Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli
standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono
numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello
svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri,
lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Trovare la mediana di questo dataset

```
8E-6 5E-8 7E-5 8E-8 30
```

$$\boxed{\texttt{8E-6}}$$

ovvero

$$\boxed{8 \cdot 10^{-6}}$$

ovvero

$$\boxed{0.000\,008}$$

(I primi 4 dei 5 numeri sono scritti in una delle notazioni scientifiche usate da molte calcolatrici e software, in cui `E` è come 10^ e cioè i numeri sono, altrimenti scritti:

$8 \cdot 10^{-6}$ $\;5 \cdot 10^{-8}$ $\;7 \cdot 10^{-5}$ $\;8 \cdot 10^{-8}$ $\;30$

ovvero anche

0.000 008 0.000 000 05 0.000 07 0.000 000 08 30

e riordinandoli in modo crescente sono

0.000 000 05 0.000 000 08 0.000 008 0.000 07 30

e la mediana è il valore intermedio.)

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2025}$ (R) % Supponendo l'indipendenza, qual è la probabilità che non muoia nessuna di 3 persone ammalate di malattia con letalità del 50%?

$\boxed{12.5\%}$

(La letalità è – sostanzialmente, a parte molte precisazioni di cui non è il caso qua di occuparsi – la probabilità di morire in caso di malattia. Alla letalità del 50% corrisponde la probabilità di sopravvivere alla malattia del 50% ovvero 0.50, e allora la probabilità di sopravvivenza di tutte e 3 le persone è

$$0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.125$$

e in percentuale 12.5%).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2025}$ (R) $\ast$ Completare le 2 parole mancanti:

Fondamentali in Statistica Inferenziale sono i test del χ^2, ovvero, a parole, del ... ...

$\boxed{\text{chi quadrato}}$

ovvero, antiquatamente,

$\boxed{\text{chi quadro}}$

ESERCIZIO 1$_{\mu 2025}$ $\ast$ Risolvere l'equazione

$$\log^2 x + \log x^2 + 1 = 0$$

ove log indica secondo l'uso della Chimica il logaritmo decimale $\log_{10}$ ossia lg.

SVOLGIMENTO

L'equazione data può essere scritta, con variante tipografica più chiara ma quasi mai usata nelle Scienze,

$$(\log x)^2 + \log x^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

Deve essere

$$\underline{x > 0}$$

perché x e x^2 sono argomenti di logaritmi.

Ricodando la relazione, valida con qualunque base b di logaritmo,

$$\log_b x^2 = 2 \log_b x \quad \forall\, x > 0$$

l'equazione $(*)$ diventa

$$(\log x)^2 + 2 \log x + 1 = 0$$

Sostituendo

$$y = \log x$$

si ottiene l'equazione di secondo grado

$$y^2 + 2\,y + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = -1$$

e ricordando che $y = \log x$

$$\log x = -1 \qquad \Big/ 10^\wedge$$

essendo un logaritmo in base 10 come specificato nel testo del quesito

$$x = 10^{-1}$$

ovvero

$$\boxed{\tfrac{1}{10}}$$

ovvero, per esempio con lo standard del punto decimale,

$$\boxed{0.1}$$

ESERCIZIO 2$_{\mu 2025}$ (Il risultato dello svolgimento sarà un disegno).
Supponiamo che per un focolaio epidemia del XIX secolo – o altra questione – riusciamo a produrre questi dati:

maschi 15; femmine 15; genere sconosciuto 10

Disegnare un diagramma a torta per il dataset.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

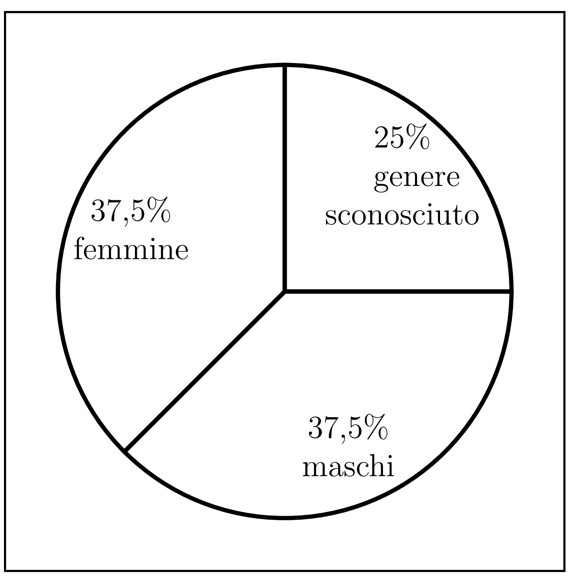
In tutto le vittime del focolaio epidemico sono

$$15 + 15 + 10 = 40$$

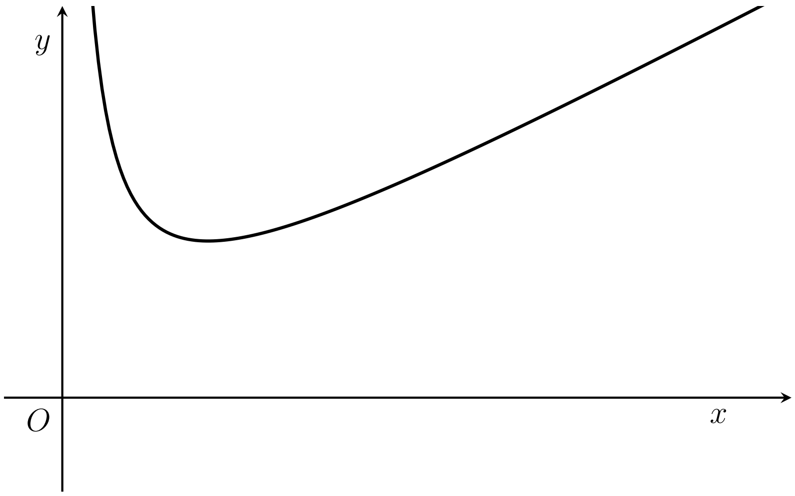
da cui le percentuali

maschi: $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$
femmine: $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$
genere
sconosciuto: $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

