato in etichetta e ti chiede d'investigare. Misurando il tasso alcolico di 6 bottiglie, ottiene i seguenti valori:*
>
> *11.5, 11, 12.5, 13.1, 12.7, 12.4 .*
>
> *Supponendo che il tasso alcolico nel vino segua una distribuzione normale, verifica o smentisci il timore del proprietario.* L'ipotesi nulla è che il tasso alcolico medio del vino sia 12.5%. Siccome abbiamo supposto una distribuzione normale, possiamo applicare il test T con $\nu = 6 - 1 = 5$ gradi di libertà. La media dei campioni è $M_6 = 12.2$ mentre la deviazione standard campionaria è $s_6 \simeq 0.79$. Quindi il valore del test è:
>
> $$|T_5| = \frac{12.2 - 12.5}{0.79}\sqrt{6} \simeq 0.93.$$
>
> (...) il valore di soglia al livello di affidabilità 0.1 (QUINDI PER NOI $\alpha = 0.9$) (...) è 2.015, ben più alto del valore che abbiamo ottenuto. Quindi i dati statistici da te raccolti non smentiscono l'ipotesi nulla e non confermano il timore del proprietario.

Si noti che noi abbiamo agito come un'autorità di controllo: vogliamo dimostrare che non è 12.5 e allora mettiamo come ipotesi alternativa proprio quella. Solo al 90% è stato fatto, poco.
Il valore 2.015 è il quantile $t_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1)$ cioè $t_{\frac{1+0.9}{2}}(6-1)$ cioè $t_{0.95}(5)$.

Esempio. Del libro di Paolo Baldi già citato:

> L'altezza media delle reclute alla visita di leva del 1970 era di 169 cm; 121 reclute vengono scelte a caso nel 1980. I valori di media varianza del campione sono:
>
> $$\bar{X} = 171 \quad \leftarrow \textit{intende } \bar{X}_n \textit{ con } n{:=}121$$
>
> $$S^2 = 85 \quad \leftarrow \textit{intende } S^2_n \textit{ con } n{:=}121$$
>
> Si può affermare che l'altezza media delle reclute è aumentata?

(Siccome si vuole dimostrare che l'altezza è aumentata, si metta come ipotesi che non è aumentata, e siccome nulla è detto sul livello del test si usi la classica soglia del 5%).

Applichiamo la (108):

$$\begin{cases} H : \mu \le 169 \\ A : \mu > 169 \end{cases} \qquad rifiuta\ H\ se\ \sqrt{121}\,\frac{171-169}{\sqrt{85}} > t_{0.95}(120)$$

$$11\,\frac{2}{9.22} \approx 2.386 > 1.645 = t_{0.95}(+\infty) \approx t_{0.95}(120)$$

Sulla tavola data prima, abbiamo

$t_{0.95}(100) \approx 1.660$

$t_{0.95}(+\infty) \approx 1.645$

ed entrambi possono essere presi come approssimazione di $t_{0.95}(120)$, concludendo analogamente.

Si respinge al livello 0.05 l'ipotesi che l'altezza non sia aumentata.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (108) e (109), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

62 Test di Student per il confronto di medie

Un problema classico della Statistica è determinare se 2 popolazioni hanno la stessa media, a partire da campioni di esse. Per fissare le idee consideriamo il problema:

il tempo di attesa in 2 farmacie è uguale?

Definiamo, in via semplificata 2 variabili aleatorie:

X = tempo di attesa nella farmacia x

Y = tempo di attesa nella farmacia y.

Naturalmente sono variabili aleatorie: non c'è in nessuna delle 2 farmacie un tempo di attesa fisso e costante, con ogni cliente si produce un valore che è una determinazione della variabile aleatoria X o Y rispettivamente.

Ciascuna delle 2 variabili aleatorie ha una sua distribuzione, che non conosceremo mai esattamente, con una sua speranza matematica, che ugualmente non conosceremo mai esattamente, ma è proprio il confronto statistico di quelle 2 speranze matematiche che ci interessa. Le chiameremo μ_X e μ_Y.

La Statistica fra poco ci insegnerà come rifiutare o non rifiutare l'ipotesi nulla dell'uguaglianza con ragionevole certezza statistica, purchè disponiamo di un buon numero n di determinazioni di X e un buon numero m di determinazioni di Y. La questione si dirime con uno stimatore da confrontare con un quantile di Student, e ha una formula molto complicata, ma noi considereremo solo il caso semplice in cui $n = m$, cioè – nell'esempio – misuriamo un ugual numero di tempi di attesa nelle 2 farmacie.

Prima di avere le misurazioni ovvero i valori numerici, abbiamo 2 campioni aleatori

$X_1,\ldots,X_n$

$Y_1,\ldots,Y_n$.

Dopo la sperimentazione, avremo 2 dataset numerici

$x_1,\ldots,x_n$

$y_1,\ldots,y_n$.

