<u>Leggere bene la nota a pagina 2 in basso sul punto decimale</u>

Chi si ritira, consegna **<u>solo</u>** questo foglio: col nome e una grande R. **Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia**

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Calcolare

$$\frac{\left(\ln\frac{1}{3}\right)\ln^2 3}{\ln^3 3}$$

$$\boxed{-1}$$

(Per una proprietà dei logaritmi prima, e per le proprietà delle potenze poi,

$$= \frac{(-\ln 3)\ln^2 3}{\ln^3 3} = \frac{-\ln^3 3}{\ln^3 3} =$$

$= -1$).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Formula della sensibilità dei test diagnostici:

$$\boxed{S = \frac{veri\,positivi}{veri\,positivi + falsi\,negativi}}$$

classicamente scrivibile

$$\boxed{S = \frac{V_+}{V_+ + F_-}}$$

o all'inglese (con *true positive* e *false negative*)

$$\boxed{S = \frac{TP}{TP+FN}}$$

ovvero, meno dettagliatamente,

$$\boxed{S = \frac{\textit{veri positivi}}{\textit{totale malati}}}$$

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2023}$ (R) $*$ A quale di queste corrisponde l'errore di seconda specie dei test statistici?

(a) male respingo ipotesi vera
(b) non respingo ipotesi vera
(c) male non respingo ipotesi falsa
(d) bene respingo ipotesi falsa

$$\boxed{\text{(c)}}$$

ES. 1$_{\mu 2023}$ $\approx$ Calcolare la media interquartile del dataset
54,071 117,512 19,097 2,345 282,012 0,112 0,023 0,016 2,150 630,013 2.848 3,410

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. Questo si vede dal numero 0,112 e altri. (Allora il punto in 2.848 è separatore delle migliaia, e questo della virgola decimale e del punto separatore delle migliaia è esattamente lo standard imposto in Farmacia dal Ministero della Salute italiano).

Il dataset ordinato in modo crescente, e scritto senza separatore delle migliaia, è
0,016 0,023 0,112 2,150 2,345 3,410 19,097 54,071 117,512 282,012 630,013 2848
Esso ha $n = 12$ cioè $4 \cdot 3$ elementi

$$\bullet\bullet\bullet \quad \bullet\bullet\bullet \quad \bullet\bullet\bullet \quad \bullet\bullet\bullet$$

ed eliminando il primo e ultimo "quartile" dà
2,150 2,345 3,410 19,097 54,071 117,512
e la media aritmetica dei soprastanti 6 numeri

$$\frac{1}{6}\left(2{,}150 + 2{,}345 + 3{,}410 + 19{,}097 + 54{,}071 + 117{,}512\right) =$$

$$= \frac{198{,}585}{6} \approx$$

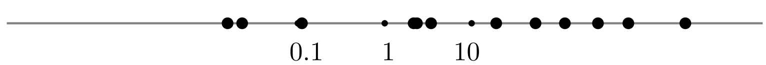
è la media interquartile cercata:

$$\boxed{\approx 33{,}0975}$$

o con minor precisione

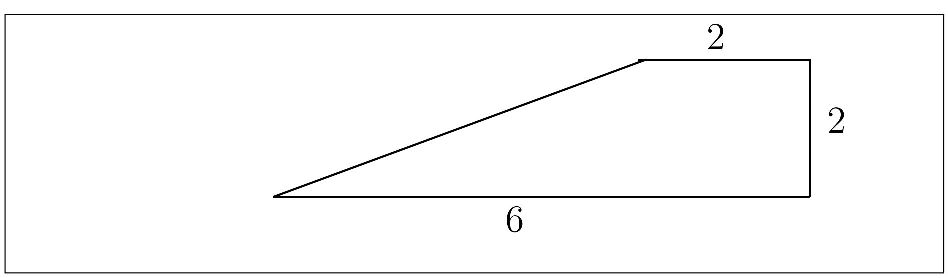
$$\boxed{\approx 33{,}1}$$

Nota 1. Salvo l'ordine il dataset è stato ottenuto da una variabile aleatoria log-normale di parametri $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 25$, che non sono assolutamente media e varianza della variabile aleatoria. Precisamente sono stati tratti gli esponenziali dei valori della variabile aleatoria normale usata nell'esercizio 5: gli esponenziali dei valori di una variabile aleatoria normale sono distribuiti log-normalmente.
Ecco un diagramma cartesiano in scala logaritmica dei 12 valori (ma 2 sono quasi sovrapposti). Si noti l'uguaglianza, salvo i numeri scritti all'asse delle ascisse, col diagramma dell'Esercizio 5, che non è in scala logaritmica.



