○ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale. In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale. Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ESERCIZIO 0a$_{\mu 2022}$ (R) $*$ Calcolare la media dei numeri $2.2 \cdot 10^{-2}$ e $9.4 \cdot 10^{-3}$.

Viene usato lo standard del punto decimale.

$$\boxed{1.57 \cdot 10^{-2}}$$

ovvero

$$\boxed{0.0157}$$

(Si tratta dei numeri 0.022 e 0.0094; bisogna sommarli e dividere per 2).

ESERCIZIO 0b$_{\mu 2022}$ (R) $\ast$ Trovare

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t}$$

$$\boxed{0}$$

(Si tratta della reciproca $\frac{1}{\mathrm{e}^t}$ di e^t che è una funzione infinita per $t \to +\infty$).

ESERCIZIO 0c$_{\mu 2022}$ (R) % Qual è la probabilità che un lancio di un dado regolare dia più di 4?

$$\boxed{\approx 33{,}3 \text{ (standard della virgola decimale)}}$$

oppure con maggior precisione

$$\boxed{\approx 33{,}33 \text{ (standard della virgola decimale)}}$$

(I casi favorevoli sono 2, i risultati 5 e 6, e i casi possibili equiprobabili 6, i risultati da 1 a 6, da cui la probabilità 2/6).

ESERCIZIO 1$_{\mu 2022}$ $\ast$ Supponiamo che dal Ministero della Salute arrivi alle Farmacie una circolare che impone di inviargli una segnalazione se arriva un cliente con

naso che cola O non vaccinato.

E

dolori muscolari O tosse.

Riconosciuto fra questi 5 il calcolo logico da fare

$$(\neg(p \vee q)) \wedge (r \vee s)$$

$$(\neg(p \wedge q)) \vee (r \wedge s)$$

$$(p \vee q) \wedge (r \vee \neg s)$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (r \vee s)$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$$

lo si svolga, indicando con V il valore di verità vero, con F quello falso, con ? quello sconosciuto, fino a determinare se la segnalazione va inviata per un cliente con naso che cola, tosse, vaccinato.

SVOLGIMENTO

Chiaramente la quarta espressione esprime le condizioni poste.
In effetti non sappiamo se il cliente ha dolori muscolari o no e allora indichiamo con ? il valore di verità di r:

V p :=“ha il naso che cola”
V q :=“è vaccinato”.
? r :=“ha dolori muscolari
V s :=“ha la tosse”

Si ha successivamente

$$(V \vee \neg V) \wedge (? \vee V)$$

Sia $V \vee V$ che $F \vee V$ danno V, vero, e allora $(? \vee V)$ è vera:

$$(V \vee F) \wedge V$$

$$V \wedge V$$

$$V$$

$$\boxed{\text{La segnalazione va inviata}}$$

ESERCIZIO 2$_{\mu 2022}$ $*$ Consideriamo questo modello della concentrazione di una sostanza nel sangue in funzione del tempo:

$$f(t) = c_0 \cdot \mathrm{e}^{-3\,t}$$

essendo c_0 la concentrazione iniziale ovvero al tempo 0. A quale tempo la concentrazione è ridotta del 90% ovvero è il 10% di c_0? (Non ci occupiamo di unità di misura).

SVOLGIMENTO

Al tempo cercato la concentrazione $f(t)$ è il 10% di c_0 e allora abbiamo l'equazione in t

$$f(t) = c_0 \cdot 10\%$$

ovvero scrivendo 10% come 0.1 e poi come $\frac{1}{10}$

$$c_0 \cdot \mathrm{e}^{-3\,t} = \frac{1}{10} \cdot c_0 \qquad \Big/ : c_0$$

$$\mathrm{e}^{-3\,t} = \frac{1}{10} \qquad \Big/ \ln \qquad (*)$$

$$-3\,t = \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

per la proprietà del logaritmo del reciproco

$$-3\,t = -\ln 10 \qquad \Big/ \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

