Leggere bene la nota sulla virgola decimale a pagina 2 in basso

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2023}$ (R) $\approx$ Calcolare 1/4!

$$\boxed{\approx 0.0417}$$

($1/4! = 1/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 1/24 = 0.04166...$).
ESERCIZIO 0b$_{\mu 2023}$ (R) $^{\%}$ Qual è la probabilità che 4 monete diano testa?

$$\boxed{6.25\%}$$

($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.0625$, da esprimere come percentuale).
ESERCIZIO 0c$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Completare la parola mancante (nel modo più conforme al programma del Corso, senza stranezze): "Molto usato in Statistica è il test del chi quadrato di ... in cui si considerano tabelle 2×2 o più grandi."

$$\boxed{\text{indipendenza}}$$

Riportare i CALCOLI ovvero PASSAGGI degli esercizi da qua in poi

ESERCIZIO 1$_{\mu 2023}$ ≈ Nella notazione scientifica esprimere approssimatamente con 2 cifre significative ovvero con 1 cifra dopo il punto decimale il numero di sottoinsiemi dell'insieme dei primi 16 numeri primi.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale.

Il numero di sottoinsiemi di un insieme di n elementi è 2^n e con $n = 16$ il numero cercato è

$$2^{16} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

con la calcolatrice o a mano

$$= 65\,536 =$$

$$\boxed{\approx 6.6 \cdot 10^4}$$

oppure con altre scritture equivalenti, come – preceduti da ≈ in tutti i casi – 6.6×10^4, 6.6E4, 6.6E+4.

Nota 1. Il numero trovato 2^{16} ovvero 65 536 è un numero classico dell'informatica.

Nota 2. Non ha alcuna utilità elencare i primi 16 numeri primi.

Nota 3. Il calcolo può essere molto agevolato con le proprietà delle potenze:

$$2^{16} = \left(\left(\left(2^2\right)^2\right)^2\right)^2 =$$

con il che si hanno da fare solo 4 elevamenti al quadrato successivi:

$$2 \to 4 \to 16 \to 256 \to 65\,536$$

ESERCIZIO 2$_{\mu 2023}$ ≈ Essendo φ la sezione aurea (da altri indicata con ϕ, variante tipografica della stessa lettera greca phi), risolvere l'equazione in y

$$t = \frac{1}{8} \log_{\varphi}\left(\frac{y}{7}\right) + \frac{1}{2}$$

e poi (solo poi) mettervi $t = 1$, trovando così il valore numerico di y corrispondente a $t = 1$, approssimando all'intero più vicino. Senza che il risolutore debba occuparsene, diamo anche un'interpretazione dell'equazione. Una popolazione microbica si espande, nella fase iniziale, raggiungendo approssimativamente il numero $y \geq 1$ di individui al tempo $t(y)$ dato dall'equazione considerata. La soluzione dell'equazione (equazione in y con parametro t) dà il numero di microbi y (ovvero $y(t)$) al tempo t considerato, per esempio il $t = 1$ proposto.

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

$$\frac{1}{8}\log_{\varphi}\left(\frac{y}{7}\right)+\frac{1}{2}=t$$
$$\log_{\varphi}\left(\frac{y}{7}\right)+4=8\,t$$
$$\log_{\varphi}\left(\frac{y}{7}\right)=8\,t-4$$
$$\frac{y}{7}=\varphi^{8\,t-4}$$
$$y=7\,\varphi^{8\,t-4}$$

che è un primo risultato intermedio richiesto, e adesso mettiamo $t=1$:

$$y=7\,\varphi^{8\cdot 1-4}=$$
$$=7\,\varphi^{4}\approx$$

ricordando il classico valore approssimato della sezione aurea $\varphi\approx 1.618$

$$\approx 7\cdot 1.618^{4}\approx$$

con la calcolatrice o a mano, approssimando all'intero più vicino come richiesto,

$$\boxed{\approx 48}$$

Nota. Con la classica approssimazione $\varphi\approx 1.618$ viene $47.974...\approx 47.97$ mentre un calcolo più esatto con $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dà $47.978...\approx 47.98$, ma per l'approssimazione finale all'intero più vicino non cambia nulla: in ogni caso 48.