A questo punto bisogna disegnare il diagramma a torta, e farlo abbastanza bene sarà facile, con un quarto di cerchio a rappresentare il 25%, e bisecando il settore circolare rimanente (per le 2 parti uguali, da 37,5%).



ESERCIZIO 3$_{\mu 2025}$ $\ast$ Trovare il minimo di $x + 1/x$ in $]0, +\infty[$.



SVOLGIMENTO

$$f(x) := x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

Derivando, x dà 1.
Derivando, $\frac{1}{x}$ cioè x^{-1} dà $(-1) \cdot x^{-2}$ cioè $-\frac{1}{x^2}$.
In tutto, si ha la derivata, e la disequazione per la ricerca della crescenza:

$$f'(x) := 1 - \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\Big/ \cdot x^2 \neq 0$$

$$x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 > 1$$

che equivale per $x > 0$ a

$$x > 1$$

e allora
$f'(x) > 0$ per $x > 1$ ... $f(x)$ crescente
$f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$ ... $f(x)$ decrescente
e allora

$$x = 1 \text{ unico punto di minimo per } x > 0$$

da cui il minimo di f

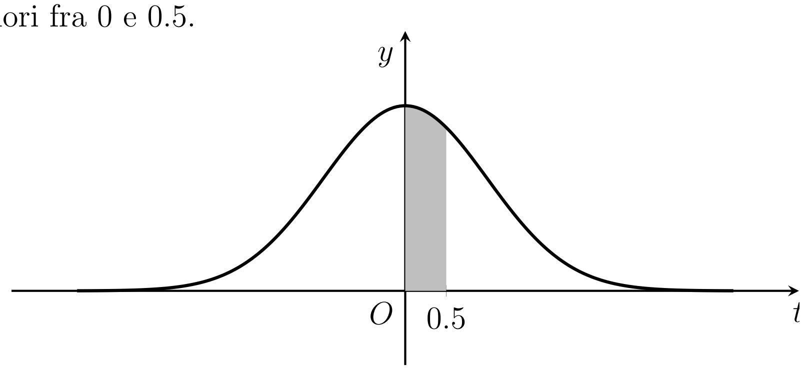
$$\min_{x>0} f = f(1) = 1 + \frac{1}{1} =$$

$$\boxed{2}$$

ESERCIZIO 4$_{\mu 2025}$ % Con la grossolana – ma, per i valori di questo esercizio, abbastanza ben performante – approssimazione

$$\Phi(x) \approx \sqrt{1 - \frac{(3-x)^2}{12}} \qquad \forall\, x \in [0,3] \quad \text{(errore assoluto} < 0.04)$$

calcolare la probabilità che una variabile aleatoria normale standard assuma valori fra 0 e 0.5.



SVOLGIMENTO

Per una generica variabile aleatoria continua X di densità f è

$$\mathrm{P}(a < X \le b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

e allora per una variabile aleatoria normale standard Z con la sua densità normale standard usualmente indicata con $\phi(t)$ (e avente espressione analitica $\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ ma qua non ci interessa) e coi valori 0 e 0.5 dell'esercizio è

$$\mathrm{P}(0 < Z \le 0.5) = \int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

e ricordando che $\Phi'(t) = \phi(t)$ ovvero che Φ è una primitiva di ϕ

$$= [\Phi(t)]_0^{0.5} =$$

$$= \Phi(0.5) - \Phi(0) \approx$$

usando l'approssimazione data

$$\approx \sqrt{1 - \frac{(3-0.5)^2}{12}} - \sqrt{1 - \frac{(3-0)^2}{12}} \approx$$

con la calcolatrice

$$\approx 0.1922$$

$$\boxed{\approx 19\%}$$

Nota. Un calcolo più preciso col computer, evitando la grossolana approssimazione del testo del quesito, darebbe $\approx 19.1462\%$. Può essere ottenuta per esempio su WolframAlpha con

`1-erfc(0.5/sqrt(2))/2-(1-erfc(0/sqrt(2))/2)`

perché WolframAlpha calcola $\Phi(x)$ con `1-erfc(x/sqrt(2))/2` (e altri modi).

ESERCIZIO 5$_{\mu 2025}$ (R) Completare la formula del consueto stimatore (di massima verosimiglianza) per il parametro λ di una variabile aleatoria esponenziale X:

$$\hat{\ } = \text{—}$$

(Ci sono 2 formulazioni equivalenti, oltre a minime variazioni tipografiche).

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}}$$

ovvero equivalentemente

$$\boxed{\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}}$$

(E certamente invece di n si potrebbe usare la lettera m o altra lettera, e anche scrivere semplicemente $\overline{X}$ invece di $\overline{X}_n$).