

Leggere bene la nota a pagina 2 in basso sul punto decimale

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.  
**Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia**

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

### Legenda

\* è richiesto il valore esatto. Può anche essere  $+\infty$ ,  $-\infty$ , o una frase.

$\approx$  è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

**ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici –  
chi non risolve almeno 2 non passa l’esame –  
per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.**

**ESERCIZIO 0a** <sub>$\mu_{2023}$</sub>  (R) \* Calcolare il valore numerico di  
 $\lg \sqrt{1000} - \lg 3 + \lg 6 - \lg 2$

1.5

$$\left(\frac{1}{2} \lg 1000 - \lg 3 + \lg(2 \cdot 3) - \lg 2 = \frac{1}{2} \cdot 3 - \lg 3 + (\lg 2 + \lg 3) - \lg 2 = \frac{3}{2}\right)$$

**ESERCIZIO 0b** <sub>$\mu_{2023}$</sub>  (R) % Supponiamo che la probabilità di una malattia nelle femmine sia il quadrato della probabilità di quella malattia nei maschi, e che questa sia 8%: qual è la probabilità della malattia nelle femmine?

0.64%

(Ovviamente 8% è 0.08 e  $0.08^2 = 0.0064$  che è 0.64%.)

Questa più o meno è, semplificando, la situazione del daltonismo, con la percentuale riferita al Nord Europa. Per Genetica – gene recessivo trasportato sul cromosoma X – la probabilità del daltonismo nelle femmine – in una popolazione “stabile” isolata – è il quadrato della probabilità del daltonismo nei maschi

OPPURE,

un modo pessimo di risolvere, è elevare direttamente al quadrato il numero 8, ma allora bisogna elevare al quadrato anche il %, in un modo che non si è mai visto scritto,  $(8\%)^2 = 8^2 \%^2$  e ricordando che % significa esattamente

$$\frac{1}{100}$$

si conclude come sopra, trovando 64 decimillesimi, 0.0064, ovvero 0.64%).

**ESERCIZIO 0c** <sub>$\mu_{2023}$</sub>  (R) \* Un test statistico con  $p = 0.00004$  ha una significatività statistica da considerare alta o bassa?

alta
------

(Il valore  $p$  normalmente considerato statisticamente significativo è 0.05, e quello dato è molto minore: si può senz'altro parlare di significatività statistica molto alta).

**Riportare i “PASSAGGI”/CALCOLI degli esercizi da qua in poi**

**ES. 1** <sub>$\mu_{2023}$</sub>  \* Un cerotto e una pillola costano insieme € 1,10 e la pillola costa 1 euro in più del cerotto. Quanto costa il cerotto?

### SVOLGIMENTO

Viene usato – già nel quesito – lo standard della virgola decimale. (Che è fissato per legge in Italia per gli euro).

Ci sono vari modi di risolvere, e qua risolviamo in questo modo, con ovvio significato dei simboli:

$$cerotto + pillola = 1,10$$

$$pillola = cerotto + 1$$

e sostituendo la seconda equazione nella prima, si ha successivamente:

$$cerotto + (cerotto + 1) = 1,10$$

$$cerotto + cerotto + 1 = 1,10$$

$$2 \cdot cerotto + 1 = 1,10 \quad / - 1$$

$$2 \cdot \text{cerotto} = 0,10 \quad / : 2$$

$$\text{cerotto} = 0,05$$

cioè

5 centesimi
-------------

ovvero

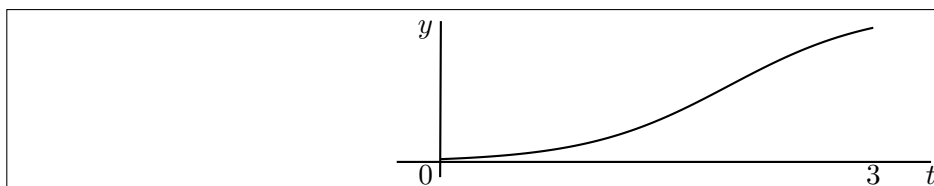
€ 0,05
--------

**Nota.** Formulato con una palla e una mazza invece che con un cerotto e una pillola, questo è un problema classico, che si trova in *Pensieri lenti e veloci*, di Daniel Kahneman, vincitore del premio Nobel per l'Economia nel 2002 per il suo lavoro sui pregiudizi cognitivi. (A intuito molti rispondono erroneamente 10 centesimi).

**ESERCIZIO 2** <sub>$\mu_{2023}$</sub>   $\approx$  Nei primi 3 anni ponendo lo 0 al 1/3/2020, per la pandemia di covid il numero cumulativo di morti per migliaio di abitanti del pianeta in funzione del tempo (in anni) sia grossolanamente modellizzato da

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{4-2t}} \quad 0 \leq t \leq 3$$

A due anni e mezzo dall'inizio, quanti morti per mille dà questo modello?



### SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Ovviamente due e mezzo numericamente è 2,5 e allora calcoliamo

$$y(2,5) = \frac{1}{1 + e^{4-2 \cdot 2,5}} =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{4-5}} =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-1}} =$$

per una proprietà delle potenze

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} \approx$$

con la classica approssimazione con 3 cifre decimali del numero  $e$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2,718}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{1 + 0,367918} \approx$$

$$\approx \frac{1}{1,367918} \approx$$

$$\boxed{\approx 0,731}$$

o anche, senza supporre un'improbabile precisione del modello,

$$\boxed{\approx 0,73}$$

**Nota.** A due anni e mezzo dall'inizio eravamo, giorno più o giorno meno, al 1 ottobre 2022, per il quale il valore di Our World in Data – molto affidabile per i dati ufficiali della pandemia, per quanto essi alquanto incerti all'origine – è circa 821 per milione e cioè circa 0,82 per mille: la discrepanza – comunque non catastrofica – fra 0,73 e 0,82 è dovuta all'approssimazione insita nel modello, molto semplice, eppure in grado di dare una ragionevole visione quantitativa del fenomeno complessivo, con il suo sviluppo vagamente logistico e grafico sigmoide).

**ES. 3** <sub>$\mu_{2023}$</sub>  \* Calcolare  $D(x \cdot |x| + \sqrt{x})$

### SVOLGIMENTO

La funzione è definita per

$$x \geq 0$$

perchè  $x$  è argomento di una radice quadrata.

Ricordando che per  $x \geq 0$  il valore assoluto  $|x|$  di  $x$  vale  $x$  abbiamo

$$D(x \cdot |x| + \sqrt{x}) =$$

$$= D(x \cdot x + \sqrt{x}) =$$

$$= D(x^2 + \sqrt{x}) =$$

ricordando la derivata di  $x^2$  e quella di  $\sqrt{x}$ , e la derivazione della somma di funzioni,

$$\boxed{2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

**ES. 4**  $\mu_{2023}$  %Determinare la predittività, nel senso di valore predittivo positivo, di un test diagnostico per il quale si rilevano questi dati:

	SANI	MALATI
POSITIVI	190	990
NEGATIVI	18 810	10

(Possiamo osservare, ma non è necessario per risolvere l'esercizio, che sensibilità e specificità sono del 99%).

### SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Ricordando la definizione

$$\text{predittività} = \text{Valore Predittivo Positivo} = VVP =$$

$$= \frac{\text{veri positivi}}{\text{totale positivi}} = \frac{V_+}{V_+ + F_+}$$

ora abbiamo

$$VVP = \frac{990}{990 + 190} = \frac{990}{1180} \approx 0.838983$$

$$\boxed{\approx 84\%}$$

**Nota.** Ogni 100 testati positivi, 84 sono veri positivi e 16 sono falsi positivi. I falsi positivi sono parecchi, nonostante l'alta sensibilità e l'alta specificità, ma questo è normale con una malattia così poco comune, solo 1000 (cioè 990 + 10) malati su 20 000 persone (990 + 10 + 190 + 18 810), il 5%.

Verifichiamo che effettivamente la sensibilità è

$$S = \frac{V_+}{V_+ + F_-} = \frac{990}{990 + 10} = 0.99$$

e la specificità è

$$S = \frac{V_-}{V_- + F_+} = \frac{18810}{18810 + 190} = 0.99.$$

**ES. 5** <sub>$\mu_{2023}$</sub>  \* Supponiamo che per un test statistico relativo alla pandemia del covid-19, con ipotesi (nulla)  $H_0$  e alternativa  $A$ , al livello  $\alpha = 0,005$  la regione critica sia definita da  $T > 20$  e lo stimatore  $T := g(X_1, \dots, X_n)$  relativo al test abbia prodotto il valore 18.873, e che sia vera  $A$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Non è possibile rispondere perché non è specificato il test usato
- Non è possibile rispondere perché non si sa se il campione è gaussiano
- Non è possibile rispondere perché 0,005 non è affatto il 5%
- Non è possibile rispondere perché non è specificato il quantile
- Non si può applicare un test statistico per una malattia nuova
- Non si può applicare un test statistico per una pandemia ancora in corso
- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie

### SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. Questo si vede dal numero 0,005. (Allora il punto è separatore delle migliaia).

Lo stimatore  $T$  vale 18.873 (più di diciottomila) che appartiene alla regione critica (definita da  $T > 20$ ) e l'ipotesi (nulla) è falsa (perché è vera l'alternativa). Allora "*bene respingo ipotesi falsa*", cioè

Era il caso in generale sperato

**In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.**

**In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.**

**Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.**