Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2023}$ (R) $\approx$ Ridurre del 20% il numero π esprimendo il risultato con 1 cifra decimale dopo la virgola (in tutto sono 2 cifre significative).

$$\boxed{\approx 2.5}$$

($\pi - \pi \cdot 20\% \approx 3.14 - 3.14 \cdot 0.20 \approx 2.5$).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Dire la probabilità che un dado dia più di 2.

$$\boxed{\frac{2}{3}}$$

(Quoziente del numero 4 dei casi favorevoli 3, 4, 5, 6, e del numero 6 dei casi possibili 1, 2, 3, 4, 5, 6).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2023}$ (R) $\ast$ Completare la parola mancante (nel modo più standard ovvero usuale, senza stranezze): "In Statistica Inferenziale si considera particolarmente grave l'errore di ... specie"

$$\boxed{\text{prima}}$$

ESERCIZIO 1$_{\mu 2023}$ $\ast$ Esprime in notazione scientifica il numero

$$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}\right)^3$$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Con le proprietà delle radici e delle potenze si ha

$$\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}\right)^3 =$$

$$= \left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{8\cdot 2}\right)^3 =$$

$$= \left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3 =$$

$$= \left(\sqrt[3]{2}+2\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3 =$$

$$= \left(3\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3 =$$

$$= 3^3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 =$$

$$= 27\cdot 2 =$$

$$= 54$$

ed esprimendolo in notazione scientifica

$$\boxed{5.4\cdot 10^1}$$

ovvero equivalentemente

$$\boxed{5.4 \times 10^{1}}$$

$$\boxed{\text{5.4E1}}$$

$$\boxed{\text{5.4E+1}}$$

$$\boxed{5.4 \cdot 10^{+1}}$$

$$\boxed{5.4 \times 10^{+1}}$$

(e deprecabilmente 5.4e1 e 5.4e+1, che pure si potrebbero trovare).

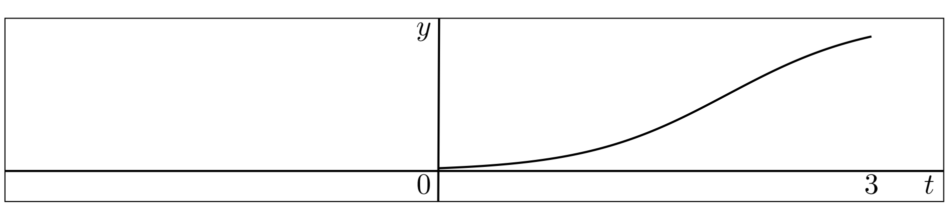
OPPURE

si può risolvere con la formula del cubo del binomio, $(a+b)^3 = ...$, che non era in programma d'esame.

ESERCIZIO 2$_{\mu 2023}$ $\star$ Risolvere quest'equazione in t (per ogni y per il quale è possibile farlo, cioè $0 < y < 1$, cosa di cui il risolutore non si occupi)

$$y = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{4-2\,t}}$$

di cui, senza che il risolutore debba occuparsene, diamo anche un'interpretazione. In un'epidemia il numero cumulativo di morti per migliaio di abitanti in funzione del tempo (in anni) sia espresso per $t \geq 0$ dalla soprastante equazione, che per $t \in [0,3]$ è una grossolana modellizzazione della mortalità della pandemia covid, a livello mondiale, nei primi 3 anni ponendo lo 0 al 1/3/2020. La soluzione dell'equazione (equazione in t con parametro y) dà il tempo t (ovvero $t(y)$) al quale si raggiunse una determinata mortalità y in *per mille* (con non grande precisione a causa della grossolanità dell'approssimazione considerata).



SVOLGIMENTO

$$y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{4-2t}} \qquad \Big/ \text{reciproco}$$

$$1+\mathrm{e}^{4-2t} = \frac{1}{y} \qquad \Big/ -1$$

$$\mathrm{e}^{4-2t} = \frac{1}{y} - 1 \qquad \Big/ \ln$$

$$4-2t = \ln\left(\frac{1}{y}-1\right) \qquad \Big/ -4$$

$$-2t = \ln\left(\frac{1}{y}-1\right) - 4 \qquad \Big/ :(-2)$$

$$t = \tfrac{1}{2}\left(4 - \ln\left(\tfrac{1}{y}-1\right)\right)$$

o meglio

$$\boxed{t = 2 - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{y}-1\right)}$$

ovvero un po' meno bene espresso

$$t = -\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(\tfrac{1}{y}-1\right) - 4\right)$$

