**Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.**

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

BOZZA – DRAFT

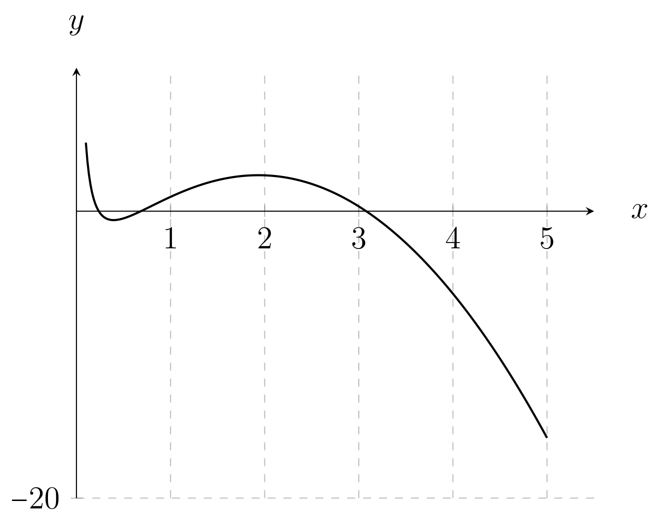
RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Dal disegno del grafico della funzione dedurre il numero di soluzioni dell'equazione

$$2\,x + \frac{1}{x} - 2\,(x-2)^2 = 0 \qquad 0.1 \le x \le 5$$



$$\boxed{3}$$

(Si vede bene che la curva grafico interseca 3 volte l'asse x, ovvero in 3 valori di x è $f(x) = 0$, essendo $f(x)$ la funzione a primo membro dell'equazione data).

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2025}$ (R) % Qual è la probabilità che vengano esattamente 4 teste su 5 lanci di una moneta?

$$\boxed{15.625\%}$$

(I casi favorevoli sono ovviamente questi 5

TTTTC
TTTCT
TTCTT
TCTTT
CTTTT

e i casi possibili equiprobabili sono $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ e allora

$$p = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili equiprobabili}} =$$

$$= \frac{5}{32} = 0.15625$$

cioè in percentuale 15.625%.

OPPURE

un modo più complicato di risolvere è usare la densità binomiale:

$$p_k = P(X = k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, ..., n.$$

che dà al variare di k intero da 0 a n, la probabilità di ottenere k teste in n lanci di una moneta che ha $P(testa) = p$ e più in generale dà, al variare di k intero da 0 a n, la probabilità di un certo numero k di successi in uno schema successo-insuccesso con n prove indipendenti avendo il successo probabilità p ad ogni prova.
Adesso calcoliamo la probabilità di $k = 4$ teste su $n = 5$ lanci con $p = \frac{1}{2}$ con la formula soprastante:

$$\begin{aligned} p_4 &= \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \\ &= 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \\ &= \frac{5}{32} \end{aligned}$$

e si conclude come sopra.)

BOZZA - DRAFT

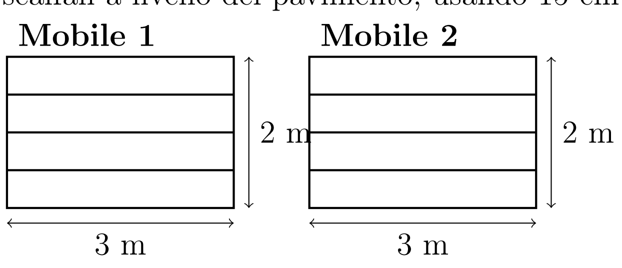
ESERCIZIO 0c$_{\mu 2025}$ (R) $\ast$ Trovare la parola mancante in questa frase:

1,96 è il più classico ... della Statistica Inferenziale, e un altro è 3,84.

Nota. Non si dia come risposta trivialmente la parola “numero”.

$$\boxed{\text{quantile}}$$

ESERCIZIO 1$_{\mu 2025}$ $\ast$ Abbiamo il mobilio in figura. Quanti prodotti farmaceutici in tutto possiamo esporre sugli scaffali (non certo sulla sommità), evitando gli scaffali a livello del pavimento, usando 15 cm per prodotto?



SVOLGIMENTO
Ogni scaffale è lungo 3 m cioè 300 cm e allora può ospitare

$$\frac{300}{15}$$

(oppure, volendo,

$$\frac{300 \text{ cm}}{15 \text{ cm/prodotto}}$$

con le unità di misura) cioè 20 prodotti.
Abbiamo 6 scaffali disponibili e allora calcolando $20 \cdot 6$ troviamo

$$\boxed{120}$$

ESERCIZIO 2$_{\mu 2025}$ ≈ Risolvere l'equazione

$$\lg x - \lg \frac{1}{x} = \cos \frac{\pi}{3}$$

e potrà essere utile questa tabella di valori notevoli classici:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Prima di tutto deve essere

$$\underline{x > 0 \ (*)}$$

e questa relazione $(*)$ ci sarà eventualmente utile per escludere, se le troveremo, soluzioni spurie (ovvero fittizie) negative.
In base alla tabella di valori classici del coseno abbiamo l'equazione