e troviamo la soluzione in forma esatta:

$$\boxed{\tfrac{1}{3}\ln 10}$$

OPPURE:
Invece di eliminare l'esponenziale col logaritmo naturale come fatto in $(*)$, eliminiamo $\frac{1}{10}$ col logaritmo decimale:

$$\mathrm{e}^{-3\,t} = \frac{1}{10} \qquad \Big/ \lg$$

$$\lg\left(\mathrm{e}^{-3\,t}\right) = \lg 10^{-1}$$

$$-3\,t\ \lg \mathrm{e} = -1$$

$$\boxed{\frac{1}{3\lg \mathrm{e}}}$$

che è lo stesso valore prima trovato, seppure espresso diversamente, perchè $\ln 10 = \frac{1}{\lg \mathrm{e}}$.
Nota. Andiamo ad approssimare numericamente la soluzione esatta trovata ricordando che $\lg x \approx 0.4343 \ln x$ ovvero reciprocamente $\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$:

$$t = \frac{1}{3}\ln 10 \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{\lg 10}{0.4343} =$$

il logaritmo decimale di 10 è 1

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{0.4343} =$$

per aritmetica

$$= \frac{1}{3\cdot 0.4343} \approx$$

e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{\approx 0.768 \text{ (standard del punto decimale)}}$$

(che se il tempo era misurato in giorni corrisponde a circa 18 ore e mezza).

ESERCIZIO 3$_{\mu 2022}$ $\ast$ Calcolare la somma di questa serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 0.2^k$$

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard del punto decimale.
Si ha, con una ragione r minore in valore assoluto di 1 ed $a \in \mathbb{R}$,

$$a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + s\,r^n + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

e in particolare con $a = 1$

$$1 + r + r^2 + \ldots + +r^n + \ldots = \frac{1}{1-r}$$

che è quello che abbiamo da calcolare, con $r = 0.2$, salvo togliere l'unità iniziale, e allora la somma cercata è

$$-1 + \frac{1}{1-0.2} =$$

$$-1 + \frac{1}{0.8} =$$

$$= -1 + 1.25 =$$

$$\boxed{0.25}$$

oppure ugualmente in forma esatta

$$\boxed{\tfrac{1}{4}}$$

(Che possiamo verificare su WolframAlpha con `Sum[0.2^k,k,1,Infinity]` che dà 0.25).

ESERCIZIO 4$_{\mu 2022}$ % Qual è la probabilità che la somma dei risultati di 2 dadi regolari sia un numero quadrato?

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale).

La somma dei risultati di 2 dadi è uno dei numeri
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
e di essi sono numeri quadrati il 4 e il 9.
Ci sono $6 \cdot 6$ cioè 36 casi equiprobabili, da $(1,1)$ a $(6,6)$, con queste somme:

```
.....1..2..3..4..5..6
..-------------------
1 | 02 03 04'05 06 07
2 | 03 04'05 06 07 08
3 | 04'05 06 07 08 09'
4 | 05 06 07 08 09'10
5 | 06 07 08 09'10 11
6 | 07 08 09'10 11 12
```

e le ricorrenze dei numeri 4 e 9 sono state segnate con apici, e contandole troviamo che sono 7.
Allora

$$p = \frac{\# \, casi \, favorevoli}{\# \, casi \, possibili \, equiprobabili} = \frac{7_{\leftarrow elencazione \, con \, conteggio}}{6 \times 6_{\leftarrow prodotto \, cartesiano}} =$$

$$= \frac{7}{36} = 0.19444...$$

$$\boxed{\approx 19.4\% \text{ (standard del punto decimale)}}$$

oppure con maggior precisione

$$\boxed{\approx 19.44\% \text{ (standard del punto decimale)}}$$

ESERCIZIO 5 - STATISTICA INFERENZIALE - MANCANTE