Leggere bene la nota a pagina 2 in basso sul punto decimale

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Calcolare $\frac{e^5 \cdot e^2}{e^7}$.

$$\boxed{1}$$

(Il numeratore è e^{5+2}, e allora è uguale al denominatore).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Che probabilità c'è che un dado regolare a 12 facce numerate da 1 a 12 (può avere la forma di un dodecaedro regolare ed è comunemente usato nei giochi) dia un risultato pari?

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

(Ci sono 6 casi favorevoli 2, 4, 6, 8, 10, 12, sui 12 equiprobabili 1, 2,...,12, da cui la probabilità $\frac{6}{12}$).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2023}$ (R) Come si dice uno stimatore la cui speranza matematica coincide con la quantità che si vuole stimare?

$$\boxed{\text{non distorto}}$$

oppure anche, all'inglese,

$$\boxed{\text{unbiased}}$$

Riportare i "PASSAGGI"/CALCOLI degli esercizi da qua in poi

ES. 1$_{\mu 2023}$ $\ast$ Il numero di ricoveri in terapia intensiva in una regione sia modellizzato, essendo t il tempo in giorni dall'inizio di un'epidemia, da

$$f(t) := 40\,t - t^2 \qquad 1 \le t \le 39$$

(È un modello molto semplicistico). Per quanto tempo il numero di ricoveri in terapia intensiva è maggiore o uguale a 300, ciò che potrebbe creare grave problema al sistema sanitario? Si esprima la soluzione a parole, come "5 settimane", "circa 2 settimane", "circa 3 mesi", o simili. (Figura a).

SVOLGIMENTO

Risolviamo la disequazione $f(t) \ge 300$

$$40\,t - t^2 \ge 300$$

che è la disequazione di secondo grado

$$-t^2 + 40\,t - 300 \ge 0$$

che si può risolvere in vari modi ma in generale si deve risolvere l'equazione associata

$$g(t) := -t^2 + 40\,t - 300 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 20^2 - (-1) \cdot (-300) = 400 - 300 = 100 > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{100}}{-1} = \frac{-20 \pm 10}{-1}$$

$$t_1 = 10 \qquad t_2 = 30$$

La $g(t)$ è un polinomio di secondo grado che – inteso come funzione – ha grafico una parabola rivolta verso il basso e allora $g(t)$ supera (in senso debole, $\ge$), il valore 0, se mai lo supera, nell'intervallo limitato con estremi le soluzioni dell'equazione di secondo grado, e allora la soluzione della disequazione è

$$10 \le t \le 30$$

cioè il numero di ricoverati in terapia intensiva supera il valore 300 dal giorno 10 al giorno 30 dell'epidemia, e si tratta di 21 giorni.

$$\boxed{\text{3 settimane}}$$

ES. 2$_{\mu 2023}$ ≈ Calcolare la radice quarta della media aritmetica di questi numeri:
7,107 2,256 7,456 7,669 7,231 8,974 7,249 0.941 7,217 4,435 6.349 8,442

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. Questo si capisce dal numero 0.941, dove il punto può solo essere punto decimale. Allora le virgole sono separatori delle migliaia.

La media aritmetica degli $n = 12$ numeri, qua trascritti senza separatore delle migliaia, è

$$\overline{X}_{12} = \frac{1}{12}\left(7107 + 2256 + 7456 + 7669 + 7231 + 8974 + 7249 + 0.941 + 7217 + \right.$$

$$\left. + 4435 + 6.349 + 8442\right) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 68043.29 \approx$$

$$\approx 5670.27$$

La radice quarta è la radice quadrata della radice quadrata, $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$:

$$\sqrt[4]{\overline{X}_{12}} \approx \sqrt[4]{5670.27} = \sqrt{\sqrt{5670.27}} \approx \sqrt{75.3012} \approx$$

$$\boxed{8.67763}$$

o con minore precisione

$$\boxed{8.6776}$$

o con minore precisione

$$\boxed{8.678}$$

ES. 3$_{\mu 2023}$ $\star$ Al variare del tempo t (ma prescindendo in tutto l'esercizio dalle unità di misura) la portata di un liquido che fluisce in un tubo è

$$f(t) := \frac{t}{36 + t^2}$$

Calcolare la quantità di liquido fluita da $t = 0$ a $t = 8$, data dall'integrale

$$\int_0^8 \frac{t}{36+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(Figura b). È utile osservare che la derivata di $\frac{1}{2}\ln(36+t^2)$ è proprio la funzione integranda, come si potrebbe verificare immediatamente.

