Come spiegato nel regolamento d'esame,
in questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2024}$ (R) $^{\%}$ Qua consideriamo un concetto fondamentale delle Scienze: l'errore percentuale, ovvero errore relativo (rispetto l'esatto) in percentuale. Per la costante e, che è la base del logaritmo naturale, vengono usate varie approssimazioni, in particolare 2.7.
Adesso si scriva l'ottima approssimazione (che moltissimi conoscono a memoria) x che si ottiene contando le lettere delle parole della frase

"Of Eulerus e constant"

e, considerandola come valore esatto – il che sarà sufficiente per trovare il valore comunque approssimato che si richiede in questo esercizio – si determini l'errore percentuale dell'approssimazione 2.7 di e.

$$\boxed{\approx 0.7\%}$$

(Con la

$$\frac{|approx - esatto|}{esatto}$$

valida per grandezze esatte positive – o più in generale la

$$\left|\frac{approx - esatto}{esatto}\right|$$

per grandezze esatte non nulle di qualunque segno – usando $x = 2.718$ come valore esatto e 2.7 come valore approssimato si trova ≈ 0.007 cioè, in percentuale, $\approx 0.7\%$).

ES. 0b$_{\mu 2024}$(R) $*$ La classica formula per $P(A \cap B)$ per eventi indipendenti è...

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

ES. 0c$_{\mu 2024}$ (R) $*$ Qual è il nome "internazionale" ovvero in inglese di p della scrittura classicissima della Statistica Inferenziale $p < 0.05$?

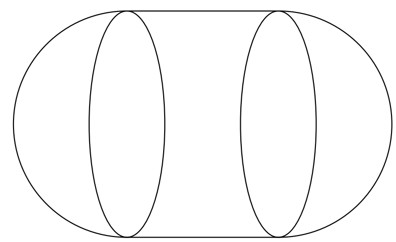
$$\boxed{p\text{-value}}$$

ES. 1$_{\mu 2024}$ $\approx$ Si consideri la figura geometrica costituita da un cilindro (nel senso della geometria elementare) di altezza 16 mm e diametro 10 mm, completata con 2 semisfere in modo da avere la forma di una *capsula*, popolarmente detta *pillola*. Calcolare il volume in millimetri cubi (e cioè, non si farà alcuna conversione di unità di misura: si parte da mm e si arriva a mm^3, viene da sé).

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta)

(È una capsula grande che forse più che essere inghiottita verrà aperta per estrarne il contenuto. Assomiglia – in modo imperfetto ma qua ci semplifichiamo i calcoli, e comunque non possiamo dare alcuna garanzia legale – alla capsula dello standard *size 000*; comunque per lo standard *size Su07* è prevista addirittura una lunghezza complessiva di circa 88.5 mm).



Faremo i calcoli senza unità di misura (e partendo da mm troveremo – inevitabilmente e senza conversioni di unità di misura – i mm^3 per i volumi).

Il volume del cilindro (quello della geometria elementare) è

$$V_{cilindro} = \textit{area di base} \times \textit{altezza}$$

e ricordando la formula dell'area del cerchio, $\pi\, r^2$, con $r = \frac{1}{2}\,\textit{diametro}$, adesso

$$V_{cilindro} = \pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 \cdot 16 \approx 1256 \quad (*)$$

(con precisione incerta perchè abbiamo usato solo 3 cifre significative di π, le classiche di 3.14: se usassimo un valore più preciso troveremmo ≈ 1257).

Resta da sommare il volume delle 2 semisfere di diametro 10 ovvero di 1 sfera con quel diametro:

$$V_{semisfera} + V_{semisfera} = V_{sfera} = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\,\pi \left(\frac{10}{2}\right)^3 \approx 523.33 \quad (**)$$

(di nuovo con incerta precisione e il valore esatto è 523.598...).

Sommando i 2 volumi $(*)$ e $(**)$, e senza esagerare in illusoria precisione, e con la corretta unità di misura,

$$\boxed{\approx 1779 \text{ mm}^3}$$

Note. Il valore esatto per la figura geometrica (teorica) considerata è 1780.23... e l'imprecisione del risultato trovato è causata dall'approssimazione 3.14 di π.

ES. 2$_{\mu 2024}$ $\ast$ Risolvere l'equazione

$$Abs[Log[x\hat{\ }2]] = 1$$

dopo averla scritta con gli usuali simboli matematici, e qua è scritta in un linguaggio informatico in cui Log indica ln. (Questo succede per esempio sul potentissimo software Mathematica$^{(R)}$, e si consideri che in Analisi Matematica si usa indicare con log il logaritmo naturale, diversamente dall'uso in Chimica).

SVOLGIMENTO

Prima di tutto deve essere

$$\underline{x \neq 0 \qquad (\ast)}$$

(Perché x^2 è argomento di un logaritmo).

