**Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.**

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Calcolare

$$\frac{e^2 e^5}{e^3}$$

$$\boxed{e^4}$$

(Per le proprietà delle potenze – proprio quelle più basiche – si ha e^{2+5-3}).

ES. 0b$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Qual è la derivata di $\cos x$, funzione di fondamentale importanza in Fisica? (Oltre a essere nascostamente alla base dell'elaborazione digitale di immagini, anche biomediche).

$$\boxed{-\sin x}$$

ES. 0c$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Quali 2 parole mancano al posto dei puntini?
"La formula *male respingo ipotesi vera* definisce l'errore di ... ..."

$$\boxed{\text{prima specie}}$$

ovvero per altri Autori

$$\boxed{\text{tipo I}}$$

ES. 1$_{\mu 2024}$ $*$ Risolvere l'equazione

$$\lg(x+1) - \lg\frac{1}{x} = 0$$

SVOLGIMENTO

Prima di tutto deve essere, essendo argomenti di logaritmi,

$$x+1>0 \quad \wedge \quad x>0$$

ovvero

$$x>-1 \quad \wedge \quad x>0$$

ovvero

$$x>0 \qquad (*)$$

Per una proprietà del logaritmo del reciproco l'equazione diventa subito

$$\lg(x+1) + \lg x = 0$$

per una proprietà della somma di logaritmi

$$\lg((x+1)\,x) = 0$$

$$\lg(x^2+x) = 0 \qquad \Big/ 10^\wedge$$

$$x^2 + x = 10^0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

che è equazione di secondo grado che si risolve subito con le 2 classicissime formule per Δ e per $x_{1,2}$:

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c =$$

$$= 1 + 4 = 5 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ed escludendo per la $(*)$ la soluzione negativa $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (che è ≈ -1.618, con lo standard del punto decimale, ma è calcolo non necessario)

$$\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

OPPURE

Riprendiamo da $(*)$ e poi

$$\lg(x+1) - \lg\frac{1}{x} = 0$$

$$\lg(x+1) = \lg\frac{1}{x} \qquad \Big/ 10^\wedge$$

$$x + 1 = \frac{1}{x} \qquad \Big/ \cdot x \neq 0$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

e si conclude come prima.

ES. 2$_{\mu 2024}$ $*$ Dopo aver eliminato gli outlier, tutti uguali, da questo dataset,

30 48 80 112 13 31 49 81 50 82 83 84 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

si otterrà un nuovo dataset (che, senza che il risolutore debba occuparsene, ha i numeri atomici degli elementi della tavola periodica che, seguendo alcuni Autori, si possono definire *metalli di post-transizione*, e qua sono stati considerati procedendo per colonne sulla tavola periodica) di cui si calcolerà la media interquartile.

SVOLGIMENTO

Gli outlier sono gli zeri ovviamente. (Non si ipotizzi che 112 sia un outlier perché è ben detto che gli outlier sono tutti uguali).

I 12 valori vengono riordinati in modo crescente

13 30 31 48 49 50 80 81 82 83 84 112

e poi suddivisi in 4 “quartili” di 3 elementi

13 30 31 // 48 49 50 // 80 81 82 // 83 84 112

e poi eliminando i quartili estremi restano questi 6 valori

48 49 50 80 81 82

la cui media aritmetica è la media interquartile cercata:

$$IQM = \frac{48+49+50+80+81+82}{6} =$$

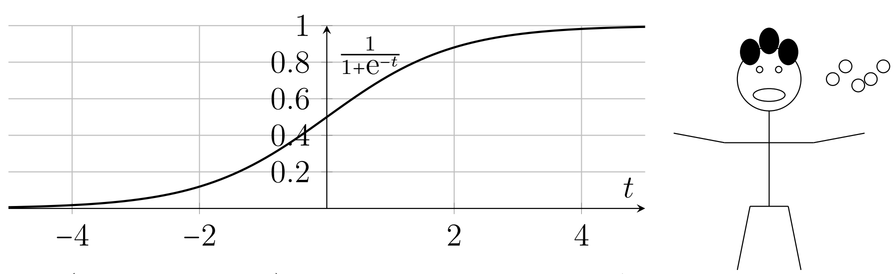
$$= \frac{390}{6} =$$

$$\boxed{65}$$

ES. 3$_{\mu 2024}$ $\ast$ La funzione considerata in questo esercizio è la *logistica standard* (vedasi figura), che non solo modellizza molti fenomeni Biomedici, ma anche è usata (come *funzione di attivazione)* in software di *intelligenza artificiale.* Calcolare

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$$

(L’IA va assumendo crescente importanza anche nelle applicazioni vicine alla Farmacia: Google il 30 gennaio 2024 dice di trovare più di 25 milioni di riferimenti per “artificial intelligence” “pharmacy”. Si sentirà molto parlare di IA, o AI, in futuro).



