Leggere bene la nota a pagina 2 in basso sul punto decimale

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato (senza indicazioni su punto o virgola decimali).

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2023}$ (R) $\approx$ Trovare la media aritmetica di -1 e $\sqrt{5}$.

$$\boxed{\approx 0.618}$$

(Questo numero $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, che si calcola approssimatamente con la calcolatrice o in altro modo, è un numero classico, contemporaneamente uguale alla *parte frazionaria* ovvero *decimale* della sezione aurea $\varphi = 1.618...$ e al reciproco $\frac{1}{\varphi}$ della sezione aurea medesima. In pratica se il rapporto $\frac{a}{b}$ di 2 numeri è la sezione aurea 1.618... allora il rapporto $\frac{b}{a}$ è 0.618... Si pensi a lunghezze).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2023}$ (R) % Calcolare la probabilità di ottenere esattamente 1 testa in 2 lanci di una moneta.

$$\boxed{50\%}$$

(Fra i 4 casi possibili equiprobabili che con ovvio significato dei simboli possiamo denotare TT, TC, CT, CC, ci sono 2 casi favorevoli, da cui $p = \frac{2}{4} = 0.5$).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2023}$ (R) $*$ Completare la parola mancante (nel modo più conforme al programma del Corso, senza stranezze):

"Molto usati in Statistica per il confronto di medie sono i test di..."

Student

Riportare i “PASSAGGI”/CALCOLI degli esercizi da qua in poi

ES. 1$_{\mu 2023}$ $*$ Dopo aver calcolato, espressa in una qualunque delle forme usuali, l’equazione della retta per questi punti (t_1, y_1) e (t_2, y_2)

$$(1, 0.5) \quad (15, 1.2)$$

porre $t = 22$ e trovare il corrispondente valore di y. Senza che il risolutore debba occuparsene, diamo un’interpretazione. Nelle prime 2 settimane del febbraio 2023 il numero di casi di covid-19 in Polonia, inteso come media mobile a 7 giorni, appare crescere più o meno linearmente, dai (circa) 0.5 di mercoledì 1 febbraio agli 1.2 di mercoledì 15, in migliaia. Il valore che si troverà con $t = 22$ è allora un’*estrapolazione* che, sul piano della realtà sensibile, rappresenta una *previsione* – secondo il modello ultrasemplificato scelto della crescita lineare – per il 22 febbraio 2023 (un mercoledì come il 1, l’8 e il 15). (Ecco più dati e con maggior precisione, relativi al 1, all’8 e al 15 febbraio: 0.502 0.808 1.179).

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale. (Come già nel testo del quesito).

Con la formula della retta per 2 punti

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

che riscriviamo per le variabili t e y

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

ora coi dati assegnati

$$\frac{t - 15}{1 - 15} = \frac{y - 1.2}{0.5 - 1.2}$$

che è la richiesta equazione della retta, che meglio scriviamo

$$\frac{t - 15}{-14} = \frac{y - 1.2}{-0.7}$$

(e si potrebbe scriverla ancor meglio).

Adesso poniamo $t = 22$

$$\frac{22 - 15}{-14} = \frac{y - 1.2}{-0.7}$$

e risolviamo la soprastante equazione in y:

$$\frac{7}{-14} = \frac{y-1.2}{-0.7}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{y-1.2}{-0.7} \qquad \Big/ \cdot (-0.7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0.7 = y - 1.2 \qquad \Big/ + 1.2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0.7 + 1.2 =$$

$$\boxed{1.55}$$

(La previsione è cioè di circa 1550 casi, al 22 febbraio 2023 in Polonia, nel senso della media mobile a 7 giorni).

ES. 2$_{\mu 2023}$ ≈ Calcolare la media geometrica di 10 e 200, ed esprimerla (approssimatamente) nella notazione scientifica con 3 cifre significative, ovvero con 2 cifre dopo il punto decimale.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale.

Ricordando la formula della media geometerica

$$\mathrm{GM}(x_1, ..., x_n) := (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} =$$

ora con $n = 2$ avendosi 2 dati

$$= (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}} =$$

e per una proprietà delle radici

$$= \sqrt{x_1 \cdot x_2} =$$

e ora coi valori numerici

$$= \sqrt{10 \cdot 200} =$$

$$= \sqrt{2000} \approx$$

con la calcolatrice

$$\boxed{\approx 4.47 \cdot 10^1}$$

ovvero

$$\boxed{\approx 4.47\mathrm{E}+1}$$

e in altri modi ancora. (Ma non $\approx 4.47 \cdot 10$, e sperabilmente non $\approx 4.47\,\mathrm{e}+1$).

ES. 3$_{\mu 2023}$ $\ast$ Calcolare

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

SVOLGIMENTO

È una serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} a\, r^k$ con

$$a = 4 \qquad \text{e ragione } r = \frac{1}{3}$$

che è un numero fra 0 e 1 escluso. Allora la ragione è numero fra -1 e 1, e allora la serie converge.
La serie iniziante da $k = 0$ ha somma

$$\frac{a}{1-r} =$$

$$= \frac{4}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{4}{\frac{2}{3}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{2} =$$

$$\boxed{6}$$

ES. 4$_{\mu 2023}$ $\ast$
Si consideri un'ipotetica malattia per la quale la probabilità di morte in caso di malattia è 1/3 ovvero con una *letalità* (teorica) del $33.\bar{3}\%$. (Si tratta di probabilità in senso frequentista). Che probabilità c'è che muoiano un terzo di 6 malati?

SVOLGIMENTO

Si tratta di calcolare la probabilità di $k = 2 = \frac{6}{3}$ successi su $n = 6$ prove, e ovviamente in questo caso il successo è la morte. (Possiamo immaginarlo

come successo della malattia, un po' tristemente).
Con la nota formula della probabilità di k successi su n prove

$$\tilde{p}_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

la probabilità dei 2 morti su 6 malati è

$$\tilde{p}_2 = P(2\, morti) =$$

$$= \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{6-2} =$$

$$= \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^4}{3^4} =$$

$$= \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^4}{3^6} =$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot \frac{2^4}{3^6} =$$

$$= \frac{5 \cdot 2^4}{3^5} =$$

$$\boxed{\frac{80}{243}}$$

ES. 5$_{\mu 2023}$ $\approx$
Dopo aver eliminato 4 outlier, stimare il parametro della distribuzione esponenziale da cui è stato tratto questo campione:
19.9 7.21 3.27 4.79 4.10 17.1 1.09 12.5 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard del punto decimale. (Come già nel testo del quesito).

Ovviamente i 4 outlier sono i 4 valori nulli finali, plausibilmente dovuti a un errore di un macchinario, o forse sono un riempitivo con valori fittizi di un record di un file o di un *array* di dimensione 12 in un software. Certo se si tratta dell'errore di un macchinario rimane molto dubbio il valore del risultato che andremo a calcolare, dopo aver eliminato 4 valori su 12 ritenendoli outlier; gli outlier sono quasi sempre un brutto problema in Statistica.

Eliminati i 4 outlier, la media degli $n = 8$ valori restanti è

$$\overline{X}_8 = 8.745$$

e passando al reciproco in base alla formula dello stimatore di massima verosimiglianza per il parametro λ di una distribuzione esponenziale

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

si ha la stima richiesta

$$\boxed{\approx 0.114}$$

(In effetti per generare il campione aleatorio era stato usato il valore $\lambda = 0.2$ su WolframAlpha, salvo arrotondamenti e aggiunta dei 4 oulier; si può riprovare con `random 8 sample exponential 0.2` ma naturalmente verranno in generale valori diversi).

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.