Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Risolvere l'equazione $\ln x = 2$

$$\boxed{e^2}$$

(Si ha:

$$\ln x = 2 \qquad \Big/ \exp$$

da cui il risultato).

ES. 0b$_{\mu 2024}$ (R) $*$ L'integrale indefinito di $\frac{1}{x^2}$ è ...

$$\boxed{-\frac{1}{x} + c}$$

(Si applica la classica formula

$$\forall\, \alpha \neq -1 \qquad \int x^{\alpha}\, dx \;=\; \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

alla funzione x^{-2} considerata).

ES. 0c$_{\mu 2024}$ (R) $^{\%}$ Qual è la probabilità di ottenere sempre dispari su 4 lanci di un dado?

$$\boxed{6{,}25\%}$$

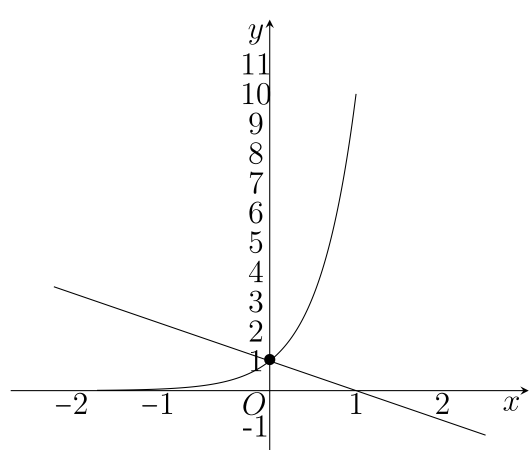
(Si tratta di calcolare il prodotto $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ che fa $\frac{1}{16} = 0{,}0625$).

ES. 1$_{\mu 2024}$ $\ast$ Risolvere per via grafica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 10^{x} \end{cases}$$

(dando la soluzione nella forma $x = ...$, $y = ...$).

SVOLGIMENTO



Già bastano questi pochi (valori delle coordinate di) punti dei 2 grafici

x	$1-x$
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1

x	10^x
-2	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10

e disegnando (vedi figura) sullo stesso piano cartesiano grafici (approssimativi), vediamo subito che c'è un punto di intersezione $(0,1)$, e non esistono altri per le proprietà elementari delle funzioni $1-x$ e 10^x, e allora la soluzione del sistema di equazioni è data dalle coordinate x e y dell'unico punto di intersezione dei grafici:

$$\boxed{x = 0,\ y = 1}$$

ES. 2$_{\mu 2024}$ $\ast$ Calcolare la mediana di $\lg \frac{1}{10}$, $\lg \frac{1}{100}$, $\lg \frac{1}{1000}$, $\lg \frac{1}{10000}$, $\lg 1$.

SVOLGIMENTO

Il dataset considerato

$\lg \frac{1}{10}$, $\lg \frac{1}{100}$, $\lg \frac{1}{1000}$, $\lg \frac{1}{10000}$, $\lg 1$

ovvero

$\lg 10^{-1}$, $\lg 10^{-2}$, $\lg 10^{-3}$, $\lg 10^{-4}$, $\lg 1$

è

$-1\ -2\ -3\ -4\ \ 0$

che ordiniamo in senso crescente

$-4\ -3\ -2\ -1\ \ 0$

e il valore centrale degli $n = 5$ (dispari) elementi è la mediana cercata:

$$\boxed{-2}$$

o anche

$$\boxed{\log \frac{1}{100}}$$

ES. 3$_{\mu 2024}$ $*$ Trovare il punto di minimo di

$$f(x) := x - 2 \arctan x \qquad x > 0$$

SVOLGIMENTO

Abbiamo la derivata

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} \qquad x > 0$$

da cui la disequazione per $x > 0$

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} > 0 \qquad \Big/ \cdot (1 + x^2) > 0$$

$$1 + x^2 - 2 > 0$$

$$x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 > 1$$

$$x < -1 \vee x > 1$$

e tenendo conto che $x > 0$ resta solo $x > 1$:

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1$$

Allora

$f(x)$ è decrescente per $0 < x < 1$

$f(x)$ è crescente per $x > 1$

e allora $x = 1$ è (unico) punto di minimo per $x > 0$.

$$\boxed{x = 1}$$

ES. 4$_{\mu 2024}$ % Per una variabile aleatoria X normale standard calcolare

$$P(-2 \le X \le 0)$$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

$$P(-2 \le X \le 0) =$$

per la simmetria della densità normale standard (si pensi alla campana gaussiana suo grafico)

$$= \frac{1}{2} P\left(-2 \le X \le 2\right) =$$

e qua abbiamo il valore classico del 95%, approssimativamente,

$$\approx \frac{1}{2} 0.95 = 0.475 =$$

$$\boxed{\approx 47.5\%}$$

ES. 5$_{\mu 2024}$ $\star$ Calcolare lo stimatore della varianza (usuale) per una variabile aleatoria di cui abbiamo un campione che per caso ha i valori delle prime 3 cifre significative di π.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

È

$$\pi \approx 3.14$$

e allora le prime 3 cifre significative sono

3 1 4

che è il nostro campione.

Detta X la variabile aleatoria considerata, il consueto stimatore non distorto della media è

$$\overline{X}_3 = \frac{3+1+4}{3} = \frac{8}{3}$$

e quello della varianza è

$$S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 =$$

con $n = 3$

$$= \frac{1}{3-1} \sum_{k=1}^{3} \left(X_k - \frac{8}{3}\right)^2 =$$

coi valori del dataset

$$= \frac{1}{2} \left(\left(3 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{8}{3}\right)^2 \right) =$$

che è il valore cercato, seppure malamente espresso, e che con semplici calcoli

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{25}{9} + \frac{16}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{42}{9} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{9} =$$

$$\boxed{\frac{7}{3}}$$