Il pallino più a destra corrisponde al 2848, il massimo del dataset,

ES. 2$_{\mu 2023}$ $\ast$ Lo spazio per i clienti nella nostra bella farmacia, davanti al banco vendita, ha la forma di un trapezio di altezza e base minore 2 m e base maggiore 6 m. Per un'epidemia una legge prevede almeno 3 m^2 per cliente. Quanti clienti possiamo ammettere?



SVOLGIMENTO

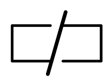
L'area del trapezio si può calcolare con la formula

$$area = \frac{(b + B)\,h}{2}$$

se la si conosce, trovando

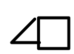
$$area = (\text{senza unità di misura, che metteremo alla fine}) = \tfrac{(2+6)\,2}{2} = 8\ \text{m}^2.$$

Se invece non si ricorda la (classicissima) formula dell'area del trapezio, si accosti il trapezio ad uno di ugual forma, allineato a sinistra, col lato obliquo in comune (tecnicamente sono *centralmente simmetrici*), più meno così,



ottenendo così un rettangolo di base 2+6 e altezza 2, e allora area 16, e il trapezio iniziale ha area metà di questo "doppio trapezio" rettangolare, cioè di nuovo 8 m^2.

Oppure ancora, si scompone il trapezio in un triangolo di base 4 e altezza 2 e un quadrato di lato 2, più meno così,



ottenendo un'area di $\frac{4{\cdot}2}{2} + 2^2$ e di nuovo 8 m^2.

Devono esserci almeno 3 m^2 per ogni cliente e allora possiamo ammetterne 2, che avranno per loro (più di) 6 m^2. Non possiamo ammetterne 3, che richiederebbero 9 m^2, ma noi abbiamo 8 m^2.

$$\boxed{2}$$

Nota. L'idea di dividere 8 per 3

$$\frac{8\ \text{m}^2}{3\ \text{m}^2/\text{person}}$$

è ottima, ma dopo aver trovato 2.6666... person, non possiamo arrotondare a 3, bensì dobbiamo prendere la parte intera 2: ci stanno 2 persone intere. (Infatti 3 clienti richiederebbero $3 \cdot 3$ m^2, che non abbiamo).

ES. 3$_{\mu 2023}$ $\ast$ Trovare il massimo della funzione

$$f(x) := \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

SVOLGIMENTO

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \\ &= D\left(x^{-1} - x^{-2}\right) = \\ &= -1 \cdot x^{-2} + 2 \cdot x^{-3} = \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

e mettendo a denominatore comune abbiamo la disequazione $f'(x) > 0$:

$$\frac{-x+2}{x^3} > 0$$

$$\Big/ \cdot x^3 > 0 \text{ (perché } x > 0)$$

$$-x + 2 > 0$$

$$x < 2$$

Allora per $0 < x < 2$ la funzione ha derivata $f'(x) > 0$ e allora è crescente, e analogamente per $x > 2$ è decrescente, praticamente così molto schematicamente,

$$\wedge$$

(sale, scende) e allora ha max in $x = 2$, e questo massimo vale

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}}$$

ovvero

$$\boxed{0.25 \text{ (con lo standard del punto decimale)}}$$

Nota. Ecco online con WolframAlpha un (disegno del) grafico: LINK ->.

