Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Calcolare $\lg 3000 - 2\lg\sqrt{30}$

$$\boxed{2}$$

(Per una proprietà dei logaritmi il 2 va ad esponente dell'argomento del logaritmo, e poi esponente e radice si elidono, e si ottiene una differenza di logaritmi nella stessa base, che dà il logaritmo del quoziente:

$$\lg 3000 - 2\lg\sqrt{30} =$$

$$= \lg 3000 - \lg\left(\sqrt{30}\right)^2 =$$
$$= \lg 3000 - \lg 30 =$$
$$= \lg \frac{3000}{30} =$$
$$= \lg 100 = 2$$

OPPURE:

$$\lg 3000 - 2\lg\sqrt{30} =$$
$$\lg 3000 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lg 30 =$$

e si continua come sopra).

ES. 0b$_{\mu 2024}$ (R) % Qual è la probabilità di ottenere sempre pari lanciando 4 volte un dado a 20 facce?

$$\boxed{6.25\%}$$

(La probabilità che un dado a 20 facce dia un risultato pari è $\frac{1}{2}$ e allora che lo faccia per 4 volte è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0.0625$).

ES. 0c$_{\mu 2024}$ (R) $\ast$ Il ricercatore cerca in generale di ottenere preferibilmente un p-value piccolo o grande?

$$\boxed{\text{piccolo}}$$

ES. 1$_{\mu 2024}$ $\ast$ Supponiamo che di 24391 ricoverati per una nuova malattia muoiano 8123. Si esprima a parole (divulgativamente) la situazione con un'espressione approssimata come

"morti 2 su 3" oppure "morto 1 su 4".

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\frac{morti}{ricoverati} = \frac{8123}{24391} \approx$$

con la calcolatrice

$$\approx 0.33303$$

che riconosciamo essere circa $\frac{1}{3} = 0.33333... = 0.\overline{3}$ e allora, a parole e approssimativamente:

$$\boxed{\text{morto 1 su 3}}$$

ES. 2$_{\mu 2024}$ $\star$ Si scrivano i primi termini della successione di Fibonacci, da $a_0 = 1$ ad $a_{11} = 144$:

1 1 2 ... 144

Calcolare

$$\frac{a_{11}}{a_{10}}$$

A quale notissima costante matematica si avvicina molto?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale (ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

I primi 12 termini della successione di Fibonacci, da $a_0 = 1$ ad $a_{11} = 144$, sono, e li scriviamo come richiesto nel quesito,

<u>1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144</u>

allora $a_{10} = 89$ e allora

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{144}{89} \approx 1{,}617\,98$$

vicinissima a questa notissima costante matematica:

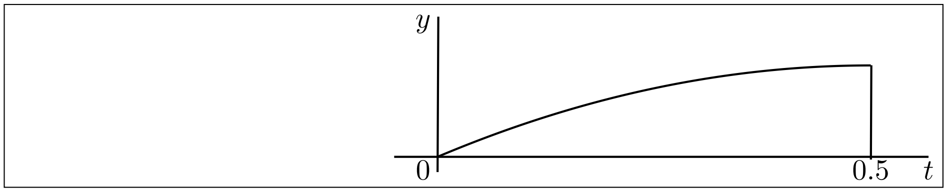
$$\boxed{\text{sezione aurea}}$$

che notoriamente vale circa 1,618 e più precisamente

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,03$$

Nota. Il rapporto fra un termine della successione di Fibonacci e il precedente tende, nel senso del limite, esattamente alla sezione aurea φ.
Già $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ è molto vicino, come abbiamo sopra visto.

ES. 3$_{\mu 2024}$ $\approx$ Per com'è definita in Fisica la velocità di un punto, lo spazio che percorre nel tempo da t_1 a t_2 il punto di velocità $v(t)$ (la velocità è data come funzione del tempo t) è l'integrale definito di $v(t)$ da t_1 a t_2, che è l'area (con segno se $v(t)$ assume anche valori negativi, che non succede nel nostro quesito) del sottografico corrispondente.



Si calcoli dunque lo spazio percorso con $v(t) := t - t^2$ e i tempi estremi 0 e $\frac{1}{2}$, cioè in definitiva si calcoli, anche senza considerare il testo e la figura soprastanti:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - t^2\right) \mathrm{d}\,t$$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - t^2\right) \mathrm{d}\,t =$$

con l'integrale indefinito $\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + c$ di $t - t^2$

$$= \left[\frac{1}{2}\,t^2 - \frac{1}{3}\,t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - (0 - 0) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{3 - 1}{3 \cdot 8} =$$

$$= \frac{2}{24} \approx$$

$$\boxed{\approx 0.08333}$$

Nota. Naturalmente $\frac{2}{24}$ si potrebbe, ma senza alcun vantaggio in questo caso, semplificare a $\frac{1}{12}$.

ES. 4$_{\mu 2024}$ $\ast$ Supponiamo che per una certa specie di animali, metà muoia a 3 anni di vita, un terzo a 2 anni, e un sesto a 1 anno. (Anni esatti, ipotesi poco realistica, ovvero, approssimata). Qual è l'aspettativa di vita? Ovvero la speranza matematica della variabile aleatoria *durata della vita*.

SVOLGIMENTO

La variabile aleatoria X :=*durata della vita*

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ha speranza matematica

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} =$$

cioè, con semplici calcoli,

$$= \frac{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{6} =$$

$$= \frac{1 + 4 + 9}{6} =$$

$$= \frac{14}{6} = \qquad (*)$$

e qua potremmo concludere così, semplificando la frazione:

$$\boxed{\tfrac{7}{3} \text{ di anno}}$$

ma è meglio continuare così, moltiplicando numeratore e denominatore per 2:

$$(*) \qquad = \frac{28}{12}$$

cioè 28 dodicesimi di anno, cioè

$$\boxed{\text{28 mesi}}$$

ES. 5$_{\mu 2024}$ $*$ Si stimi (con l'usuale stimatore dei momenti) il parametro a di una variabile aleatoria uniforme discreta $\mathbb{U}\{0, a\}$ da cui è stato tratto questo campione:

479 181 412

(Si può ipotizzare che sia stata ottenuta cercando su un lungo libro in formato di testo digitale una parola qualunque trovandola 3 volte, nelle pagine coi numeri sopradetti; stiamo perciò facendo una vaga stima del numero di pagine del libro, che magari per qualche motivo non possiamo conoscere direttamente; la stima è vaga anche perché il modello è approssimativo per la non indipendenza delle 3 determinazioni – sempre diverse – della variabile aleatoria retrostante al fenomeno; ma non è necessario che il risolutore consideri tutto ciò).

SVOLGIMENTO

Lo stimatore di a è notoriamente il doppio della media del campione:

$$\hat{a} := 2\,\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \qquad = 2\,\bar{X}_n$$

e adesso, con $n = 3$ e i 3 valori dati,

$$\hat{a} := 2\,\frac{479 + 181 + 412}{3} =$$

$$= 2\,\frac{1072}{3} =$$

$$= 2 \cdot 357.\overline{3} \approx$$

$$\boxed{\approx 714.7}$$

Nota. Salvo lievi aggiustamenti della situazione, si era fatto così: cercata la parola "diminuzioni" sul libro Le Compresse di Matematica per le Scienze della Farmacia, in effetti di circa 830 pagine nel momento della ricerca; comunque la prima pagina non è la 0, e per di più è un'immagine, su cui la ricerca di parole non opera. La stima comunque è andata abbastanza bene.