SVOLGIMENTO

$$\int_0^8 \frac{t}{36+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

osservando che, come ci viene detto nel testo del quesito, $\frac{1}{2}\ln(36+t^2)$ è una primitiva dell'integranda (ovvero, ed è lo stesso, ha derivata l'integranda)

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(36+t^2)\right]_0^8 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(36+8^2) - \frac{1}{2}\ln(36+0^2) =$$

$$\boxed{= \tfrac{1}{2}\ln 100 - \tfrac{1}{2}\ln 36}$$

che è già la soluzione esatta richiesta, seppure malamente espressa; per una proprietà dei logaritmi ("logaritmo della radice quadrata")

$$= \ln\sqrt{100} - \ln\sqrt{36} =$$

$$\boxed{= \ln 10 - \ln 6 =}$$

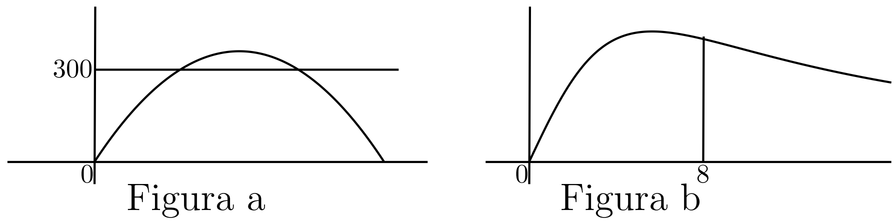
che è la soluzione esatta richiesta, seppure non bene espressa, e si può esprimere, per una proprietà dei logaritmi, in questo modo:

$$= \ln\frac{10}{6} =$$

$$\boxed{\ln\tfrac{5}{3}}$$

(Che vale ≈ 0.5108 come troviamo con WolframAlpha).

Nota. Le unità di misura potrebbero essere, per esempio, per il tempo i secondi, s, e per la portata i decilitri al secondo, dl/s, e allora la quantità di liquido fluito, valore dell'integrale, sarà in decilitri, dl.



ES. 4$_{\mu 2023}$ $*$ Calcolare la speranza matematica di questa variabile aleatoria

$$T := \begin{pmatrix} 1... & 2\ ... & 3\ ... & 4\ ... & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}05 \end{pmatrix}$$

che ha l'ovvia interpretazione della sopravvivenza media $\mathrm{E}(T)$ con
P(sopravvive 1 anno) = 20%
P(sopravvive 2 anni) = 40%
P(sopravvive 3 anni) = 25%
P(sopravvive 4 anni) = 10%
P(sopravvive 5 anni) = 5%.
(I puntini non hanno nessun significato, servono per la spaziatura tipografica).

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard della virgola decimale.

Con la classica formula

$$\mu = \mathrm{E}(X) := \sum_k x_k \cdot p_k \qquad \textit{somma su tutti i valori } x_k \textit{ della v.a.}$$

adesso, espressa per la v.a. T coi valori t_k,

$$\mathrm{E}(T) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}05 =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}75 + 0.4 + 0{,}25 =$$

$$\boxed{2{,}4}$$

ES. 5$_{\mu 2023}$ $\approx$ Calcolare lo stimatore della varianza di un campione aleatorio i cui valori sono (per caso) i primi 4 valori della successione di Fibonacci.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

I primi 4 valori della successione di Fibonacci sono

1, 1, 2, 3.

Detta X la variabile aleatoria da cui è tratto il campione, la media aritmetica è

$$\overline{X}_4 = \frac{1}{4}\,(1+1+2+3) = \frac{7}{4}$$

e con la classica formula dello stimatore della varianza

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2 =$$

adesso si ha

$$= \frac{1}{4-1}\left(\left(1-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(1-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(2-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(3-\frac{7}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{4-7}{4}\right)^2 + \left(\frac{4-7}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-7}{4}\right)^2 + \left(\frac{12-7}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{16}+\frac{9}{16}+\frac{1}{16}+\frac{25}{16}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{44}{16} =$$

$$= \frac{11}{12} \approx$$

$$\boxed{\approx 0.917}$$

o con maggiore precisione

$$\boxed{\approx 0.9167}$$

o con maggiore precisione (e qua usiamo lo spaziatore delle terne di cifre)

$$\boxed{\approx 0.916\,67}$$

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.