ESERCIZIO 3$_{\mu 2023}$ $\approx$ Trovare $\min\left(\mathrm{e} + \frac{x}{8} - \sqrt{x}\right)$ per $x > 0$.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Dev'essere $x \geq 0$ perchè argomento di radice quadrata, e in più ci limitiamo a considerare i soli $x > 0$, il che semplificherà i calcoli.
È

$$D\,\text{cost} = 0 \qquad D\left(\frac{1}{8}x\right) = \frac{1}{8}\cdot 1 \qquad D\left(-\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(e è una costante) e la derivata della somma è la somma delle derivate, e allora

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x > 0$$

avendo chiamato $f(x)$ la funzione di cui si chiede il minimo, e la disequazione $f'(x) > 0$ è

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \qquad \Big/ \cdot 8\sqrt{x} > 0$$

$$\sqrt{x} - 4 > 0 \qquad \Big/ + 4$$

$$\sqrt{x} \ > \ 4 \ > \ 0 \qquad \Big/^{2}$$

(l'elevazione al quadrato conserva l'ordinamento fra numeri positivi)

$$x \ > \ 16$$

cioè la derivata $f'(x)$ di $f(x)$

è positiva per $x > 16$ e allora là $f(x)$ è crescente

è negativa per $0 < x < 16$ e allora là $f(x)$ è dcrescente

e allora $x = 16$ è unico punto di minimo (per $x > 0$, come dobbiamo considerare, e in effetti anche per $x \geq 0$, come facilmente si potrebbe vedere, anche se in 0 la funzione derivata non è definita; ma non ce ne occupiamo).
Il minimo cercato è il valore di $f(x)$ nel punto 16 di minimo:

$$f(16) = \mathrm{e} + \frac{16}{8} - \sqrt{16} =$$

$$= \mathrm{e} + 2 - 4 =$$

$$= \mathrm{e} - 2 \approx$$

$$\approx 2{,}718 - 2$$

$$\boxed{\approx 0{,}718}$$

WolframAlpha con l'istruzione `minimum of E+x/8-Sqrt[x] for` $x > 0$ dà

$e - 2$ `at 16`

che è il valore in forma esatta, che abbiamo trovato, col punto di minimo.

ES. 4$_{\mu 2023}$ % Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	338	21
NEGATIVI	25	405

Calcolare la specificità del test.

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Ricordando la definizione della specificità

$$Sp := \frac{veri\,negativi}{totale\,sani} = \frac{V_-}{V_- + F_+} =$$

coi dati del quesito

$$= \frac{405}{405+21} =$$
$$= \frac{405}{426} \approx$$

con la calcolatrice

$$\approx 0{,}9507$$

e in percentuale come richiesto e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{\approx 95\%}$$

ESERCIZIO 5$_{\mu 2023}$ $\star$ Stimare con lo stimatore dei momenti il parametro n di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme discreta $\mathbb{U}\{0, n\}$ da cui si è tratto questo campione aleatorio: 134, 101, 85, 358, 43; che è stato ottenuto da WolframAlpha con `5 random integers between 0 and 600`. (Il campione prodotto potrebbe apparire alquanto sorprendente).

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

(È fuori discussione che nessun valore vada considerato un outlier – nonostante 358 sia molto maggiore degli altri valori – perchè sono stati chiesti 5 valori e 5 sono stati forniti, perciò non possiamo eliminarne nessuno. È andata com'è andata, anche se il campione prodotto potrebbe apparire alquanto sorprendente).

Ponendo la media

$$\overline{X}_5 = \frac{134 + 101 + 85 + 358 + 43}{5} = \frac{721}{5} = 144.2$$

nella formula $\hat{n} = 2\,\bar{X}_n$ dello stimatore dei momenti del parametro n della distribuzione uniforme discreta $\mathbb{U}\{0, n\}$ si ha subito

$$\hat{n} = 2\,\bar{X}_n =$$

$$= 2 \cdot 144.2 =$$

$$\boxed{288.4}$$

Note. È venuto un caso abbastanza "particolare" e "sorprendente", e non solo perchè 358 è molto maggiore degli altri valori: i 5 numeri "casuali" prodotti da WolframAlpha sono complessivamente alquanto piccoli, con media solo 144.2, e così il valore 288.4 dello stimatore è risultato molto minore del valore vero 600 che si voleva stimare. D'altra parte:

(1) chi avrà molto a che fare coi numeri (pseudo)casuali avrà delusioni;

(2) il campione è stato veramente ottenuto come detto, ed era proprio il primo ottenuto per fare questo quesito della distribuzione uniforme discreta di parametri 0 e n, e perfino il numero $n = 600$ era stato ottenuto casualmente con WolframAlpha, al primo tentativo, con l'istruzione `randominteger(1000)`, "casuale" nonostante finisca con 2 zeri; tornare al punto (1).