Leggere bene la nota a pagina 2 in basso sul punto decimale

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Calcolare $6\ \lg \frac{1}{\sqrt{1000}}$

$$\boxed{-9}$$

($6\ \lg \frac{1}{\sqrt{1000}} = 6\ \lg \frac{1}{(10^3)^{1/2}} = 6\ \lg \frac{1}{10^{3/2}} = 6\ \lg 10^{-3/2} = 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -9$.
Su WolframAlpha `6Log[10,1/Sqrt[1000]]`).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2023}$ (R) % Qual è la probabilità che un dado regolare a 20 facce dia un risultato che è un numero quadrato ovvero quadrato perfetto?

$$\boxed{20\%}$$

(I numeri quadrati ovvero quadrati perfetti minori o uguali a 20 sono 1, 4, 9, 16, avendosi 4 casi favorevoli su 20 possibili: $4/20 = 0.2 = 20\%$).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Manca 1 parola: "1.96 è il più importante ... della Statistica Inferenziale. (È un valore approssimato, questione ora irrilevante)."

$$\boxed{\text{quantile}}$$

ESERCIZIO 1$_{\mu 2023}$ $*$ Dopo aver trovato l'equazione $y = mx + q$ della retta che passa per i punti con queste coordinate

x	y
1	2.12E+7
3	8.38E+7

calcolare il valore della funzione per $x = 3.75$, il che, senza che necessariamente il risolutore debba occuparsene, ha una facile interpretazione epidemiologica: essendo x il tempo in anni dall'inizio di un'epidemia, il valore y è il numero cumulativo di contagiati, e dai valori a 1 anno e 3 anni formuliamo una previsione al tempo 3 anni e 9 mesi (3.75 anni), ipotizzando una crescita lineare (ipotesi molto semplicistica).

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. E una forma di notazione scientifica, quella con la E che significa 10^.

Riscriviamo senza E i 2 numeri:

2.12×10^7

8.38×10^7

e con scrittura decimale, essendo $10^7 = 10\,000\,000$,

$21\,200\,000$

$83\,800\,000$

scrittura che tutto sommato – compreso lo spazietto separatore delle terne di cifre – per molte persone è la più adatta a fare il calcolo della retta richiesto, per quanto anche le precedenti vadano bene:

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

e sostituiamo i valori dati:

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y - 83\,800\,000}{21\,200\,000 - 83\,800\,000}$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y - 83\,800\,000}{-62\,600\,000} \quad \Big/ \cdot (-62\,600\,000)$$

$$31\,300\,000\,(x-3) = y - 83\,800\,000 \quad \Big/ + 83\,800\,000$$

$$y = 83\,800\,000 + 31\,300\,000\,x - 3 \cdot 31\,300\,000$$

$$y = 31\,300\,000\,x + 83\,800\,000 - 93\,900\,000$$

$$y = 31\,300\,000\,x - 10\,100\,000$$

sostituiamo il valore $x = 3.75$

$$y = 31\,300\,000 \cdot 3.75 - 10\,100\,000 =$$

$$\boxed{107\,275\,000}$$

ovvero, con la notazione scientifica usata nel testo del quesito,

$$\boxed{1.07\,275\text{E}{+}8}$$

che con ragionevole approssimazione, specialmente se si tratta della previsione epidemiologica, sarebbe

$$1.07\text{E} + 8$$

(ma questa non è la soluzione esatta richiesta).
Nota. Wolframalpha ci conferma l'equazione della retta dando
$y = 100\,000\,(313\,x - 101)$
chiedendo
`Solve[(x-3)/(1-3)=(y-8.38E+7)/(2.12E7-8.38E+7),y]`
e perfino
$y = 3.13 \times 10^7\,x - 1.01 \times 10^7$
chiedendo
`equation of the line passing through (1,2.12E+7) and (3,8.38E+7)`
e poi il risultato finale: `LINK ->`

ESERCIZIO 2$_{\mu 2023}$ $\star$ Fermo restando che un *riassunto dei 5 numeri* o un *box-plot* fatto con un dataset di pochi numeri ha scarso valore scientifico, ma piuttosto di esercizio (con molti elementi richiederebbe molto tempo) si trovi il *riassunto dei 5 numeri* (i 5 numeri che determinano il *box-plot*) relativo al dataset che si ottiene eliminando un outlier da questi valori:

$$z_n := \frac{1}{\pi - n} \qquad 1 \le n \le 12$$

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Con la classica approssimazione $\pi \approx 3.14$ si calcolano i 12 valori, che qua scegliamo – ad arbitrio e in modo opinabile in effetti – di trascrivere con 3 decimali:
$z_1 := 1/(\pi - 1) \approx 0.467$
$z_2 := 1/(\pi - 2) \approx 0.877$
$z_3 := 1/(\pi - 3) \approx 7.143$ che, visti tutti i valori, risulta l'outlier annunciato
$z_4 := /(\pi - 4) \approx -1.163$
$z_5 := 1/(\pi - 5) \approx -0.538$
$z_6 := 1/(\pi - 6) \approx -0.350$
$z_7 := 1/(\pi - 7) \approx -0.259$
$z_8 := 1/(\pi - 8) \approx -0.206$
$z_9 := 1/(\pi - 9) \approx -0.171$

$z_{10} = 1/(\pi - 10) \approx -0.146$
$z_{11} = 1/(\pi - 11) \approx -0.127$
$z_{12} = 1/(\pi - 11) \approx -0.113$
ed eliminando l'outlier abbiamo il dataset di 11 elementi $x_1 ... x_{11}$
0.467 0.876 −1.165 −0.538 −0.350 −0.259 −0.206 −0.171 −0.146 −0.127 −0.113
che riordiniamo in modo crescente ottenendo questi $y_1 ... y_{11}$
−1.165 −0.538 −0.350 −0.259 −0.206 −0.171 −0.146 −0.127 −0.113 0.467 0.876.