Poi

$$|\ln x^2| = 1$$

equivale, ricordando che $|A| = B$ equivale a $A = \pm B$, a

$$\ln x^2 = \pm 1 \qquad \Big/ \exp$$

$$x^2 = \mathrm{e}^{\pm 1}$$

equivale, ricordando che $a^2 = b$ equivale a $a = \pm\sqrt{b}$, a

$$x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{\pm 1}} =$$

$$= \pm\left(\mathrm{e}^{\pm 1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \pm \mathrm{e}^{\pm\frac{1}{2}}$$

avendosi le 4 soluzioni (qua scritte in ordine crescente ma non è necessario)

$$\boxed{x_1 = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \quad x_2 = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \quad x_3 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \quad x_4 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$$

ovvero

$$\boxed{x_1 = -\sqrt{\mathrm{e}} \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \quad x_4 = \sqrt{\mathrm{e}}}$$

(e nessuna va esclusa per la $(*)$).
Nota. WolframAlpha, che per Log e anche log e anche ln intende proprio ln, ci conferma il risultato: `LINK ->`

ES. 3$_{\mu 2024}$ $*$ Calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

SVOLGIMENTO

Con la classica formula, per $a \in \mathbb{R}$ e $0 < r < 1$ e addirittura per $-1 < r < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a\, r^k = \frac{a}{1-r} =$$

adesso con $a = 1$ e $r = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$\boxed{2}$$

Nota. Quella dell'esercizio è una delle più classiche serie, sostanzialmente conosciuta dall'antichità, come (il 5 febbraio 2024) leggiamo (alla voce *Paradossi di Zenone*) su Wikipedia, l'enciclopedia libera, ove è espressa come paradosso, ovvero, in qualche modo, facendo finta di non capire come vanno in effetti le cose, per puntare il dito contro i limiti dei ragionamenti di allora, oggi superati dalla *teoria delle serie*:

> Non si può giungere all'estremità di uno stadio senza prima aver raggiunto la metà di esso, ma una volta raggiunta la metà si dovrà raggiungere la metà della metà rimanente e così via, senza quindi mai riuscire a raggiungere l'estremità dello stadio.

Naturalmente una serie più vicina al paradosso di Zenone avrebbe k iniziante da 1 e non da 0,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

e cioè, per le proprietà delle potenze, la

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^k} + \ldots$$

e in quel caso la somma della serie verrebbe 1 e non 2, che corrisponde all'attraversamento di uno stadio in un tempo finito.

ES. 4$_{\mu 2024}$ $\%$ Calcolare $P(-\mathrm{e} \leq X \leq \mathrm{e})$ per una variabile aleatoria X con densità

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } -3 \leq t \leq 3 \\ \\ \frac{1}{8\,(|t|-2)^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta)

.

$$P(-\mathrm{e} \leq X \leq \mathrm{e}) =$$

poichè e = 2.71... la X sta in $[-3, 3]$ dove la sua densità vale $\frac{1}{8}$

$$= \int_{-\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{8}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \left[\frac{t}{8}\right]_{-\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}}{8} - \frac{\text{-e}}{8} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}}{4} \approx$$

con la nota approssimazione di e

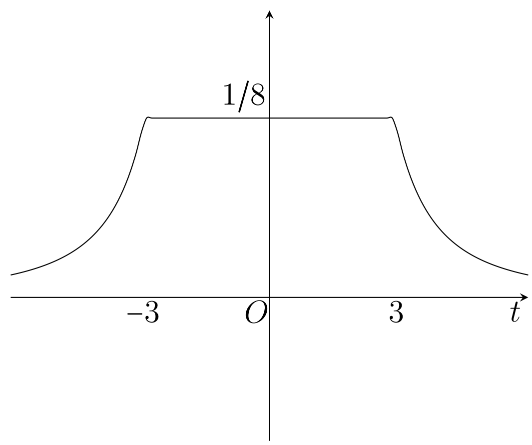
$$\approx \frac{2{,}718}{4} =$$

$$= 0{,}6795$$

e in percentuale come richiesto

$$\boxed{\approx 68\%}$$

Nota. L'area sottesa dal tratto orizzontale del grafico di f è ovviamente 6/8, e si tratta di base × altezza di un rettangolo. L'area del sottografico per $x \leq -3$ per simmetria è uguale a quella del sottografico per $x \geq 3$ e ciascuna vale 1/8 come WolframAlpha (LINK->) ci conferma, e in tutto abbiamo l'area 8/8, ovvero 1 come dovuto. (La non banale espressione di $f(t)$ al di fuori dell'intervallo $[-3, 3]$ è stata fatta bene in modo da avere l'integrale 1 su $\mathbb{R}$ ma non ha rilevanza per risolvere l'esercizio).



ES. 5$_{\mu 2024}$ $\star$ **Si motivi la risposta.** Si supponga che per un test statistico relativo alla pandemia del covid-19, con ipotesi nulla H e alternativa A, al livello $\alpha = 0.01$ la regione critica sia definita da $T \in [0, b]$ essendo b un valore positivo e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore -2.024, e che sia vera H. Quale di queste è vera?

- Si è sostanzialmente perso tempo.
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il test usato
- Non è possibile rispondere perché non si sa se il campione è gaussiano
- Non si può applicare un test statistico per una pandemia ancora in corso
- Non è possibile rispondere perché 0.01 non è affatto il 5%
- Non è possibile rispondere perché non si sa se il punto è punto decimale
- Non è possibile rispondere perchè non è noto b
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il quantile
- Si commette un errore di prima specie
- Si commette un errore di seconda specie
- Era il caso in generale sperato

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. (Questo si vede dal valore 0.01 ed è falsa l'affermazione "Non è possibile rispondere perché non si sa se il punto è punto decimale ").

Lo stimatore ha un valore negativo e allora non appartiene alla regione critica $[0, b]$ con b positivo.

Allora *non respingo ipotesi vera* e allora

$\boxed{\text{si è sostanzialmente perso tempo}}$