Teorema. Siano $X_1,...,X_n$ un campione aleatorio (gaussiano oppure con n sufficientemente grande) di media μ_X e varianza σ_X^2 sconosciute e $Y_1,..,Y_n$ un campione aleatorio (gaussiano oppure con n sufficientemente grande) di media μ_Y e varianza $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 =: \sigma^2$ (uguale a quella del primo campione e sconosciuta), con le X_i e le Y_i indipendenti fra loro.
Sia

$$T := \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}}\sqrt{n} \tag{110}$$

Si ha questo test (bilatero) al livello $1-\alpha$ (e altri dicono al livello α; in ogni caso α è "grande", tipicamente 0.95):

$$\begin{cases} H : \mu_X = \mu_Y \\ A : \mu_X \neq \mu_Y \end{cases} \qquad rifiuta\ H\ se\ |T| > t_{\frac{1+\alpha}{2}}(2n-2) \tag{111}$$

Nota. Purtroppo come si vede c'è la condizione molto limitativa che X e Y abbiano uguali varianze.

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule (110), (111), oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

63 Il test dei ranghi, e note finali

63.1 Testing monotonicity of ranks

To test that to more pigs correspond more deaths, or more cases, or whatever, one may test the monotonicity of their respective ranks. Being n the sample size of X and Y and ρ_s the Spearman's rank correlation coefficient, which is exactly the Pearson's correlation index for ranks, the significance may be tested using

$$\rho_s := 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n\left(n^2 - 1\right)} \tag{112}$$

where the d are the differences of the corresponding ranks. Just as in https://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s_rank_correlation_coefficient#Example.
At least if $4 \leq n \leq 30$ a table([127]) of critical values for the 1-tail test for increasing monotonicity is available

H_0: X and Y are independent

H_A: there is a trend associating larger values of X to larger values of Y.
The null hypothesis H_0 is refused at significance level α if ρ_s (in that text ρ_s is denoted r_s) is > than the corresponding critical value of the table for α and n.

Here are some values of that table.

[127] Wayne W. Daniel, Chad L. Cross, Biostatistica. Concetti di base per l'analisi statistica delle scienze dell'area medico-sanitaria, Traduttore: M. Attanasio, V. Capursi, Curatore: C. Frigo, E. Perissinotto, Editore: Edises, Terza edizione (2019), p. 737, A-104

n	.001	.005	.010	.025	.050	.100
.						
.						
.						
6	–	.9429	.8857	.8286	.7714	.6000
.						
8	.9286	.8571	.8095	.7143	.6190	.5000
9	.9000	.8167	.7667	.6833	.5833	.4667
10	.8767	.7818	.7333	.6364	.5515	.4424
.						
12	.8182	.7273	.6713	.5804	.4965	.3986
.						
.						
.						
24	.6070	.5200	.4748	.4061	.3435	.2704
.						
.						
.						

64 Matematica delle Epidemie

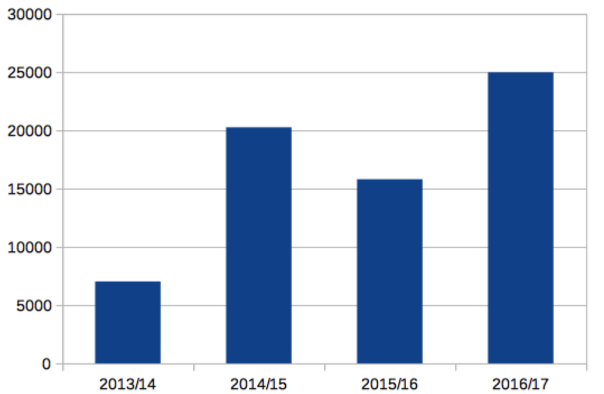


Figure 40: Morti stimati per epidemia di influenza.
Dati in: Rosano A, Bella A, Gesualdo F, Acampora A, Pezzotti P, Marchetti S, Ricciardi W, Rizzo C. Investigating the impact of influenza on excess mortality in all ages in Italy during recent seasons (2013/14-2016/17 seasons). Int J Infect Dis. 2019 Nov;88:127-134. doi: 10.1016/j.ijid.2019.08.003. Epub 2019 Aug 8. PMID: 31401203. https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/31401203/

Figure 41: Dal sito web di EuroMOMO: eccessi di mortalità in alcuni stati. In Italia e Paesi Bassi sono ben evidenti gli effetti delle epidemie di influenza (in senso lato: la morte sopravviene per varie cause) e soprattutto della pandemia di covid-19: si osservino in particolare i tremendi picchi della primavera 2020.

64.1 Il modello SIR dell'epidemiologia

Ecco un classico sistema di equazioni differenziali dell'epidemiologia:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{\beta IS}{N}, \\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases}$$

nelle 3 funzioni incognite $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, *susceptible*, *infectious*, *removed*, in italiano detti anche (ma non è l'esatta traduzione) Suscettibile, Infetto, Risolto (ma in Risolto stanno sia i guariti che i deceduti). Naturalmente $\frac{dS}{dt}$ è solo una scrittura alternativa per S', ovvero $S'(t)$.

> Questo modello è ragionevolmente predittivo per le malattie infettive che vengono trasmesse da uomo a uomo e in cui il recupero conferisce resistenza duratura (Wikipedia, l'enciclopedia libera, letto il 10 novembre 2021).