A sinistra (disegno di parte del) grafico della *logistica standard.* A destra *Farmacista con pillole*, disegno fatto – con rielaborazioni guidate – con lo stesso editor LaTeX usato per il presente testo (non è una figura inserita da file esterno) mediante un programmino (che inizia con \begin{tikzpicture}) scritto da ChatGPT,

SVOLGIMENTO

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} =$$

per una basica proprietà delle potenze

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{t}}} =$$

la funzione e^t è infinita in $+\infty$ ellora la sua reciproca $\frac{1}{e^t}$ è infinitesima in $+\infty$:

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+0} =$$

$$\boxed{1}$$

OPPURE

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-t}} =$$

ricordando che e^{-t} tente a 0 per $t \to +\infty$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+0} = 1$$

Nota. La funzione considerata è la *logistica standard* che notoriamente ha asintoto orizzontale destro $y = 1$. E un po' s'intuisce anche dal grafico.

ES. 4$_{\mu 2024}$ % Per una variabile aleatoria normale standard X trovare $P(X \leq 1.96)$ che, con le modeste approssimazioni che si usa imparare a memoria, è lo stesso che $P(X \leq 2)$.

SVOLGIMENTO

$$P(X \leq 1.96) =$$

per definizione della funzione di ripartizione normale standard $\Phi(x)$

$$= \Phi(1.96) \approx \qquad (*)$$

ora ci ricordiamo del valore classico, il più classico di tutti i quantili,

$$\phi_{0.975} \approx 1.96 \qquad \text{equivalente a} \quad \Phi(1.96) \approx 0.975$$

(infatti ϕ_α è l'inversa di $\Phi(x)$) e riprendendo dall'asterisco

$$\approx 0.975$$

e infine in percentuale come richiesto

$$\boxed{\approx 97.5\%}$$

OPPURE

$$P(X \le 2) =$$

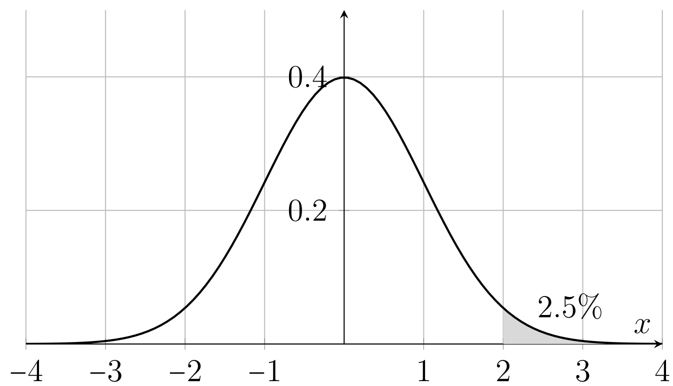
con l'evento complementare

$$= 1 - P(X > 2) =$$

trattandosi di variabile aleatoria continua

$$= 1 - P(X \ge 2) = (*)$$

e qua ci ricordiamo della classica coda destra della densità normale standard,



corrispondente, da 2 a $+\infty$, alla probabilità circa del 2.5% ovvero 0.025:

$$(*) = 1 - 0.025$$

e si conclude come prima.

ES. 5$_{\mu 2024}$ $\approx$ Dopo aver eliminato un outlier, stimare il parametro λ di una variabile aleatoria esponenziale da cui è stato tratto questo campione:

15.479 11.075 333.274 469.469 1,166 1,264 1,030 45.447 575.01 618.376 -999 (Ricordiamo che la v.a. esponenziale può modellizzare gli intertempi fra gli ingressi in una Farmacia).

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale (come si vede dal numero 575.01 e la virgola allora è separatore delle migliaia).

(In questo esercizio la questione del punto o virgola decimali è fondamentale).

Ovviamente l'outlier è il numero negativo -999, che eliminiamo come richiesto.

Il campione privato dell'outlier ha $n = 10$ elementi e ha media

$$\overline{X}_{10} = \frac{x_1 + \ldots + x_{10}}{10} =$$

$$= \frac{15.479 + 11.075 + 333.274 + 469.469 + 1{,}166 + 1{,}264 + 1{,}030 + 45.447 + 575.01 + 618.376}{10} =$$

facendo attenzione a non scrivere sulla calcolatrice le virgole separatrici delle migliaia (che servono solo per aiutare gli umani nella lettura)

$$= \frac{5528.13}{10} = 552.813$$

e col classico stimatore $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}$ del parametro λ di una densità esponenziale, il reciproco della media del campione, si trova

$$\boxed{\approx 0.000181}$$

o anche

$$\boxed{\approx 0.00018}$$

Nota. I valori sono stati ottenuti, salvo arrotondamenti e riordinamento, con WolframAlpha con $\lambda = 0.002$ con l'istruzione

`10 random numbers exponential distribution lambda=0.002`

che ovviamente, se richiamata da qua, in generale produrrà valori diversi, nuovi.