Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Qual è il valore di verità di: falso *vel* vero?

$\boxed{\text{vero}}$

ES. 0b$_{\mu 2024}$ (R) $*$ $\lg 10^{100} =$

$\boxed{100}$

ES. 0c$_{\mu 2024}$ (R) % Qual è la probabilità che un dado regolare a 20 facce (icosaedro regolare) dia un risultato minore di 10?

$$\boxed{45\%}$$

(I casi favorevoli sono 9 e quelli possibili equiprobabili 20 e allora si ha $\frac{9}{20} = 0.45 = 45\%$).

ES. 1$_{\mu 2024}$ * Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\mathrm{e}} > x^2$$

SVOLGIMENTO

Si potrebbe dapprima risolvere l'equazione di secondo grado associata

$$\sqrt{\mathrm{e}} = x^2 \quad \text{cioè} \qquad x^2 - \sqrt{\mathrm{e}} = 0$$

(trovando le 2 radici $\pm\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}}$) ma veramente non è necessario: ci basta ricordare che

$$\forall\, c > 0 \quad x^2 < c \qquad \text{equivale a } -\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$$

per trovare nel nostro caso (con $c = \sqrt{\mathrm{e}}$)

$$-\sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}} < x < \sqrt{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

che è la soluzione esatta cercata (malamente espressa) e che bene esprimiamo con

$$\boxed{-\sqrt[4]{\mathrm{e}} < x < \sqrt[4]{\mathrm{e}}}$$

ovvero

$$\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{4}} < x < \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}$$

ES. 2$_{\mu 2024}$ ≈ Qual è la mediana di questo dataset? Se anche vi si trovasse qualche outlier, non lo si elimini.
0 193,882 227,505 466,597 1.495 702,089 661,762 833,019 196,62 1.172 1.417 724,845

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale (come si vede dal numero 196,62 e allora il punto è separatore delle migliaia).

(In questo esercizio la questione del punto o virgola decimali è fondamentale).

Riordiniamo i valori in modo crescente:
0 193,882 196,62 227,505 466,597 661,762 702,089 724,845 833,019 1.172 1.417 1.495

I valori sono 12, che è pari, e allora la mediana è la media aritmetica dei 2 centrali, cioè il sesto e il settimo:

$$\text{mediana} = \frac{661{,}762 + 702{,}089}{2} =$$

$$= \frac{1.363{,}851}{2} = 681.9255 \approx$$

$$\boxed{\approx 681.93}$$

o anche

$$\boxed{\approx 682}$$

ES. 3$_{\mu 2024}$ $\ast$ Calcolare

$$\max\left(3 + x - \mathrm{e}^x\right)$$

SVOLGIMENTO
La funzione
$$f(x) \coloneqq 3 + x - \mathrm{e}^x$$
(di cui cerchiamo il massimo) è derivabile nel suo dominio. (Che è $\mathbb{R}$).

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \mathrm{D}\ \left(3 + x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$= 0 + 1 - \mathrm{e}^x$$

e la disequazione $f'(x) > 0$ adesso è

$$1 - \mathrm{e}^x > 0 \qquad \Big/ - 1$$

$$-\mathrm{e}^x > -1 \qquad \Big/ \cdot (-1)$$

$$e^x < 1 \qquad \Big/ \ln$$

$$x < 0$$

allora
$f(x)$ è crescente per $x < 0$
$f(x)$ è decrescente per $x > 0$
allora $x = 0$ è unico punto di massimo relativo e assoluto, e allora

$$\max\left(3 + x - e^x\right) = f(0) =$$

$$= 3 + 0 - e^0 =$$

$$= 3 - 1 =$$

$$\boxed{2}$$

ES. 4$_{\mu 2024}$ % Per una variabile aleatoria Z normale standard calcolare

$$P\left(0 \le Z \le 2\right)$$

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

$$P\left(0 \le Z \le 2\right) =$$

per la simmetria della densità normale standard (si pensi alla campana gaussiana suo grafico)

$$= \frac{1}{2} P\left(-2 \le Z \le 2\right) =$$

e qua abbiamo il valore classico del 95%, approssimativamente,

$$\approx \frac{1}{2} 0{,}95 = 0{,}475$$

$$\boxed{\approx 47{,}5\%}$$

ES. 5$_{\mu 2024}$ $\ast$ Al consueto livello della significatività statistica, si respinga o non si respinga l'equivalenza di farmaco e placebo, in base a questi risultati, eventualmente provenienti da un *trial clinico in doppio cieco*:

	guariti	non guariti
farmaco	80	20
placebo	80	40

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Ricordiamo la teoria del test del chi quadrato di indipendenza.
In pratica per la tabella 2×2 (*tetracorica*) a 4 valori a, b, c, d, ultrasemplificando in *guariti* e *non guariti* i possibili esiti clinici, ecco il calcolo da fare per

	guariti	non guariti
farmaco 1	a	b
farmaco 2	c	d

$$\boxed{\text{al livello 0.05 ovvero 0.95 rifiuto l'ipotesi nulla}}$$
$$\boxed{H\text{: il farmaco 1 equivale al farmaco 2}}$$

$$\boxed{\text{se}} \tag{1}$$

$$\boxed{T := \frac{(a\,d - b\,c)^2\,(a+b+c+d)}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)} > 3.84}$$

(Altri Autori usano una formula leggermente diversa e più complessa con la *correzione di Yates*).

Coi valori numerici dati, e salvo il fatto che farmaco 2 della teoria è il placebo del quesito, e farmaco 1 è il farmaco, si ha:

$$T = \frac{(80 \cdot 40 - 20 \cdot 80)^2\,(80 + 20 + 80 + 40)}{(80 + 20)(80 + 80)(20 + 40)(80 + 40)} =$$

$$= \frac{(3200 - 1600)^2 \cdot 220}{100 \cdot 160 \cdot 60 \cdot 120} =$$

$$= \frac{1600^2 \cdot 220}{100 \cdot 160 \cdot 60 \cdot 120} =$$

$$= \frac{16^2 \cdot 100^2 \cdot 220}{100 \cdot 160 \cdot 60 \cdot 120} =$$

$$= \frac{256 \cdot 10000 \cdot 220}{100 \cdot 160 \cdot 60 \cdot 120} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{256 \cdot 22}{1 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 12} = \\
&= \frac{5632}{1152} \approx \\
&\approx 4.89 > 3.84
\end{aligned}
$$

e allora

$$\boxed{\text{Si respinge l'ipotesi (nulla) dell'equivalenza del farmaco e del placebo (al livello 0.05).}}$$