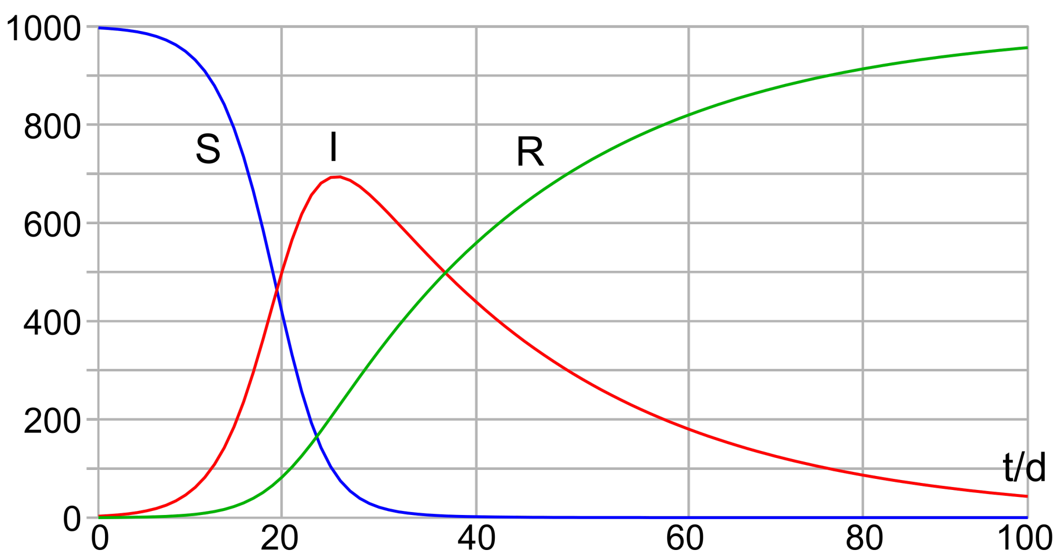


Figure 42: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SIR-Modell.svg, By Klaus-Dieter Keller. Valori iniziali $S = 997$ e $I = 3$, $R = 0$ (cioè 3 infetti su 1000), con parametri $\beta = 0.0004$, $\gamma = 0.04$.

64.2 Il modello logistico e le loglet

Nell'evoluzione temporale quantitativa dei contagi di un'epidemia talvolta si possono riconoscere varie campane logistiche che si sommano, di differenti ampiezze e sfasamenti temporali. Questo è risultato molto evidente col covid-19 in Italia nel 2020-21, vedasi la Figura 43. L'effetto complessivo maschera alquanto le singole campane, le *loglet*.

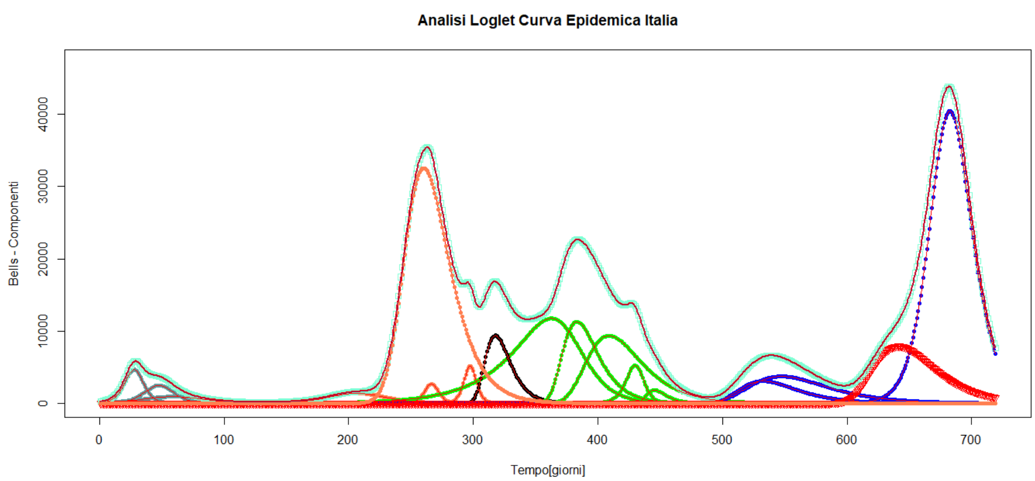


Figure 43: Loglet per contagi SARS-CoV-2, 2020-2021. By Carlo Del Vecchio.

È plausibile (ma non importa qua dimostrarlo) che la campana rossa nel grafico, a destra, sia dovuta essenzialmente alla variante delta del virus SARS-CoV-2, e quella ancora più a destra, tratteggiata in violetto, alla variante omicron. In effetti questo grafico è stato calcolato verso il 22 dicembre 2021 e quindi l'ultimo picco e la successiva discesa rappresentano una previsione, basata appunto sul modello delle loglet. (Per essere precisi nel calcolo, fatto con un software, sono stati considerati i "casi medi giornalieri" quindi mediati rispetto al weekend o alle anomalie).

