Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Risolvere l'equazione $x^4 = 1$

$$\boxed{\pm 1}$$

(Si ha:
$1 = x^4 = |x^4| = |x|^4 = \left(|x|^2\right)^2$, allora $|x|^2 = \pm 1$, allora $|x| = 1$, e allora $x = \pm 1$;
OPPURE:
$1 = x^4 = (x^2)^2$ e allora $x^2 = -1$ che è impossibile oppure $x^2 = 1$ che dà $x = \pm 1$).

ES. 0b$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Calcolare $\lg 1000 - \lg 250$

$$\boxed{\lg 4}$$

(Per una classica proprietà dei logaritmi $\lg 1000 - \lg 250 = \lg \frac{1000}{250}$ che è $\lg 4$).

ES. 0c$_{\mu 2024}$ (R) $\ast$ Completare la parola mancante:
$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2$ *è il classico ... della varianza, e si noti il denominatore* $n-1$ *invece di* n.

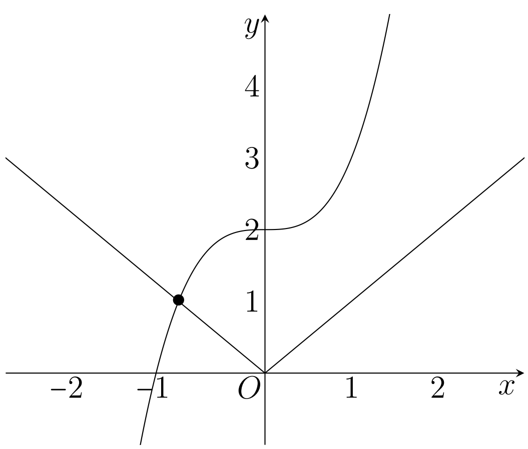
$$\boxed{\text{stimatore}}$$

ES. 1$_{\mu 2024}$ $\ast$ Risolvere per via grafica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = |x| \\ y = x^3 + 2 \end{cases}$$

(dando la soluzione nella forma $x = ...$, $y = ...$).

SVOLGIMENTO



Già bastano questi pochi (valori delle coordinate di) punti dei 2 grafici

x	$\lvert x\rvert$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

x	x^3+2
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10

e disegnando (vedi figura) sullo stesso piano cartesiano grafici (approssimativi), vediamo subito che c'è un punto di intersezione $(-1,1)$, e non esistono altri per le proprietà elementari delle funzioni $|x|$ e x^3, e allora la soluzione del sistema di equazioni è data dalle coordinate x e y dell'unico punto di intersezione dei grafici:

$$\boxed{x=-1,\ y=1}$$

ES. 2$_{\mu2024}$ ≈ Calcolare la mediana di questo dataset:

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{n}-2.45} \qquad n=1,...,8$$

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

Calcolati gli 8 valori
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1}-2.45} \approx -0.6897$
$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-2.45} \approx -0.9654$
$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}-2.45} \approx -1.3929$
$x_4 = \frac{1}{\sqrt{4}-2.45} \approx -2.2222$
$x_5 = \frac{1}{\sqrt{5}-2.45} \approx -4.6744$
$x_6 = \frac{1}{\sqrt{6}-2.45} \approx -1959.8$
$x_7 = \frac{1}{\sqrt{2}-2.45} \approx 5.1085$
$x_8 = \frac{1}{\sqrt{2}-2.45} \approx 2.6425$
e riordinati in senso crescente

$-1959.8 \quad -4.6744 \quad -2.2222 \quad -1.3929 \quad -0.9654 \quad -0.6897 \quad 2.6425 \quad 5.1085$

la mediana è la media dei 2 centrali, perché 8 è pari:

$$mediana \approx \frac{-1.3929-0.9654}{2}$$

$$\boxed{\approx -1.179}$$

oppure anche

$$\boxed{\approx -1.18}$$

ES. 3$_{\mu 2024}$ *

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$$

SVOLGIMENTO

Com'è ben noto, ed espresso dal classicissimo (disegno del) grafico della radice quadrata,

LINK->

il limite è

$$\boxed{+\infty}$$

(e detto a parole: per grandissimi valori di x, si ottengono quantomai grandi valori della radice quadrata; si pensi a $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10\,000} = 100$, $\sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$... Si comprende bene che $\sqrt{x}$ va a $+\infty$, per x che tende a $+\infty$, per quanto un po' lentamente, e infatti la sua derivata $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ tende a 0).

ES. 4$_{\mu 2024}$ % Data la densità di una variabile aleatoria X

$$f(t) := \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

calcolare $P\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{\pi}{2}\right)$. (Si ricordi che $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$).

SVOLGIMENTO

$$P\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, \mathrm{d}\, t =$$

ricordando che una primitiva di $\sin t$ è $-\cos t$, ovvero che l'integrale indefinito di $\sin t$ è $-\cos t + c$,

$$= \left[-\cos t\right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{2} - \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

coi valori classici, ricordati nel testo del quesito,

$$= -0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx$$

con la calcolatrice

$$\approx 0.707$$

e in percentuale

$$\boxed{\approx 70.7\%}$$

ovvero

$$\approx 71\%$$

ES. 5$_{\mu 2024}$ $\star$ **Si motivi dettagliatamente la risposta.** Si supponga che per un test statistico relativo alla pandemia del covid-19, con ipotesi nulla H_0 e alternativa A, al livello $\alpha = 0{,}01$ la regione critica sia definita da $T \in [0, c]$ essendo c un valore positivo e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore $-18{,}024$, e che sia vera A. Quale di queste è vera?

- Non è possibile rispondere perché non è specificato il test usato
- Non è possibile rispondere perché non si sa se il campione è gaussiano
- Non si può applicare un test statistico per una pandemia ancora in corso
- Non è possibile rispondere perché 0,01 non è affatto il 5%
- Non è possibile rispondere perché non si sa se la virgola è virgola decimale
- Non è possibile rispondere perchè non è noto c
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il quantile
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Si commette un errore di prima specie
- Si commette un errore di seconda specie
- Era il caso in generale sperato.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. (Questo si vede dal valore 0,01 ed è falsa l'affermazione "Non è possibile rispondere perché non si sa se la virgola è virgola decimale ").

Lo stimatore ha un valore negativo e allora non appartiene alla regione critica $[0, c]$ con c positivo.

L'ipotesi (nulla) H_0 è falsa perché l'alternativa A è vera.

Allora *male non respingo ipotesi falsa* e allora

$$\boxed{\text{si commette un errore di seconda specie}}$$