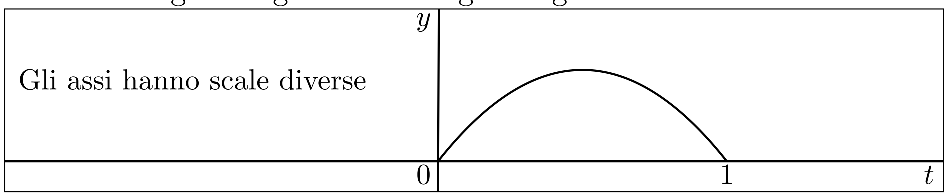
ESERCIZIO 3$_{\mu 2023}$ $\ast$ Trovare la costante a tale che

$$a\cdot\int_0^1 x\,(1-x)\,\mathrm{d}x=1$$

con il che, senza che il risolutore debba occuparsene, diventa una densità di probabilità (essendo non negativa, *molto regolare* e con integrale 1 su $\mathbb{R}$) la

$$f(x):=\begin{cases} a\,x\,(1-x) & \text{se } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

di cui si vede un disegno del grafico nella figura seguente.



SVOLGIMENTO

Risolviamo l'equazione in a

$$a \cdot \int_0^1 x\,(1-x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$a \cdot \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$a \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1$$

$$a \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - (0-0)\right) = 1$$

$$a \cdot \frac{3-2}{2 \cdot 3} = 1 \qquad \Big/ \cdot 6$$

$$a \cdot 1 = 6$$

$$\boxed{6}$$

ESERCIZIO 4$_{\mu 2023}$ $*$ Per una variabile aleatoria uniforme discreta $X \sim \mathbb{U}\{0,3\}$ calcolare $P(1 \leq X^2 < 10)$. (È come un dado regolare a 4 facce 0, 1, 2, 3).

SVOLGIMENTO

La variabile aleatoria X uniforme discreta di parametri 0 e 3, assimilabile a un dado regolare a 4 facce numerate da 0 a 3 (un tetraedro regolare), assume i valori 0, 1, 2, 3 con uguali probabilità, quindi $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. In simboli, peraltro non necessari,

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Consideriamo il valore di probabilità cercato:

$$P(1 \leq X^2 < 10) =$$

l'evento $\{1 \leq X^2 < 10\}$ di cui si cerca la probabilità, essendo X intero ≥ 0, è lo stesso che $\{1 \leq X \leq 3\}$

$$= P(1 \leq X \leq 3) =$$

$$= P(X = 1 \vee X = 2 \vee X = 3) =$$

$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\boxed{\tfrac{3}{4}}$$

ovvero, in un modo che in generale non si troverà nei testi di Farmacia,

$$\boxed{0.75}$$

con lo standard del punto decimale, ovvero

$$\boxed{0{,}75}$$

con lo standard della virgola decimale.

OPPURE

Trattandosi di un dado regolare, seppure a 4 facce invece delle più comuni 6, possiamo prescindere dalla teoria delle variabili aleatorie e usare la formula delle Probabilità Classica:

$$p = \frac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili equiprobabili}}$$

i casi favorevoli sono i 3 risultati 1, 2, 3, che hanno il quadrato fra 1 compreso e 10 escluso, e i casi possibili equiprobabili sono i 4 risultati 0, 1, 2, 3, e si trova $\frac{3}{4}$ come prima.

ESERCIZIO 5$_{\mu 2023}$ $*$ Calcolare lo stimatore della varianza del campione costituito dai primi 4 numeri primi.

SVOLGIMENTO

I valori x_1, x_2, x_3 e x_4 considerati sono

2 3 5 7

coi quali calcoliamo, con $n = 4$, prima di tutto la media

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{2+3+5+7}{4} = \frac{17}{4}$$

e poi con essa lo stimatore della varianza

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{4-1}\left(\left(2-\frac{17}{4}\right)^2 + \left(3-\frac{17}{4}\right)^2 + \left(5-\frac{17}{4}\right)^2 + \left(7-\frac{17}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{8-17}{4}\right)^2 + \left(\frac{12-17}{4}\right)^2 + \left(20-\frac{17}{4}\right)^2 + \left(28-\frac{17}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{-9}{4}\right)^2 + \left(\frac{-5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{11}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{81}{4^2} + \frac{25}{4^2} + \frac{9}{4^2} + \frac{121}{4^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{236}{4^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{59}{4} =$$

$$\boxed{\tfrac{59}{12}}$$

meno bene espresso – comunque in forma esatta – come

$$\boxed{4.91\overline{6}}$$

meno bene espresso come

$$\boxed{\tfrac{118}{24}}$$

e ancora meno bene espresso come

$$\boxed{\tfrac{236}{48}}$$

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.