Sulla *decomposizione multilogistica* si veda per esempio *Reproducing country-wide COVID-19 dynamics can require the usage* *of a set of SIR systems* (di Eugene B. Postnikov, 2021) in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7797172/):

> the multilogistic decomposition of such epidemiological curves reveals components, which are quite close to the solutions of the SIR model in logistic approximations characterised by different sets of parameters including time shifts. This line of reasoning is confirmed by processing data for Spain and Russia in details and, additionally, is illustrated for several other countries.

64.3 La pandemia 2020-2021 – i numeri e le chiacchiere

Prima di tutto, in un tempo caratterizzato da fake news sulla pandemia (2020-2021) dai livelli più popolari ai livelli istituzionali più alti, segnaliamo alcuni SITI SERI dove reperire DATI e non OPINIONI e CHIACCHIERE.

Italia:
Istituto Superiore di Sanità, dipendente dal Ministero della Salute:
– al 16 dicembre 2020
https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/bollettino/Report-COVID-2019_16_dicembre.pdf
– e in aggiornamento continuo
https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/sars-cov-2-decessi-italia
https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/sars-cov-2-dashboard

Europa: EuroMOMO:
https://www.euromomo.eu/graphs-and-maps

– qua finisce il mondo dei dati sicuri – *hic sunt dracones* –

Mondo: Worldometer:
https://www.worldometers.info/coronavirus/
Il database Worldometer è ben descritto da Wikipedia:

> Worldometer (...) is a reference website that provides counters and real-time statistics for diverse topics.
> (...)
> is managed by "an international team of developers, researchers, and volunteers"

Di fatto raccoglie i dati dei vari Stati al livello più ufficiale possibile, e di meglio non c'è, per il mondo intero. Ma i dati di molti Stati sono sicuramente fasulli comunque. Leggiamo([128]) in un preprint:

> of course in no statistic about the epidemic, data of Turkmenistan may be used, a country declaring (till November 2020) no deaths, no cases, and ranking 180 in the *press freedom index* in 2020, among 180 countries.

64.4 L'arbitrarietà dei modelli previsionali

Leggiamo sul prestigioso Nature.com in https://www.nature.com/articles/s42254-020-0188-2.pdf (letto il 13 giugno 2020)

> At first, epidemiologists can only estimate the parameters that concern the disease itself, such as how readily it is transmitted, and subsequently update the estimations. (...)
>
> But even if every model parameter were well-quantified, most predictions won't come true. (...)
>
> In other words, epidemiological modelling is messy. It attempts to squeeze as much useful information as possible from limited noisy data that describe the complex nonlinear system of an infectious disease interacting with human society. There are no controlled experiments. Thus, although the equations that describe a susceptible-infectious-recovered epidemiological model are

[128] A. Soranzo: In the first wave of the 2020 pandemic in several areas more sunlight less pandemic, more pigs more pandemic, and lower correlations with some other livestocks. (December 2020) ResearchGate, DOI: 10.13140/RG.2.2.29852.31367

> simple to write down, forecasting how a disease will spread, even in the short term, is a difficult business.

Esempio. Vediamo un testo dei prestigiosi CDC relativo all'epidemia Covid-19 del 2020, `https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/hcp/planning-scenarios-h.pdf` (letto il 20 giugno 2020), tutto pieno di numeri che senz'altro danno al profano l'impressione di grande scientificità.

> CDC and the Office of the Assistant Secretary for Preparedness and Response (ASPR) have developed five COVID-19 Pandemic Planning Scenarios that are designed to help inform decisions by modelers and public health officials who utilize mathematical modeling. The planning scenarios are being used by mathematical modelers throughout the Federal government. Models developed using the data provided in the planning scenarios can help evaluate the potential effects of different community mitigation strategies (e.g., social distancing). (...)

Quindi scenari utizzabili per decisioni politiche ("mitigation strategies") di impatto enorme sulle persone (lockdown).
Continuiamo a leggere:

	scenario 1	**scenario 2**	**scenario 3**
....			
Infectiousness of asymptomatic individuals relative to symptomatic individuals Source: Assumption, ASPR and CDC	50%	100%	

L'enorme differenza fra le stime nei 2 diversi scenari mostra l'arbitrarietà dei parametri di base usati poi nelle famose precise equazioni – che saranno pure precise, ma con parametri di ingresso così diversi daranno risultati molto diversi. E d'altra parte, è ben detto che, nonostante testi di appoggio, sono semplicemente ipotesi (scrive "assumption").
Continuiamo a leggere:

Time to seek care (outpatient)	$\leq$ 2 days: 35%
Source: Survey of persons with	3 – 7 days: 50%
Influenza like illness (ILI), CDC†	$\geq$ 8 days: 25%

La somma delle percentuali è 110%. ☹
Come direbbe qualcuno scherzosamente, bene ma non benissimo.
E questi sono i CDC, considerati un riferimento mondiale.

