<u>Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame</u>

Chi si ritira, consegna **<u>solo</u>** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2025}$ (R) $\approx$ Determinare la mediana dei numeri $\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{19}, \sqrt{20}$.

$$\boxed{\approx 3.32}$$

(La mediana è $\sqrt{11}$, perché dei 19 valori del dataset, che è già ordinato in modo crescente, quello centrale è $\sqrt{11}$, avendo 9 valori alla sua sinistra e 9 valori alla sua destra. Ovviamente non è necessario calcolare i valori numerici delle altre radici quadrate.)

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Trovare la parola mancante nella seguente frase

Una variabile continua viene principalmente determinata median- te 2 funzioni: la funzione di ripartizione, il cui grafico spesso ha forma almeno vagamente sigmoide, e la ..., il cui grafico spesso ha forma almeno vagamente campaniforme.

$$\boxed{\text{densità}}$$

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Trovare la parola mancante in questa frase:

Uno dei principali dest statistici è quello del χ^2 ovvero ... quadrato, che comunque ha varie versioni.

$$\boxed{\text{chi}}$$

(È il nome della lettera greca χ esattamente come alfa è il nome della lettera greca α).

ESERCIZIO 1$_{\mu 2025}$ $\ast$ Un parametro di interesse in Farmacia varia con legge

$$y = 0{,}02\,t + 0{,}3$$

essendo t il tempo in ore dalla mezzanotte. A che ora y vale 0,51?

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale.

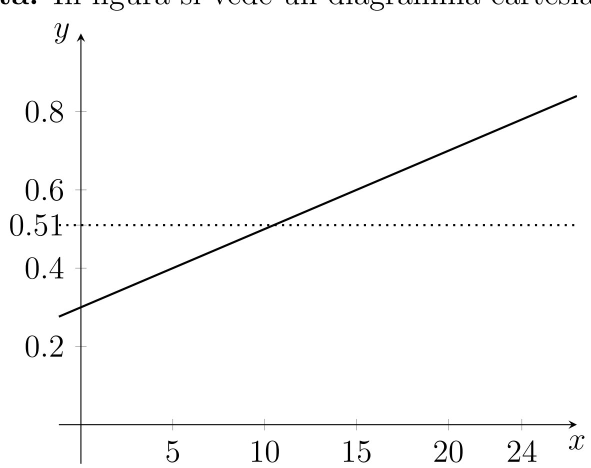
Abbiamo l'equazione

$$0{,}02\,t + 0{,}3 = 0{,}51$$
$$0{,}02\,t = 0{,}51 - 0{,}3$$
$$0{,}02\,t = 0{,}21$$
$$t = \frac{0{,}21}{0{,}02} =$$
$$\boxed{10{,}5}$$

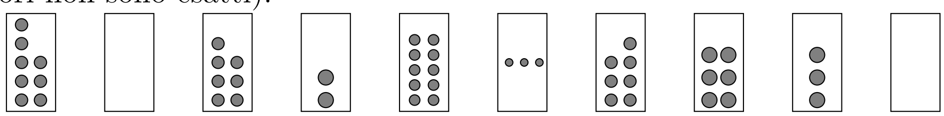
che è l'ora cercata, alquanto mal espressa, e adesso la esprimiamo nel modo consueto delle ore. Il ,5 finale corrisponde a $\frac{1}{2}$, cioè mezz'ora ovvero 30 minuti:

$$\boxed{10{:}30}$$

Nota. In figura si vede un diagramma cartesiano della situazione.



ESERCIZIO 2$_{\mu 2025}$ $\star$ – **Inventario e statistica in farmacia** –
Prima di tutto produrre il dataset delle numerosità dei prodotti in ciascun cassetto. (Fino a qua si ottiene metà punteggio dell'esercizio, ma 0 punti se i valori non sono esatti).



Poi fare il *riassunto dei 5 numeri* (o *five number summary*), seguendo uno di questi 2 esempi, mentre altri Autori potrebbero usare metodi un po' diversi:
– per un dataset $x_1, ..., x_{10}$, riordinato in $y_1, ..., y_{10}$,
i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, $\frac{y_5+y_6}{2}$, y_8, y_{10};
– per un dataset $x_1, ..., x_{11}$, riordinato in $y_1, ..., y_{11}$,
i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine, y_1, y_3, y_6, y_9, y_{11}.

SVOLGIMENTO
Ci sono $n = 10$ cassetti e il dataset $x_1, ...x_{10}$ delle numerosità dei prodotti è

$$\underline{8\ 0\ 7\ 2\ 10\ 3\ 7\ 6\ 3\ 0}$$

che riordiniamo in modo crescente ottenendo il dataset $y_1, ...y_{10}$

$$0\ 0\ 2\ 3\ 3\ 6\ 7\ 7\ 8\ 10$$

e allora il riassunto dei 5 numeri è fatto – come indicato nel testo del quesito – con i valori y_1, y_3, $\frac{y_5+y_6}{2}$, y_8, y_{10}:

$$0\ \ 2\ \ \tfrac{9}{2}\ \ 7\ \ 10$$

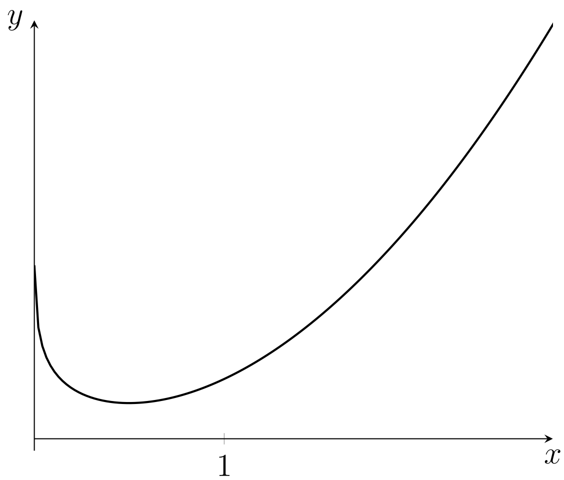
che meglio scriviamo, calcolando $\frac{9}{2} = 4.5$, con la notazione decimale, più usata delle frazioni in Statistica Descrittiva:

$$\boxed{0\ \ 2\ \ 4.5\ \ 7\ \ 10}$$

Nota. Col riassunto dei 5 numeri si può fare un box-plot, almeno nella versione più semplice (*Spear style*, mentre un'altra più usata, *Tukey style*, è più complessa) che si estende dal minimo dei valori del dataset, al massimo: `LINK->`

ESERCIZIO 3$_{\mu 2025}$ $\star$ Si trovi dove è nulla la derivata di

$$x^2 - \frac{1}{2}\ln x$$



SVOLGIMENTO

Prima di tutto deve essere

$$\underline{x > 0 \qquad (*)}$$

(perché x è argomento di un logarimo).

Con le classicissime derivate di x^n e di $\ln x$ si ha la derivata, e poi l'equazione,

$$2\,x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

e moltiplicando per x (che è $\neq 0$ perché è > 0)

$$\Big/ \cdot x \neq 0$$

$$2\,x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Big/ + \frac{1}{2}$$

$$2\,x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Big/ \pm \sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

e scartando per $(*)$ la soluzione negativa si ha infine

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

ovvero

$$\boxed{x = 0.5 \text{ (con lo standard del punto decimale)}}$$

Nota. Si tratta in effetti di un punto di minimo della funzione: vedasi disegno (di parte) del grafico in LINK->

ESERCIZIO 4$_{\mu 2025}$ % Supponiamo che 3 geni si presentino in modo indipendente con probabilità 30%, 8.5% e 50%. Qual è la probabilità di non averne nessuno?

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

Con gli eventi complementari:

$P(\text{non avere il primo gene}) = 70\%$
$P(\text{non avere il secondo gene}) = 91.5\%$
$P(\text{non avere il terzo gene}) = 50\%$

Per l'indipendenza

$$P(\text{non avere nessuno dei 3 geni}) = 0.70 \cdot 0.915 \cdot 0.50 = 0.32025$$

e in percentuale, ma con decimali di una verosimilmente inesistente precisione,

$$\boxed{32.025\%}$$

o meglio approssimatamente

$$\boxed{\approx 32.03\%}$$

e di fatto ancor meglio in questo caso

$$\boxed{\approx 32\%}$$

ESERCIZIO 5$_{\mu 2025}$ $\approx$ Dopo aver eliminato 2 outlier, stimare il parametro λ di una variabile aleatoria esponenziale da cui è stato tratto questo campione:

281,477 129,545 170,042 98,283 1.034 565,49 36,036
26,750 1.373 17,599 144,054 −9999 −9999
(Ricordiamo che la v.a. esponenziale può modellizzare gli intertempi fra gli ingressi o le chiamate telefoniche in una Farmacia).

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard della virgola decimale (come si vede dal numero 565,49 e allora il punto è separatore delle migliaia).

(In questo esercizio la questione del punto o virgola decimali è fondamentale).

Ovviamente gli outlier sono i numeri negativi −9999, che eliminiamo come richiesto.

Il campione privato degli outlier ha $n = 11$ elementi e ha media

$$\overline{X}_{11} = \frac{x_1 + ... + x_{11}}{11} =$$

$$= (281{,}477 + 129{,}545 + 170{,}042 + 98{,}283 + 1.034 + 565{,}49 + 36{,}036+$$
$$+26{,}750 + 1.373 + 17{,}599 + 144{,}054)/11 =$$

facendo attenzione a non scrivere sulla calcolatrice i punti separatori delle migliaia (che servono solo per aiutare gli umani nella lettura)

$$= 3.876,276/11 \approx 352.389$$

(sempreché la nostra calcolatrice usi la virgola decimale, e se invece usa il punto decimale bisogna scrivere su essa punti al posto delle soprastanti virgole, ovviamente) e col classico stimatore $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}$ del parametro λ di una densità esponenziale, il reciproco della media del campione, si trova

$$\boxed{\approx 0{,}0028}$$

o anche

$$\boxed{\approx 0{,}003}$$

Nota. I valori sono stati ottenuti, salvo arrotondamenti e aggiunta di 2 outlier, con WolframAlpha con $\lambda = 0.0019$ con l'istruzione
`11 random numbers exponential distribution lambda=0.0019`
che ovviamente, se richiamata da qua, in generale produrrà valori diversi, nuovi.
La stima in effetti non è andata benissimo, avendo trovato 0,0028 invece di 0,0019, ma è molto meglio che niente – com'è in generale con gli stimatori puntuali, specialmente con campioni poco numerosi.