

Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli
standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono
numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello
svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri,
lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna solo questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda

* è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

\approx è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

**Esercizio 0. Triplice – quesiti basici –
chi non risolve almeno 2 non passa l'esame –
per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.**

ES. 0a _{μ_{2024}} (R) * In quanti modi diversi si può scegliere un sottogruppo di 4
studenti fra 5 studenti? (O di 4 farmaci fra 5, o di 4 bilance fra 5).

5

(Le scelte possibili sono tante quanti i modi di scegliere un unico studente da
escludere dal gruppo dei 5 per costituire il sottogruppo di 4 e questo si può fare
ovviamente in 5 modi; più tecnicamente si tratta del numero di *combinazioni*
di 5 elementi a 4 a 4 che sono in numero di

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = 5$$

e addirittura, in questo caso, anche l'elencazione con conteggio sarebbe *al limite accettabile* come metodo risolutivo).

ES. 0b _{μ_{2024}} (R) % Indicando con A^C il complementare di un evento A , quant'è $P(A) + P(A^C)$?

100%

(Si tratta di $P(vivo) + P(morto)$ o consimili casi: ovviamente 100%; più tecnicamente si risolve osservando che $P(A^C) = 1 - P(A)$ da cui il risultato 1 che espresso percentualmente, come richiesto, è 100%).

ES. 0c _{μ_{2024}} (R) * Potremo respingere, con ragionevole certezza statistica, l'ipotesi della regolarità di una moneta se darà 510 000 volte testa su un milione di lanci?

sì

(Con la consueta "ragionevolezza statistica" del 95% respingeremo l'ipotesi nulla già con meno di 499 000 oppure più di 501 000 teste ovvero croci, cioè con circa una radice quadrata di un milione – che è 1000 – di scarto dalla metà – che è mezzo milione:

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| > \sqrt{n}\right) \approx 4.6\% \quad \forall n \text{ molto grande}$$

che è formula ben nota; e anche un po' meno di 1000 garantirebbe il 95%, seppure non approfondiamo).

ES. 1 _{μ_{2024}} * Risolvere l'equazione

$$e^{x^3} e^{x^2} = 1 + \min x^2$$

indicando qua $\min x^2$, ovviamente, il minimo della funzione x^2 .

SVOLGIMENTO

Ovviamente

$$\min x^2 = 0$$

(i numeri reali al quadrato sono ≥ 0 e il loro minimo è 0 per $x = 0$, e si anche pensi al grafico della parabola $y = x^2$, che ha vertice in $(0, 0)$ ed è rivolta verso l'alto).

L'equazione che allora otteniamo

$$e^{x^3} e^{x^2} = 1$$

per le proprietà delle potenze diventa

$$e^{x^3+x^2} = 1 \quad / \ln$$

$$x^3 + x^2 = 0$$

e "raccolgendo" (cioè applicando la proprietà distributiva)

$$x^2 (x + 1) = 0$$

che per la legge di annullamento del prodotto dà

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$$

ovvero

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -1$$

ES. 2_{μ2024} * Calcolare la media interquartile dei primi 12 termini della successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3...

SVOLGIMENTO

Nella successione di Fibonacci ogni termine è la somma dei 2 precedenti, e allora iniziando da 1 e 1, come qua si fa e di solito si fa, i primi 12 termini sono

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144

che nel soprastante dataset sono già in ordine crescente, e allora eliminando il primo e quarto "quartile" di 3 elementi

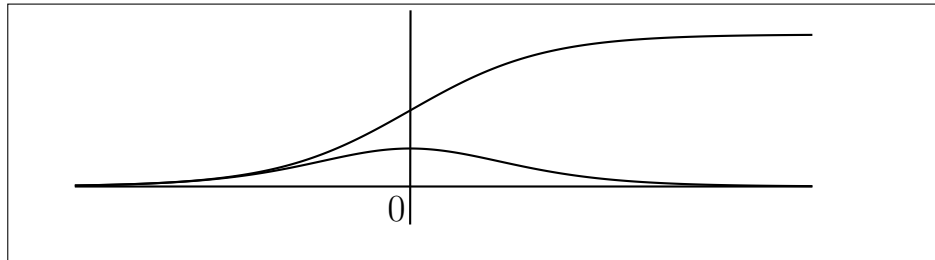
~~1-1-2~~ 3 5 8 13 21 34 ~~55-89-144~~

rimangono 6 elementi la cui media aritmetica è la media interquartile cercata:

$$\text{IQM} = \frac{3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34}{6} =$$