64.5 Il tasso di letalità

Veniamo ora a un concetto fondamentale nella matematica delle malattie e quindi in particolare delle epidemie: il **tasso di letalità** di una malattia – talvolta riportato semplicemente come *letalità* della malattia.
Nella sostanza – ma si vedano le precisazioni successive – **è la probabilità di morire in caso di una certa malattia**

$$P(muore|ha\,malattia)$$

come leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Tasso di letalità* (letto il 20 giugno 2020):

> [indica] la probabilità di morire se si è afflitti da una specifica malattia

e ovviamente è necessario prefissare un intervallo di tempo.
Naturalmente questa probabilità è da intendere in senso frequentista, cioè in pratica, come leggiamo a quella stessa voce

> indica la proporzione, tipicamente percentuale, di decessi per una determinata malattia sul totale dei soggetti

ammalati in un determinato arco temporale.

Per esempio, se muoiono 25 ogni 1000 malati, la letalità è 2.5% ovvero la probabilità di morire è del 2.5%, con tutti i limiti del concetto probabilistico.
Ancora ci avverte quel testo

> Tale valore è estremamente variabile in relazione alla durata dell'osservazione, per questo va contestualizzato in rapporto a un intervallo di tempo. (...) Si usa in particolar modo per le malattie infettive acute, mentre il suo utilizzo nelle condizioni croniche è meno indicativo considerando l'ampiezza della finestra temporale

In pratica, in via semplificata e con molti caveat,

$$\boxed{\text{letalità} = \frac{morti}{casi} = P(muore|malato)} \tag{113}$$

ma con l'avvertenza che in caso di malattia virale, e in particolare per la pandemia del covid-19, "malato" sarà da intendere nel senso di "caso", cioè in pratica contagiato, anche se asintomatico, e quindi non affatto ammalato. Per la pandemia del covid-19, in pratica, è il positivo al SARS-CoV-2, anche se asintomatico e quindi non affatto affetto da covid-19 (che presupporrebbe i sintomi clinici).
Nota. Senza voler qua fare Medicina, diamo però qualche indicazione sul fatto che

è un valore difficile da quantificare oggettivamente

perché dipende da chi si definisce affetto dalla malattia e chi no.
Consideriamo ad esempio una malattia virale.
Prima di tutto sgombriamo il campo dall'ipotesi ingenua che si conteggino i *malati* in senso *clinico*, le persone che effettivamente *stanno male* per la malattia considerata.
Internazionalmente si considera *caso* ("case") chi "ha il virus", rivelato da uno specifico test, non chi "sta male". Spesso sta benissimo ("asintomatico").
E qua si capisce bene che non c'è un confine netto fra chi ha

il virus e chi non ce l'ha, a meno che non vogliamo considerare contagiato un soggetto che ha in corpo

2 virus soli, o 4 virus soli, o 8 virus, o 16 virus...

che magari non finiranno neppure sul *tampone* con cui si farà il test. È evidente che se – per pura ipotesi – si facessero 2 test a 1 soggetto che ha pochi virus, potrà benissimo succedere che in uno risulti positivo e nell'altro negativo. Non c'è un confine netto fra il *caso* e il *non caso*. E questo è solo un aspetto – di gusto diciamo così *matematico* – della più ampia problematica dei *falsi positivi* e *falsi negativi*.

Concretamente, nel pieno dell'epidemia Covid-19 del 2020 circolavano valori della letalità in Italia in un range vastissimo, forse un po' centrato su 1-2%, ma esteso almeno da 0.8% a 13.7%, a seconda delle fonti – un rapporto 1:17 circa fra minimo e massimo.([129])

D'altra parte, anche facendo la tara di tutte queste problematiche, non c'è dubbio che la letalità del covid-19 in Italia sia molto variata nel tempo, passando grosso modo da un 15% della primavera del 2020 a un 2% abbondante dell'inverno 2021-2022. Calcolare una letalità complessiva sui 2 anni certamente si può fare ma in pratica non significa nulla.

Ma, per il singolo, la letalità stessa, anche se ben determinata temporalmente, non significa nulla, data la sua enorme variabilità nelle fase d'età: che muoia 1 contagiato su 50 è mostruosamente pessimistico per un ventenne e molto ottimistico per un novantenne.

Si noti comunque che non solo i diversi stati hanno usato diversi criteri per decidere chi è un caso, ma anche nella stessa Italia le regole sono cambiate ripetutamente, anche a livello locale. Solo un indizio – espressivo – su un argomento che meriterebbe più spazio:

> Riconteggiare i ricoveri per Covid, avendo cura di stral-

[129] https://www.primocanale.it/notizie/polemica-sui-numeri-del-coronavirus-bonsignore-non-ci-sono-html letto il 20 giugno 2020

ciare dai report i pazienti "negativi" seppur ancora in ospedale e quelli accolti in reparti non dedicati ai casi "acuti". Obiettivo (non scritto): tenere la Lombardia lontano dalle soglie d'allerta che fanno scattare il passaggio in fascia gialla e quindi le restrizioni al commercio e alla mobilità. L'indicazione arriva dalla direzione generale Welfare del Pirellone ed è indirizzata ai direttori generali delle Ats. https://milano.corriere.it/notizie/cronaca/21_novembre_24/covid-lombardia-ricoveri-cambia-co shtml?refresh_ce

E poi c'è tutta la questione dei cicli di amplificazione del test: è ovvio che con 45 o 50 cicli si trovano positivi soggetti che non lo risulterebbero con 25; eppure da 2 anni (2020-2021) la questione non è ancora ben definita...

