<u>Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame</u>

Chi si ritira, consegna **<u>solo</u>** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Calcolare $3\ln\frac{1}{t}+\ln t^3$

$$\boxed{0}$$

(È

$$\ln\frac{1}{t} = -\ln t \qquad \ln t^3 = 3\ln t$$

per 2 proprietà dei logaritmi, e allora i 2 termini sommati nel quesito sono opposti, con somma 0

OPPURE

Con la consueta proprietà del logaritmo di una potenza – in particolare con esponente dispari –

$$= 3\ln\frac{1}{t} + 3\ln t =$$

$$= 3\left(\ln\frac{1}{t} + \ln t\right) =$$

e con la consueta proprietà della somma di logaritmi – di ugual base –

$$= 3\left(\ln\left(\frac{1}{t}\cdot t\right)\right) =$$

e semplificando – almeno per $t \neq 0$ il che deve essere fin dall'inizio e non pone qua problemi –

$$= 3 \ln 1 =$$

).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Trovare la singola parola mancante:

Uno dei concetti centrali del Calcolo delle probabilità è la ... matematica

di una variabile aleatoria discreta: $E(X) := \sum_k x_k \cdot p_k$

$$\boxed{\text{speranza}}$$

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Trovare la singola parola mancante:

Molto usate sono le ... cartacee dei quantili, eventualmente digitalizzate.

$$\boxed{\text{tavole}}$$

(O anche

$$\boxed{\text{tabelle}}$$

ma molto malamente perché non è il nome consueto e tradizionale).

ESERCIZIO 1$_{\mu 2025}$ $*$ L'intelligenza artificiale sta rapidamente entrando nelle farmacie e nella Farmacia; si veda per esempio l'articolo scientifico (2025) su *Nature Medicine* "Artificial intelligence in drug development".
L'intelligenza artificiale è sostanzialmente un'applicazione informatica di formule matematiche, in particolare le funzioni di attivazione, il calcolo delle probabilità e la statistica, e i sistemi lineari. Qua chiediamo di risolvere questo (piccolissimo: le intelligenze artificiali per funzionare risolvono sistemi con anche milioni o miliardi di incognite, però approssimatamente) sistema lineare:

$$\begin{cases} -1 + 4\,x + 3\,y = 0 \\ 4\,x - y = 13 \end{cases}$$

dando della soluzione la scrittura decimale.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Ci sono vari possibili metodi risolutivi.

Dalla seconda, sommando ad ambo i membri $y-13$, ricaviamo y

$$4\,x-13=y \qquad (*)$$

e lo mettiamo nella prima equazione del sistema lineare

$$-1+4\,x+3\,(4\,x-13)=0$$

$$-1+4\,x+12\,x-39=0$$

$$-40+16\,x=0$$

$$16\,x=40$$

$$x=\frac{40}{16}$$

(ed è inutile semplificare la frazione) che è il cercato esatto valore di x, che adesso esprimiamo in forma decimale come richiesto, calcolando $40:16$ con la calcolatrice o a mano:

$$x=2{,}5$$

e la y la calcoliamo con la $(*)$

$$y=4\,x-13=4\,\frac{40}{16}-13=\frac{40}{4}-13=10-13=-3$$

$$\boxed{x=2{,}5\,;\quad y=-3}$$

OPPURE

Facciamo la differenza delle 2 equazioni (la prima meno la seconda) ottenendo

$$-1+3\,y+y=-13$$

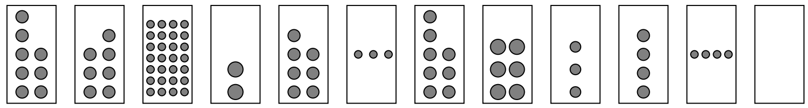
$$4\,y=1-13$$

$$4\,y=-12$$

$$y=-3$$

che messa nella seconda equazione in pochi passaggi dà x.

ESERCIZIO 2$_{\mu2025}$ $\approx$ **– Inventario e statistica in farmacia –**
Prima di tutto produrre il dataset delle numerosità dei prodotti in ciascun cassetto. (Fino a qua si ottiene metà punteggio dell'esercizio, ma 0 punti se i valori non sono esatti).
Poi calcolare la media interquartile del dataset.



SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Ci sono $n = 12$ cassetti e il dataset $x_1, ...x_{12}$ delle numerosità dei prodotti è

$$\underline{8\ 7\ 28\ 2\ 7\ 3\ 8\ 6\ 3\ 4\ 4\ 0}$$

che riordiniamo in modo crescente ottenendo questo dataset $y_1, ...y_{12}$

$$0\ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 6\ 7\ 7\ 8\ 8\ 28$$

che dividiamo in quattro parti (quartili) di 3 elementi

$$0\ 2\ 3 - 3\ 4\ 4 - 6\ 7\ 7 - 8\ 8\ 28$$

e dopo aver eliminato il primo e ultimo quartile restano 6 elementi la cui media

$$\frac{3+4+4+6+7+7}{6} =$$

è la media interquartile cercata:

$$IQM = \frac{31}{6} = 5.16666...$$

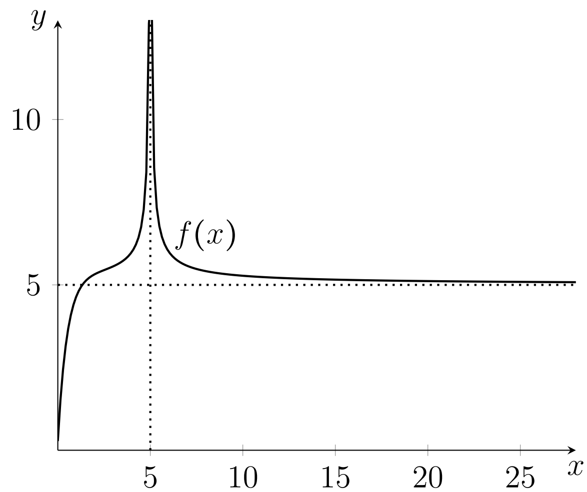
$$\boxed{\approx 5.2}$$

o anche, verosimilmente di nessuna migliore utilità per la gestione della farmacia,

$$\boxed{\approx 5.17}$$

ESERCIZIO 3$_{\mu 2025}$ (R) Dire quanto vale il sottostante limite, e ovviamente si supponga che la funzione non faccia strani capricci nella regione illimitata del piano cartesiano che non è rappresentata nel disegno, ovvero che il disegno del grafico mostri qual è sostanzialmente il comportamento della funzione:

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$



$$\boxed{+\infty}$$

Nota. Si intuisce – supponendo che il disegno del grafico mostri qual è sostanzialmente il comportamento della funzione, escludendo strani capricci della funzione non rappresentati dal disegno del grafico – che la funzione tende a valori indefinitamente grandi all'avvicinarsi di x al valore 5.

ESERCIZIO 4$_{\mu 2025}$ % Supponendo l'indipendenza, qual è la probabilità che non muoia nessuna di 3 persone ammalate di una malattia che ha un decorso di 7 giorni con letalità del 30%?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

La letalità è – sostanzialmente, a parte molte precisazioni di cui non è il caso qua di occuparsi – la probabilità di morire in caso di malattia. Alla letalità del 30% corrisponde la probabilità di sopravvivere alla malattia del 70% ovvero 0,70, e allora la probabilità di sopravvivenza di tutte e 3 le persone è, per l'indipendenza,

$$0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$$

e in percentuale

$$\boxed{34{,}3\%}$$

o anche, togliendo un decimale che farebbe supporre una precisione plausibilmente fittizia,

$$\boxed{\approx 34\%}$$

Nota. Ovviamente la durata di 7 giorni del decorso della malattia è qua irrilevante.

ESERCIZIO 5$_{\mu 2025}$ $*$ (R) Si riscriva completata la classica formula approssimata della Statistica Inferenziale per un intervallo di confidenza (bilatero, centrato) al 95% per una v.a. normale di cui si abbia un campione di n elementi

$$\ldots \pm \ldots \frac{S_n}{\ldots}$$

di larghissimo uso pratico, riferibile almeno colloquialmente come *mean plus or minus twice the standard error* (a cui comunque in generale è da preferire la formula con il valore 1.96 ben più preciso di 2 per il quantile normale $\phi_{0.975}$, ma qua appunto vogliamo la versione approssimata).

$$\boxed{\bar{X}_n \pm 2\, \tfrac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

meno bene scrivibile con $\bar{X}$ invece di $\bar{X}_n$

$$\boxed{\bar{X} \pm 2\, \tfrac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

(e perfino S invece di S_n, ma la scrittura S_n già ci è stata data).
Nota 1. Ad essa in generale è da preferire la formula

$$\bar{X}_n \pm 1.96\, \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

con il valore 1.96 ben più preciso di 2 per il quantile normale $\phi_{0.975}$.
Nota 2. Come accennato nel testo del quesito, l'espressione *mean plus or minus twice the standard error* va bene almeno colloquialmente. Cosa sia esattamente l'errore standard è questione piuttosto delicata. Diciamo, semplificatamente, che per alcuni Autori

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

non è l'errore standard ma solo uno stimatore del vero errore standard, che invece sarebbe

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

con la radice quadrata σ della generalmente sconosciuta vera varianza σ^2.