**Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.**

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$\ast$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2024}$ (R) $\ast$ Dire quanti sono (a prescindere dal senso eventuale) gli anagrammi della parola *oro*, ovvero in quanti modi si può riordinare il dataset

o, r, o

$$\boxed{3}$$

(L'*elencazione con conteggio* risolve subito il problema, e qua lo applichiamo al dataset considerato:

r, o, o
o, r, o

o, o, r,

e si trova 3 – e similmente considerando gli anagrammi, a prescindere dal senso: *roo*, *oro*, *oor* – ed errato è invece applicare la formula dell'$n!$, ora 3!, del numero di permutazioni di un insieme di n elementi, perchè qua abbiamo un dataset di 3 elementi ma non un insieme di 3 elementi; gli elementi sono 2 – o, r – e non c'entra nulla, a causa della ripetizione di un elemento; sarebbe anche possibile applicare una formula – *formula delle permutazioni con ripetizione* – per trovare il risultato 3, ma più complessa dell'elencazione con conteggio, e ben poco nota).

ES. 0b$_{\mu2024}$ (R) Qual è qua sotto il simbolo mancante in ... nella formula del *valore predittivo positivo* dei test diagnostici?

$$VVP = \frac{veri\,positivi}{totale\,positivi} = \frac{V_+}{V_+ + \ldots}$$

$$\boxed{F_+}$$

(Se anche non ci ricordassimo la formula, si ricava subito: è ovvio che il totale dei positivi si ottiene sommando i veri positivi coi falsi positivi: $V_+ + F_+$).

ES. 0c$_{\mu2024}$ (R) $\ast$ Qual è la parola qua di seguito mancante? *Col simbolo* Φ*, ovvero con* $\Phi(x)$*, si usa indicare la funzione di ripartizione ... standard.*

$$\boxed{\text{normale}}$$

(Naturalmente nulla esclude, nemmeno il testo del quesito per com'è formulato, che venga usata una variabile diversa da x).

ES. 1$_{\mu2024}$ $\ast$ Supponiamo che un fenomeno cresca linearmente (e ci sono un'infinità di applicazioni vicine alla Farmacia) fra il tempo $t_1 = 240$ e il tempo $t_2 = 400$ dai valori 376 a 1976. Trovare l'equazione (di una retta) $y = mt + q$ modello del fenomeno (nell'intervallo temporale considerato) e con essa stimare il valore al tempo 350.

SVOLGIMENTO

Ai valori $t_1 = 240$ e $t_2 = 400$ corrispondono i valori $y_1 = 376$ e $y_2 = 1976$ rispettivamente, ovvero nel piano cartesiano abbiamo i 2 punti $(240, 376)$ e

$(400, 1976)$. Con l'equazione della retta per 2 punti, qua espressa per variabili t e y, piuttosto che con le più usuali x e y,

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

mettendo i valori numerici abbiamo

$$\frac{t - 400}{240 - 400} = \frac{y - 1976}{376 - 1976}$$

che è l'equazione della retta, e che ora con semplici manipolazioni algebriche porteremo alla richiesta forma $y = m\,t + q$:

$$\frac{t - 400}{-160} = \frac{y - 1976}{-1600} \qquad \Big/ \cdot (-1600)$$

$$10\,(t - 400) = y - 1976 \qquad \Big/ + 1976$$

$$1976 + 10\,t - 4000 = y$$

e allora

$$y = 10\,t - 2024$$

---

in cui poniamo $t = 350$ ottenendo

$$y = 10 \cdot 350 - 2024 =$$

$$\boxed{1476}$$

ES. 2$_{\mu 2024}$ ≈ **Introduzione** (di nessuna utilità pratica per il risolutore del quesito: viene solo esposto un possibile esempio di applicazione in ambito farmaceutico). Un nuovo farmaco A usato in un trial clinico verrà valutato con 4 parametri:

a = soddisfazione media dei pazienti trattati nel trial, da 1 a 10;
b = soddisfazione media dei medici coinvolti nel trial, da 1 a 100;
c = soldi (euro) risparmiati, per paziente, rispetto al farmaco standard;
d = numero di prenotazioni che arriveranno nel primo mese di propaganda presso gli ospedali, più 1 (il "più 1" è un dettaglio tecnico, non ce se ne occupi). Infine si riassumerà il pregio del farmaco A con la media geometrica dei 4 numeri, per confrontarlo con un farmaco B attualmente allo studio. (Ovviamente la semplice media aritmetica avrebbe ben poca utilità perchè i parametri variano su scale molto diverse: 1000 o anche solo 100 euro in c potrebbero rendere

sostanzialmente irrilevanti variazioni di a, anche un suo catastrofico ridursi da 6 a 1). Naturalmente non vogliamo qua sostenere che questo sia un modo di procedere *ottimale* per un'Azienda Farmaceutica.
Quesito. Quant'è la media geometrica dei numeri 6, 42, 20, 35?