Tasso di letalità per classi di età.
Naturalmente si potrà considerare il tasso di letalità per singole classi di età:

$$P(muore|ha\, malattia\, et\, n < anni < m)$$

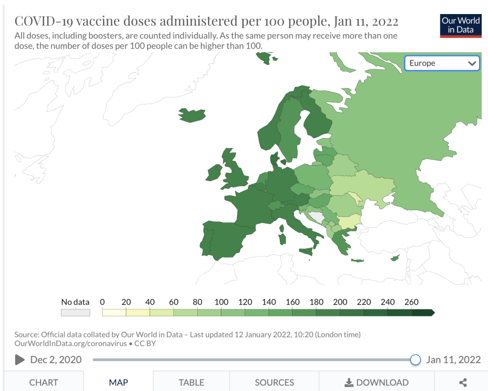
Per esempio, con riferimento alla prima ondata della pandemia in Italia nel 2020 (https://www.epicentro.iss.it/coronavirus/bollettino/Report-COVID-2019_22_luglio.pdf)

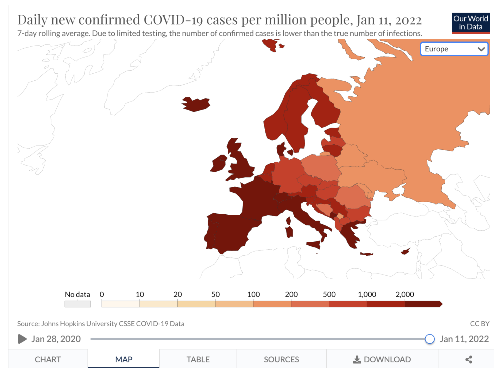
$$P(muore|positivo\, SARS - CoV - 2\, et\, 10 \leq anni \leq 19) = 0.000\,00$$

(Nessun morto fra i casi in quella classe di età, se ce ne fosse stato 1 fra i 34 142 morti si sarebbe avuto 0.000 03).

64.6 Mappe coropletiche

Strumento della Statistica Descrittiva particolarmente utile per la rappresentazione delle incidenze e dei tassi di vaccinazione sono le mappe coropletiche. In esse i dati sono rappresentati con scale di colori.
Ecco rappresentati gli ultimi dati disponibili a livello europeo.





*

Oggi è il 12 gennaio 2021 e domani si conclude il Corso di Matematica per Farmacia dell'Università degli Studi di Trieste, per il quale questa dispensa è stata realizzata.

*

Il problema non è che le persone siano ignoranti. Il problema è che le persone sono istruite quel tanto che basta per credere a ciò che è stato loro insegnato e non abbastanza istruite per mettere in dubbio qualsiasi cosa da ciò che è stato insegnato loro."

(Richard Feynman – Nobel per la Fisica)

65 Note finali sulla Statistica

Ci sono tre livelli di menzogna, via via più gravi: le bugie ufficiose, le bugie malevole, e la statistica.

65.1 Quale misurazione è più profittevole?

Sottolineiamo ancora una volta l'importanza di **cosa si misura** per valutare l'efficacia di un farmaco, o in generale di un trattamento sanitario. Per esempio, ridurre la massa tumorale (facile da verificare) sarebbe certo una buona cosa, a meno che questo non *abbrevi* molto la durata della vita residua (parametro molto più lungo e quindi costoso da valutare), o magari *peggiori* la vita residua (parametro molto più difficile da valutare).

In questo si inquadra il discorso delle procedure accelerate di autorizzazione dei farmaci. Leggiamo in un articolo(130) scientifico:

> In 1992, Congress enacted the "accelerated approval pathway". Drugs and biologics expected to provide a meaningful advantage over available therapies for serious conditions have since been eligible for receiving accelerated FDA approval on the basis of surrogate measures. Surrogate measures are proxies for clinically meaningful outcomes and are "reasonably likely" to predict clinical benefit. An oft-cited example of an established surrogate measure is the magnitude of cholesterol reduction, which has been demonstrated to predict the risk of future fatal and nonfatal heart attacks.6 Such established surrogate measures are frequently used in regular FDA approvals. However, many surrogate measures used for accelerated approval decisions are not es-

[130] Naci H, Wouters OJ, Gupta R, Ioannidis JPA. Timing and Characteristics of Cumulative Evidence Available on Novel Therapeutic Agents Receiving Food and Drug Administration Accelerated Approval. Milbank Q. 2017 Jun;95(2):261-290. doi: 10.1111/1468-0009.12261. PMID: 28589600; PMCID: PMC5461381.