$$\lg x - \lg \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

e per una proprietà del logaritmo del reciproco

$$\lg x + \lg x = \frac{1}{2}$$

$$2 \lg x = \frac{1}{2}$$

$$\Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$\lg x = \frac{1}{4}$$

$$\Big/ 10^\wedge$$

$$x = 10^{\frac{1}{4}}$$

BOZZA - DRAFT

che è la soluzione esatta dell'equazione, e adesso dobbiamo approssimarla numericamente.
Per una proprietà delle radici

$$x = \sqrt[4]{10}$$

e per la formula di riduzione della radice quarta a 2 radici quadrate

$$x = \sqrt{\sqrt{10}} \approx$$

$$\approx \sqrt{3.1623} \approx$$

$$\boxed{1{,}7783}$$

ovvero con minore approssimazione

$$\boxed{1{,}778}$$

ovvero con minore approssimazione

$$\boxed{1{,}78}$$

(e non daremo 1,8).
L'unica soluzione trovata è > 0 e non la escluderemo, in base alla $(*)$.

BOZZA - DRAFT

OPPURE
Riprendendo da

$$\lg x - \lg \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

per una proprietà della differenza di logaritmi

$$\lg \frac{x}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lg(x \cdot x) = \frac{1}{2}$$

$$\lg x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Big/ 10^{\wedge}$$

$$x^2 = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{10^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \pm\sqrt{\sqrt{10}}$$

e scartando in base alla $(*)$ la soluzione (fittizia) negativa rimane

$$x = \sqrt{\sqrt{10}}$$

e poi si conclude come sopra.

OPPURE
Riprendendo da

$$\lg x^2 = \frac{1}{2}$$

ricordando la $LOG\, x^2 = 2\, LOG|x|$ essendo LOG il logaritmo in qualunque base

$$2\ \lg|x| = \frac{1}{2}$$

$$\Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$\lg|x| = \frac{1}{4}$$

$$\Big/ 10\hat{}$$

$$|x| = 10^{\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm 10^{\frac{1}{4}}$$

e scartando in base alla $(*)$ la soluzione (fittizia) negativa rimane

$$x = 10^{\frac{1}{4}}$$

e poi si continua come sopra, con la formula di riduzione della radice quarta.

ESERCIZIO 3$_{\mu 2025}$ $*$ Calcolare

$$\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x$$

SVOLGIMENTO

$$\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x =$$

ricordando che $\sqrt{x} = x^{1/2}$

$$= \int x \cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x =$$

BOZZA - DRAFT

e sommando, per una proprietà delle potenze, gli esponenti 1 (di x^1) e $\frac{1}{2}$

$$= \int x^{1+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x =$$

con la classica $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, che vale $\forall\,\alpha \neq -1$, ora con $\alpha = \frac{3}{2}$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c =$$

$$\boxed{\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}} + c}$$

ovvero

$$\boxed{\frac{2}{5}\,x^2\sqrt{x} + c}$$

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO 4$_{\mu 2025}$ % Viene eseguito su 680 persone un test diagnostico, e poi un'indagine diagnostica più approfondita, ottenendo questi risultati:

	MALATI	SANI
POSITIVI	208	40
NEGATIVI	18	414

Calcolare la sensibilità del test in base a questa rilevazione.

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Ricordando la definizione della sensibilità

$$S := \frac{\textit{veri positivi}}{\textit{totale malati}} = \frac{V_+}{V_+ + F_-}$$

ora abbiamo coi dati del quesito

$$= \frac{208}{208 + 18} =$$

$$= \frac{208}{226} \approx 0.920354$$
$$= 92.04\% \approx$$

e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{\approx 92\%}$$

(È fuorviante il .04 che indicherebbe una precisione verosimilmente fittizia).

ESERCIZIO 5$_{\mu 2025}$ ≈ Si calcoli lo stimatore della varianza (consueto) di una variabile aleatoria che ha assunto, per caso, i 3 valori che nella successione di Fibonacci precedono 233.

SVOLGIMENTO
La successione di Fibonacci viene fatta iniziare da alcuni Autori con 0 e 1 e da altri con 1 e 1, ma questo è ora irrilevante:

(0) 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233...

e allora i 3 valori (che precedono 233) sono

55 89 144

e questo è il dataset da cui è stimare la varianza della variabile aleatoria.

BOZZA - DRAFT

Con l'usuale stimatore della media

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

ora con $n = 3$ e i valori del dataset si ha

$$\bar{X} := \frac{1}{3} (55 + 89 + 144) =$$
$$= \frac{288}{3} = 96$$

e con l'usuale stimatore della varianza

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2$$

ora con $n = 3$ e i valori del dataset si ha

$$S^2 = \frac{1}{3-1} \left((55-96)^2 + (89-96)^2 + (144-96)^2 \right) =$$

che è il cercato valore esatto dello stimatore, seppure malamente espresso (ma è già qualcosa).
Ora lo esprimeremo meglio continuando il calcolo:

$$= \frac{1}{2}\left(41^2 + 7^2 + 48^2\right) =$$

$$= \frac{1681 + 49 + 2304}{2} =$$

$$= \frac{4034}{2} =$$

$$\boxed{2017}$$

BOZZA - DRAFT