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale (ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Con la formula della media geometrica

$$GM(x_1, ..., x_n) := (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} =$$

per le proprietà delle radici

$$= \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}$$

nel nostro caso con $n = 4$ valori del dataset

$$GM(6, 42, 20, 35) = \sqrt[4]{6 \cdot 42 \cdot 20 \cdot 35} =$$

a mano o con la calcolatrice

$$= \sqrt[4]{176\,400} =$$

ricordando la formula di riduzione della radice quarta a 2 radici quadrate

$$= \sqrt{\sqrt{176\,400}} =$$

con la calcolatrice (o a mano)

$$= \sqrt{420} \approx$$

con la calcolatrice e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{\approx 20{,}49}$$

o anche

$$\boxed{\approx 20{,}5}$$

ES. 3$_{\mu 2024}$ $*$ Calcolare in $x = 2 \lg \mathrm{e}$ la derivata di $\lg x$. Se non si ricorda la formula di D $\lg x$, la si troverà con la classica formula $\lg x = (\lg \mathrm{e}) \ln x$ (che è la versione esatta della nota formula pratica $\lg x \approx 0.4343 \ln x$).

SVOLGIMENTO

Viene usato (solo nel testo del quesito) lo standard del punto decimale.

Se ricordiamo – come si dovrebbe – la

$$\mathrm{D}\lg x = \frac{\lg \mathrm{e}}{x} \qquad (*)$$

vi poniamo $x = 2\lg \mathrm{e}$ e concludiamo subito col risultato cercato:

$$\boxed{\tfrac{1}{2}}$$

(Con altra formula – comunque equivalente – della derivata di lg, la $\frac{1}{x \ln 10}$, che altri Autori e altri testi potrebbe preferire, si ottiene $\frac{1}{2\,(\lg \mathrm{e})\,\ln 10}$ che comunque vale $\frac{1}{2}$ ma dimostrarlo non è immediato: si può fare, per esempio: con la *formula di cambiamento di base del logaritmo*, oppure con la $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, per ogni a e b positivi e diversi da 1).

Se non si ricorda la $(*)$ ora la ricaviamo dalle indicazioni esposte nel quesito:

$$\mathrm{D}\lg x = \mathrm{D}\left((\lg \mathrm{e})\ln x\right) =$$

per la $\mathrm{D}\left(c\cdot f(x)\right) = c\cdot \mathrm{D}\, f(x)$, che "fa uscire" le costanti dal segno di derivazione,

$$= (\lg \mathrm{e}) \cdot \mathrm{D}\ln x =$$

e con la nota (e semplicissima) derivata $\frac{1}{x}$ del logaritmo naturale di x

$$= (\lg \mathrm{e}) \cdot \frac{1}{x}$$

abbiamo trovato la $(*)$ e poi si conclude come prima.

ES. 4$_{\mu 2024}$ % Con la (grossolana: errore assoluto < 0.04) approssimazione

$$\forall x \geq 0 \qquad \Phi(x) \approx \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{(3-x)^2}{12}} & x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

calcolare $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ per una variabile aleatoria normale standard X.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale (ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) =$$

con l'evento complementare

$$= 1 - P\left(X \le \frac{1}{2}\right) =$$

per definizione di $\Phi(x)$, funzione di ripartizione normale standard,

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) =$$

con l'approssimazione data

$$\approx 1 - \sqrt{1 - \frac{(3 - 1/2)^2}{12}} =$$

$$= 1 - \sqrt{1 - \frac{2.5^2}{12}} =$$

$$= 1 - \sqrt{1 - \frac{6.25}{12}} =$$

$$\approx 1 - \sqrt{1 - 0.520\,833} =$$

$$= 1 - \sqrt{0.479\,167} \approx$$

$$\approx 1 - 0.692\,219 =$$

$$= 0.307\,781 \approx$$

$$\boxed{\approx 30.8\%}$$

Nota. Un valore più preciso calcolabile con WolframAlpha è 30.854%.

ES. 5$_{\mu 2024}$ $\ast$ Di una variabile aleatoria dotata di varianza si trae un campione di 4 determinazioni (valori) che per caso risultano i primi 4 valori della successione di Fibonacci 1, 1... Quanto vale lo stimatore consueto della varianza della v.a.?

SVOLGIMENTO

Nella successione di Fibonacci ogni termine è la somma dei 2 precedenti, e allora iniziando da 1 e 1, come qua si fa e di solito si fa, i primi 4 valori sono

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

Detta X la variabile aleatoria considerata, il consueto stimatore non distorto della varianza è

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 =$$

essendo $\bar{X}$ lo stimatore non distorto della media, che è la media aritmetica dei valori del campione, e nel nostro caso vale $(1+1+2+3)/4 = 7/4$, e allora continuiamo il calcolo, con $n = 4$,

$$= \frac{1}{4-1}\sum_{k=1}^{4}\left(X_k - \frac{7}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(1-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(2-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(3-\frac{7}{4}\right)^2\right) =$$

che è il valore cercato, seppure malamente espresso, e che con semplici calcoli

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{4-7}{4}\right)^2 + \left(\frac{4-7}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-7}{4}\right)^2 + \left(\frac{12-7}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{25}{16}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{44}{16} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{11}{4} =$$

molto meglio esprimiamo con

$$\boxed{\frac{11}{12}}$$

Nota. Nel modo più assoluto questa non è una stima della, inesistente, "varianza dei termini della successione di Fibonacci.". Quella trovata è invece esattamente quanto richiesto: la stima (usuale) della varianza di una variabile aleatoria (dotata di varianza) della quale abbiamo un campione di 4 determinazioni che, per caso, coincidono coi primi 4 valori della successione di Fibonacci.