> tablished and have a weak empirical association with important outcomes such as overall survival. Hence, agents granted accelerated approval on the basis of surrogate measures are required to conduct studies to confirm the anticipated clinical benefit.
>
> The objective of using surrogate measures as a basis for FDA-accelerated approval is to reduce the evidence requirements and considerably shorten the duration of clinical testing required prior to market entry for agents targeting important conditions. The bar for market entry is therefore substantially lower for agents receiving accelerated versus regular approval. Clinical studies used as the basis of regulatory decisions in the accelerated approval pathway are relatively small, have shorter follow-up durations, often lack comparators, and are less likely to be randomized. Collectively, these study features effectively reduce the research and development timelines for agents in the accelerated approval pathway. According to a recent study, oncology agents receiving accelerated approval entered the market on average 4.7 years earlier than those receiving regular approval.
>
> (...) Therapeutic agents granted accelerated approval have premature data on their clinical benefits and harms at the time of market entry. Substantial research is thus needed to compensate for the limitations of the evidence base and generate meaningful, definitive data confirming clinical benefit following accelerated approval.

Ci si tolga dalla testa che se un'affermazione è corredata da numeri (una "statistica", popolarmente) su quell'argomento è detta l'ultima parola, perché:

1) molto più probabilmente di come si potrebbe sperare, è ben

possibile che i numeri siano inesatti;

2) altri numeri che non ci vengono detti potrebbero ribaltare completamente la questione.

Leggiamo in un articolo scientifico riportato su PubMed:

> "there is a good chance that statistical significance will be reached only by increasing the number of hypotheses tested in the work. The question is then: is this significant difference real or did it occur by pure chance?
>
> Actually, it is well known that if 20 tests are performed on the same data set, at least one Type 1 error (α) is to be expected. Therefore, the number of hypotheses to be tested in a certain study needs to determined in advance. If multiple hypotheses are tested, correction for multiple testing should be applied or study should be declared as exploratory."

(Il numero 20 corrisponde alla probabilità $5\% = 0.05 = \frac{1}{20}$).

Link->

65.2 Falsificazioni deliberate

Richiamiamo quanto detto nella Parte III della Lezione 22, dove anche sono stati esposti i dettagli giuridici della questione.

Diciamolo a chiare lettere: inviare ad una rivista scientifica un articolo scientifico in cui si parla di esperimenti su 1,500 persone, o topi, mai esistiti, non è reato. È come una bugia fra privati.

Nell'epidemia del 2020 ad un certo punto in Italia e altri Stati è stato (sostanzialmente) vietato l'uso dell'idrossiclorichina, che sembrava funzionare bene, e risalendo indietro nella catena di testi che hanno originato quel fatto c'è 1 singolo articolo scientifico, pubblicato su The Lancet, la più importante rivista scientifica medica del mondo. Esso stabiliva che quel farmaco non solo non serviva per l'epidemia in corso ma addirittura faceva male. Poi l'articolo è stato ritirato.

Citiamo l'agenzia di stampa Adnkronos, con un'enfasi aggiunta. https://www.adnkronos.com/fatti/cronaca/2020/06/05/coronavirus-lancet-ritira-studio-idrossiclorochina GUFscvcw3DK1PNS4RHoAfL.html (letto l'11 giugno 2020)

> Pubblicato il: 05/06/2020 09:03
>
> Le riviste scientifiche 'The Lancet' e 'New England Journal of Medicine' hanno ritirato due studi basati su dati forniti dall'azienda Usa Surgisphere, finita sotto i riflettori del 'Guardian' che ne ha messo in dubbio l'attendibilità. Uno dei due articoli, quello pubblicato da Lancet, lanciava l'allarme su gravi rischi associati all'uso del farmaco antimalarico idrossiclorochina contro il Covid-19.
>
> L'altro, quello apparso sul Nejm, riguardava l'impiego di comuni medicinali antipertensivi nei pazienti con infezione da coronavirus Sars-CoV-2. Entrambi i lavori sono stati ritrattati su richiesta degli autori. "Non siamo più in grado di garantire l'attendibilità delle fonti dei dati", hanno spiegato scusandosi con i lettori e ritirando le firme.
>
> La notizia è rimbalzata nella tarda serata di ieri sui media internazionali. I primi a ritirare le loro firme sono stati 3 autori sui 4 dello studio pubblicato su Lancet: tutti i coautori del paper (Mandeep Mehra del Brigham and Women's Hospital di Boston, Frank Ruschitzka dello University Hospital di Zurigo e Amit Patel della University of Utah), eccetto il fondatore e Ceo di Surgisphere, Sapan Desai, si sono 'sfilati' con una nota congiunta diffusa dalla rivista scientifica. "Siamo entrati in questa collaborazione – hanno precisato – per contribuire in buona fede alla lotta contro la pandemia, in un momento di grande necessità".
>
> Poco dopo è arrivata la ritrattazione del Nejm.

Da The Guardian in https://www.theguardian.com/world/2020/jun/03/covid-19-surgisphere-who-w (letto l'11 giugno 2020) apprendiamo che (enfasi aggiunta)

- A search of publicly available material suggests several of Surgisphere's employees have little or no data or scientific background. An employee listed as a science editor appears to be a science fiction author and fantasy artist whose professional profile suggests writing is her fulltime job. Another employee listed as a marketing executive is an adult model and events hostess, who also acts in videos for organisations.
- The company's LinkedIn page has fewer than 100 followers and last week listed just six employees. This was changed to three employees as of Wednesday.

