

Leggere bene la nota a pagina 2 in basso sul punto decimale

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda

* è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

\approx è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

**Esercizio 0. Triplice – quesiti basici –
chi non risolve almeno 2 non passa l'esame –
per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.**

ES. 0a _{μ_{2023}} (R) * Calcolare la media dei numeri $3.1 \cdot 10^2$ e $1.1 \cdot 10^3$.

$$7.05 \cdot 10^2$$

ovvero anche, diversamente scritto,

$$705$$

(Si tratta dei numeri 310 e 1100 la cui media è 705).

ES. 0b _{μ_{2023}} (R) * Qual è la probabilità che un dado dia più di 4?

$$\frac{1}{3}$$

meno bene qua esprimibile con

$$0,\overline{3} \text{ (standard della virgola decimale)}$$

(Ci sono i 2 casi favorevoli 5 e 6 sui 6 possibili 1,...,6 ottenendosi 2/6).

ES. 0c _{μ_{2023}} (R) * Come si chiama, con parole italiane, il test indicato con χ^2 ?

(test) (del) chi quadrato

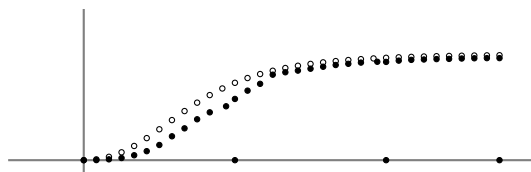
oppure anche

(test) (del) chi quadro

ES. 1 $\mu_{2023} \approx$ Calcolare al tempo $t = 2$ la funzione

$$v(t) = \frac{14}{1 + t^{-2} e^{-t}} \quad 0 < t \leq 2.75$$

che approssima per i 2.75 anni dal 1 dicembre 2020 all'inizio del settembre 2023 il numero totale di dosi di vaccino somministrate, a livello mondiale, in miliardi (<https://ourworldindata.org/covid-vaccinations>, opzione cumulative). (Graficando la funzione sigmoide data si vede che essa approssima bene la realtà dal punto di vista qualitativo, un po' meno bene – per la sua semplicità – dal punto di vista quantitativo).



SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

(Possiamo apprezzare il grafico su WolframAlpha: [LINK->](#)).

$$\begin{aligned} v(2) &= \frac{14}{1 + 2^{-2} e^{-2}} = \\ &= \frac{14}{1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{e^2}} \approx \end{aligned}$$

e con la classica approssimazione di e

$$= \frac{14}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2.718 \cdot 2.718}} \approx$$

≈ 13.54

o meglio, visto anche che ci avvertono che la funzione è approssimativa,

$$\boxed{\approx 13.5}$$

(cioè 13 miliardi e mezzo; il valore vero era 13 miliardi al 1 dicembre 2022).

ES. 2 _{μ_{2023}} * Risolvere l'equazione $\lg x + \lg(x + 1) = 0$.

SVOLGIMENTO

Prima di tutto deve essere, dovendo ogni logaritmo avere argomento positivo,

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x + 1 > 0$$

ovvero

$$x > 0 \quad \text{et} \quad x > -1$$

e in definitiva

$$\underline{x > 0} \quad (*)$$

L'equazione proposta

$$\lg x + \lg(x + 1) = 0$$

è equivalente, per la proprietà della somma dei logaritmi (in una stessa base), a questa:

$$\lg(x \cdot (x + 1)) = 0 \quad / 10^{\wedge}$$

$$x \cdot (x + 1) = 10^0$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ed escludendo la soluzione negativa in base alla (*)

$$\boxed{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

ES. 3 _{μ_{2023}} * Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^3 (t^2 + t) dt$$

per il quale, senza che il risolutore abbia necessità di occuparsene, possiamo dare – fra infinite possibili – questa interpretazione: per un tubo, e si immagini pure per esempio l’ago di una siringa o simile apparato medicale, fluisce un liquido, e la portata al tempo t , dall’inizio del fenomeno al tempo 0, è espressa, in centilitri al secondo, dalla funzione integranda: allora il risultato cercato dà la quantità di liquido fluìto fino al tempo $t = 3$, in centilitri.

SVOLGIMENTO

Cerchiamo la primitiva dell’integranda:

$$\int (t^2 + t) dt =$$

con le regole di primitivazione

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + c$$

e allora

$$\begin{aligned} \int_0^3 (t^2 + t) dt &= \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^3 = \\ &= \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} - 0 - 0 = \\ &= \frac{27}{3} + \frac{9}{2} = \\ &= 9 + \frac{9}{2} = \\ &= \frac{18 + 9}{2} = \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{27}{2}}$$

che possiamo anche esprimere così:

$$\boxed{13.5 \text{ (standard del punto decimale)}}$$

(Su WolframAlpha con formula completa [LINK 1 ->](#) e, parzialmente a parole, [LINK 2 ->](#)).

ES. 4 _{μ_{2023}} % Per una variabile aleatoria X geometrica iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{4}$ calcolare $P(X \geq 3)$.

SVOLGIMENTO

$$P(X \geq 3) =$$

Con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(X < 3) =$$

la X è geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori < 3

$$= 1 - P(X = 1 \vee X = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti è la somma delle probabilità

$$= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{4}$

$$= 1 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1-1} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^0 - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16 - 4 - 3}{16} = \\ &= \frac{9}{16} = 0.5625 \end{aligned}$$

e in conclusione in forma percentuale (esatta)

$$= 56.25\%$$

o con minore precisione

$$\approx 56.3\%$$

ES. 5 _{μ_{2023}} * Si supponga che per un test statistico relativo alla pandemia del covid-19, con ipotesi nulla H_0 e alternativa H_1 , al livello $\alpha = 0.01$ la regione critica sia definita da $T > 42$ e lo stimatore $T := g(X_1, \dots, X_n)$ relativo al test abbia prodotto il valore 40,373, e che sia vera H_1 . Quale di queste è vera?

- Si è sostanzialmente perso tempo.
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il test usato

- Non è possibile rispondere perché non si sa se il campione è gaussiano
- Non si può applicare un test statistico per una pandemia ancora in corso
- Non è possibile rispondere perché 0.01 non è affatto il 5%
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il quantile
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di prima specie
- Si commette un errore di seconda specie

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. Questo si vede dal numero 0.01. (Allora la virgola è separatore delle migliaia).

Lo stimatore T vale 40,373 (più di quarantamila) che appartiene alla regione critica (definita da $T > 42$) e l'ipotesi (nulla) è falsa (perché è vera l'alternativa). Allora "*bene respingo ipotesi falsa*", cioè

Era il caso in generale sperato

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.