ES. 4$_{\mu 2023}$ $\star$ Per un'affezione della spalla disponiamo di 3 terapie:
pomata diurna: guarigione nel 40% dei casi
cerotto notturno: guarigione nel 30% dei casi
tutore esterno: guarigione nel 20% dei casi.
Che probabilità ha la guarigione supponendo di seguire insieme tutte quelle terapie e che esse agiscano indipendentemente una dall'altra?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Con gli eventi complementari:
P(non guarigione con pomata) = 60%
P(non guarigione con cerotto) = 70%
P(non guarigione con tutore) = 80%
allora
P(non guarigione con tutte le terapie insieme) = $0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 = 0.336$
e allora con l'evento complementare
P(guarigione con tutte le terapie insieme) = 0.664

$$\boxed{66.4\%}$$

ovvero anche, con ragionevole approssimazione,

$$\boxed{\approx 66\%}$$

Nota. È molto meno del 90% che si ottiene erroneamente sommando le probabilità, cosa che potrebbe perfino dare 110% (valore di probabilità che non esiste) se il cerotto avesse il 50% di dare la guarigione invece del 30%.

ES. 5$_{\mu 2023}$ $\approx$ Determinare con la formula

$$\overline{X}_n \pm \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

(in cui α sarà 0.05) l'intervallo di fiducia (ovvero di confidenza) al 95% per la media della variabile aleatoria normale da cui è stato tratto questo campione:

3,990 4,767 5,642 −3,772 −4,158 −2,190 7,954 0,765 6,446 1,227 2,950 0,852

Il calcolo sarà facilitato sapendo che $S^2 \approx 15{,}747$ (calcolato col computer) e che il quantile di Student necessario è $\approx 2{,}201$ (trovato sulle tavole).

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. (Che la virgola non è separatore delle migliaia si vede dai numeri 0,765 e 0,852)

La media aritmetica degli $n = 12$ valori è

$$\overline{X}_{12} = \frac{1}{12}\big(3{,}990 + 4{,}767 + 5{,}642 + (-3{,}772) + (-4{,}158) + (-2{,}190)$$

$$+7{,}954 + 0{,}765 + 6{,}446 + 1{,}227 + 2{,}950 + 0{,}852\big) =$$

$$= \frac{24{,}473}{12} \approx 2{,}039\,417 \approx 2{,}039$$

(e – nel valore più preciso che poi abbandoneremo – abbiamo usato lo spazietto separatore delle terne di cifre, ma stiamo seguendo solo parzialmente il NIST, National Institute of Standards and Technology, statunitense, perchè quello esige il punto decimale, non la virgola).

Applicheremo la formula scritta nel quesito, dell'intervallo di fiducia al 95% bilatero centrato per μ per un campione gaussiano, con σ^2 non nota:

$$\overline{X}_n \pm \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

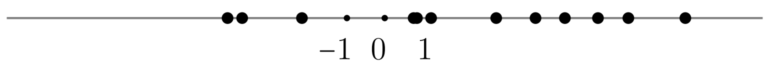
e in questo calcolo siamo molto favoriti perchè nel testo del quesito ci sono dati (approssimatamente) il valore di S^2, alquanto laborioso da calcolare, $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2$, e il quantile $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, in questo caso $t_{0.975}(11)$, non banale da trovare su normali tavole, gravate da varie ambiguità notazionali:

$$2{,}039 \pm \frac{\sqrt{15{,}747}}{\sqrt{12}}\, 2{,}201$$

$$2{,}039 \pm \frac{3{,}968}{3{,}464}\, 2{,}201$$

$$\boxed{\text{CI 95\%: } 2{,}039 \pm 2{,}521}$$

Nota 1. Ecco un diagramma cartesiano dei 12 valori (ma 2 sono quasi sovrapposti).



Nota 2. In effetti il campione era stato tratto, salvo arrotondamenti, online con WolframAlpha con

`12 random sample, normal distribution, mean 1, variance 25`

(ovviamente seguendo il link il software produce ogni volta un nuovo campione) e possiamo dirci soddisfatti perchè il vero valore $\mu = 1$ sta effettivamente nell'intervallo di confidenza trovato. Un motivo di insoddisfazione è che l'intervallo è molto ampio, ma questo è dovuto anche alla piccolezza del campione.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.