Si veda anche https://www.ilfattoquotidiano.it/2020/06/04/coronavirus-the-lancet-avvia-uninc 5824478/

65.3 Il (doppio) cieco che ci vede benissimo

In https://www.ilfattoquotidiano.it/2014/04/12/farmaci-e-studi-clinici-lo-scandalo-t 949196/?fbclid=IwAR2lsD6W_GaRYkihu_rpL2DY6JyNyrWkW6IfNaaWxifAbJ01d6B6OGSHYMw (letto il 28 febbraio 2020) troviamo:

> A proposito del ((nome di farmaco)), Goldacre ha rivelato i retroscena della vicenda in un articolo uscito sul Guardian il 10 aprile. Sintetizzo alcuni passaggi che vale la pena sapere.
>
> Un pediatra giapponese, Keiji Hayashi, lascia un commento sul sito online del gruppo Cochrane (14 mila medici e ricercatori indipendenti che difendono la trasparenza dei dati scientifici nel campo medico e farmaceutico) in cui spiega che la presunta utilità del ((nome di farmaco)) si basa su un riassunto di dieci studi clinici elaborato dalla stessa industria che lo produce, la ((casa farmaceutica)). Ma di questi dieci test, soltanto due sono disponibili nella letteratura scientifica. Degli altri otto le uniche informazioni che si hanno sul metodo usato sono riconducibili al riassunto fatto in casa. E questo non è abbastanza credibile.
>
> Cochrane chiede alla ((casa farmaceutica)) di inviargli i dati mancanti. ((casa farmaceutica)) accetta a patto che la Cochrane reviews, la rivista online del gruppo, firmi un accordo informale che la obblighi a non riferire niente ai lettori. I termini dell'accordo non sono discutibili. Tom Jefferson, il responsabile di pneumologia dell'organizzazione, chiede alla ((casa farmaceutica)) perché c'è bisogno di sottoscrivere un contratto ma non riceve risposta.
>
> Nel 2009 ((casa farmaceutica)) invia sette documenti, di una dozzina di pagine ciascuno, con gli estratti dei dieci studi clinici precedentemente riassunti. Ma è ancora troppo poco: le richieste di Cochrane continuano a rimanere disattese.
>
> Cosa si evince intanto? Che il campione di cavie umane che hanno partecipato agli studi clinici non è abbastanza rappresentativo. E negli esperimenti in "doppio cieco" – quando nè il dottore nè il paziente dovrebbero sapere se si è assunto il placebo o il farmaco – **la pillola placebo e quella vera hanno colori diversi**.

(Enfasi aggiunta).

Non c'è da stupirsi che certa parte dell'opinione pubblica abbia sospetti su certi prodotti farmaceutici, con pillole per test in doppio <u>**cieco**</u> di colori diversi, e un'infinità di altre, diciamo così, problematiche, ben note in ampi settori di consumatori particolarmente attenti ed esigenti, che vogliono prodotti sicuri e garantiti da ricerche scientifiche e non da pubblicità.

Per riconquistare la fiducia del grande pubblico – necessaria per la salute generale della popolazione – sarebbe necessario un drastico repulisti.

Ma osta sicuramente la questione seguente.

65.4 Il conflitto di interessi

"Oste, è buono il vino?" "Buonissimo!"

In matematica 2+2 fa sempre 4, e il Teorema di Pitagora è *eternamente* vero.
Ma la Farmacia e la Medicina non sono Matematica, le certezze assolute quasi non esistono, in generale sono temporanee.
Comunque anche per cose di Medicina o Farmacia vere come 2+2 = 4, persone opportunamente pagate – anche oneste – magari senza negare quelle verità, possono insistentemente parlarvi (è il loro lavoro, ripetiamo, onesto) del fatto che 3+3 fa 6, o qualunque altra cosa. E altre persone – talvolta meno oneste – possono usare tutto l'armamentario di tecniche manipolative dei dati illustrate nel Capitolo 22 – quando non le pure e semplici *falsificazioni scientifiche* – e così orientare l'opinione pubblica e di conseguenza le politiche sanitarie e farmaceutiche degli Stati.

È il problema del **conflitto di interessi**, enorme in Farmacia.

Il mercato del farmaco mondiale è dell'ordine dei 12 zeri.

L'OMS propaganda prodotti farmaceutici di uno che la finanzia.[131]

[131] Si veda per esempio questo servizio (2020) di Rai 3: LINK ->

> “much of the scientific literature, perhaps half, may simply be untrue. Afflicted by studies with small sample sizes, tiny effects, invalid exploratory analyses, and flagrant conflicts of interest, together with an obsession for pursuing fashionable trends of dubious importance, science has taken a turn towards darkness.”

(Richard Horton, Editore di The Lancet. https://www.thelancet.com/pdfs/journals/lancet/PIIS0140-6736%2815%2960696-1.pdf The Lancet è la più importante rivista di Medicina del mondo).