14

ES. 3_{μ2024} ≈ Si scriva la funzione $1/(1 + \text{Exp}[-t])$ con gli usuali simboli matematici. Calcolare la derivata. (La derivata di quella funzione, che è la *logistica standard* di amplissima ricorrenza nelle Scienze Biomediche, è una funzione a campana, precisamente – con termine di raro utilizzo – [ha per grafico] una *campana logistica*).



SVOLGIMENTO

La funzione è scritta con una notazione di tipo informatico (che potrebbe essere quella di WolframAlpha) e riscritta con gli usuali simboli matematici è

$$\frac{1}{1 + e^{-t}}$$

e la derivata è

$$\begin{aligned} D \frac{1}{1 + e^{-t}} &= \\ &= D (1 + e^{-t})^{-1} = \\ &= (-1) \cdot (1 + e^{-t})^{-1-1} D (1 + e^{-t}) = \\ &= - (1 + e^{-t})^{-2} D e^{-t} = \\ &= - \frac{1}{(1 + e^{-t})^2} \cdot e^{-t} \cdot D(-t) = \\ &= \frac{-e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} \cdot (-1) = \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}}$$

che, volendo, con alcuni passaggi algebrici può esprimersi come

$$\boxed{\frac{e^t}{(1+e^t)^2}}$$

(che è forma migliore, ma non immediata da ottenere e non più esatta).

ES. 4 _{μ_{2024}} % Considereremo la sensibilità di un test diagnostico, salvo che, com'è per la gravidanza (che non è una malattia), il concetto di *malati* andrà sostituito da uno di *interessati*, che corrisponde ad avere il concetto di *non interessati* al posto di quello di *sani*. (Si hanno parole diverse per le formule di sensibilità, specificità, predittività, ma per il resto funziona tutto ugualmente). Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	INTERESSATI	NON INTERESSATI
POSITIVI	6	1
NEGATIVI	4	12

Calcolare la sensibilità del test (in base a questa, peraltro piccola, rilevazione). (Questi sono proprio i valori che sono stati rilevati nel 2023 con un'esperienza statistica in aula, in cui la condizione *interessato* era la lunghezza complessiva ≥ 14 di nome e cognome, e la positività al test era definita dalla lunghezza del nome ≥ 7 ; ovviamente le lunghezze sono le lunghezze in lettere).

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Ricordando la definizione della sensibilità

$$S := \frac{\text{veri positivi}}{\text{totale malati}} = \frac{V_+}{V_+ + F_-}$$

ora abbiamo, con la ridefinizione richiesta,

$$S = \frac{\text{veri positivi}}{\text{totale interessati}} = \frac{V_+}{V_+ + F_-} =$$

coi dati del quesito

$$= \frac{6}{6 + 4} =$$

$$= \frac{6}{10} = 0,6 =$$

in percentuale come richiesto

60%

ES. 5 _{μ_{2024}} * **Si motivi la risposta.** Si supponga che per un test statistico relativo alla pandemia del covid-19, con ipotesi nulla H_0 e alternativa H_1 , al livello $\alpha = 0.01$ la regione critica sia definita da $T \in [0, b]$ essendo b un valore positivo e lo stimatore $T := g(X_1, \dots, X_n)$ relativo al test abbia prodotto il valore 2.024, e che sia vera H_1 . Quale di queste è vera?

- Si è sostanzialmente perso tempo.
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il test usato
- Non è possibile rispondere perché non si sa se il campione è gaussiano
- Non si può applicare un test statistico per una pandemia ancora in corso
- Non è possibile rispondere perché 0.01 non è affatto il 5%
- Non è possibile rispondere perché non si sa se il punto è punto decimale
- Non è possibile rispondere perché non è noto b
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il quantile
- Si commette un errore di prima specie
- Si commette un errore di seconda specie
- Era il caso in generale sperato

SVOLGIMENTO

Non si può sapere se T appartiene o no alla regione critica $[0, b]$ perché non è noto b e allora

non è possibile rispondere perché non è noto b