Ricordiamo ora l'ovvio – se si capisce il *riassunto dei 5 numeri* – fatto che
per un dataset $x_1, ..., x_{11}$, riordinato in $y_1, ..., y_{11}$
i 5 numeri (quartili) sono nell'ordine y_1, y_3, y_6, y_9, y_{11}.
Allora adesso ci ritroviamo a dover prendere i 5 valori

$$\boxed{-1.165 \ -0.350 \ -0.171 \ -0.113 \ 0.876}$$

Nota (sulla precisione). L'errore relativo (in valore assoluto) di un numero si conserva abbastanza bene moltiplicando e dividendo con valori esatti, e sommando valori esatti dello stesso segno. Per esempio $\frac{1}{2023\pi}$ ha ancora un errore relativo (circa) dello 0.5 per mille quando calcolato, invece che col valore esatto di π, con la sua classica approssimazione 3.14, che ha un errore relativo solo (circa) dello 0.5 per mille, alquanto buona.
Ma la precisione (nel senso dell'errore relativo) si degrada alquanto sottraendo da un valore approssimato un valore esatto, simile e dello stesso segno.
Questo succede nel calcolo di z_3 in cui c'è $\pi - 3$. Il valore 7.1428... che abbiamo trovato con la calcolatrice o computer usando 3.14 invece di π, e che poi abbiamo ulteriormente arrotondato a 7.143, ha un errore relativo un po' maggiore dell'1%, che in ogni caso non è grave, e poi scompare del tutto dal risultato dell'esercizio con l'eliminazione dell'outlier.

ESERCIZIO 3$_{\mu 2023}$ $*$ Calcolare $1 + e^{-1} + e^{-2} + +e^{-3} + ... + e^{-n} + ...$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta. E si potrebbe non usare alcuno dei 2 standard, se si evitasse la citazione del valore 2,718, non veramente necessaria).

Per una proprietà delle potenze $e^{-n} = (e^{-1})^n$ e allora abbiamo la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-1})^n$$

ovvero

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot (\mathrm{e}^{-1})^n$$

con costante moltiplicativa $a = 1$ e di ragione $r = \mathrm{e}^{-1}$ ovvero $\frac{1}{\mathrm{e}}$ che è fra 0 e 1 (perchè e ≈ 2,718) il che garantisce la convergenza della serie a

$$\frac{a}{1-r} =$$

$$\boxed{\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}}$$

che è la soluzione esatta richiesta, che molto meglio esprimiamo, moltiplicando numeratore e denominatore per e, in questo modo:

$$\boxed{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$$

ESERCIZIO 4$_{\mu 2023}$ % Ogni volta che una fissata persona si reca in una certa fissata regione, si espone ad un certo rischio sanitario, diciamo di venire contagiata da un certo patogeno, con probabilitá 20%. Che probablitá c'è che in 3 viaggi in quella regione – supponendo indipendenti gli eventi – una persona venga contagiata?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Dato:

$$P(contagio\,nel\;1^\wedge\;viaggio) = ... = P(contagio\,nel\;3^\wedge\;viaggio) = 0.2$$

Evento complementare:

$$P(non\,contagio\,nel\;1^\wedge\;viaggio) = ... = P(non\,contagio\,nel\;3^\wedge\;viaggio) = 0.8$$

Evento composto:

$$P(nessun\,contagio) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.512$$

Evento complementare:

$$P(contagiato\,almeno\,una\,volta) = 0.488$$

Con ragionevole approssimazione e in forma percentuale

$$\boxed{\approx 49\%}$$

ESERCIZIO 5$_{\mu 2023}$ ≈ Da questo campione di una v.a. X di legge esponenziale

0.277 14.586 1.598 2.550 6.154 5.663 0.598 1.515 2.191 10.754 0.000 0.000

dopo aver eliminato 2 outlier nulli – per qualche motivo si sa che sono outlier – si stimi il suo parametro λ. Senza che il risolutore debba necessariamente occuparsene, potrebbero essere intertempi negli accessi a una farmacia, per esempio misurati in minuti.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. (Si vede dai 3 numeri 0....).

I 2 outlier nulli annunciati sono i valori 0.000. (Se non ci fosse stato detto che ci sono 2 outlier nulli, non sarebbe del tutto sicuro che sono outlier; certo sarebbero valori improbabilissimi ma comunque possibili, magari arrotondamenti con 3 decimali di 0.0004... e 0.0003...).
WolframAlpha, che usa una sua definizione di outlier, non considera affatto outlier i 2 valori nulli, bensì 14.586 (valore troppo elevato rispetto agli altri) e non altri. LINK->

Il campione privato deli outlier ha $n = 10$ elementi, e col classico stimatore del parametro λ di una densità esponenziale, il reciproco della media del campione,

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n} =$$

$$= \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n} =$$

$$= \frac{10}{0.277 + 14.586 + 1.598 + 2.550 + 6.154 + 5.663 + 0.598 + 1.515 + 2.191 + 10.754} \approx$$

$$\boxed{\approx 0.218}$$

Nota. Salvo arrotondamenti fatti per semplificare i calcoli al risolutore, il campione è stato ottenuto online su WolframAlpha con $\lambda = 0.2$ con l'istruzione

https://www.wolframalpha.com/input?i=10+random+numbers+exponential+distribution+lambda3D0.2

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.