

◦ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna solo questo foglio: col nome e una grande R.  
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

### Legenda

\* è richiesto il valore esatto. Può anche essere  $+\infty$ ,  $-\infty$ , o una frase.  
 $\approx$  è richiesta una ragionevole approssimazione.  
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.  
(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.  
In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.  
Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

**ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici –  
chi non risolve almeno 2 non passa l'esame –  
per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.**

**ESERCIZIO 0a<sub>μ</sub>** (R) \* Calcolare il fattoriale di 5.

120

$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)$ .

**ESERCIZIO 0b<sub>μ</sub>** (R) \* Qual è il minimo della funzione  $|x|$ ?

0

(È una funzione  $\geq 0$  che vale 0 in 0 e allora 0 è il minimo).

**ESERCIZIO 0 <sub>$\mu$</sub>**  (R) % Qual è la probabilità che 3 lanci di dado non diano mai risultato pari?

12,5%

(Danno sempre dispari, e la probabilità di un risultato dispari è  $\frac{1}{2}$ , da cui con la probabilità composta per eventi indipendenti,  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$ ).

**ESERCIZIO 1 <sub>$\mu$</sub>**  %

Di una compressa l'80% è eccipiente. Della parte restante l'85% è il principio attivo. Il resto è colorante. Qual è la percentuale del colorante contenuto nella compressa?

### SVOLGIMENTO

Di 100 parti della compressa 80 sono eccipiente. Delle restanti 20 parti, sono principio attivo l'85% cioè 17 parti:

$$20 \cdot 85\% = 17$$

Delle 100 parti iniziali, tolte 80 parti di eccipiente e 17 di principio attivo, restano 3 parti di colorante, che sulle 100 iniziali sono il

3%

**ESERCIZIO 2 <sub>$\mu$</sub>**  \*

Il numero di nuovi casi di covid-19 in Italia, in migliaia, sia modellizzato semplicemente da

$$x_t := 0.06 t^2 - 2.2 t + 36.5$$

per i giorni del 2022 dal 16 maggio ( $t = 0$ ) al 30 giugno ( $t = 45$ ). Supponendo che il modello continuasse a valere anche nei giorni successivi, in che data si sarebbero raggiunti i 97 000 casi?

### SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale (già nel testo del quesito).

Abbiamo l'equazione  $x_t = 97$  ovvero l'equazione di secondo grado

$$\begin{aligned}
 0.06t^2 - 2.2t + 36.5 &= 97 \quad / -97 \\
 0.06t^2 - 2.2t - 60.5 &= 0 \\
 t_{1,2} &= \frac{2.2 \pm \sqrt{2.2^2 - 4 \cdot 0.06 \cdot (-60.5)}}{2 \cdot 0.06} = \\
 &= \frac{2.2 \pm \sqrt{19.36}}{0.12} = \\
 &= \frac{2.2 \pm 4.4}{0.12}
 \end{aligned}$$

escludendo la soluzione negativa ( $t > 45$  perchè si considerano tempi successivi al giorno 45)

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{2.2 + 4.4}{0.12} = \\
 &= \frac{6.6}{0.12} = \\
 &= 55
 \end{aligned}$$

e il giorno 55 nel modello considerato è 10 giorni dopo il 30 giugno (giorno 45) e allora è il

10 luglio

(In effetti poi al 10 luglio 2022 si ebbe la media mobile a 7 giorni di 95 804 casi: l'*estrapolazione*  $x_{55}$  in questo caso funziona abbastanza bene; i casi effettivamente conteggiati furono invece 81 563, ma era domenica).

### ESERCIZIO 3 <sub>$\mu$</sub> \*

Determinare col metodo delle derivate il punto di minimo della funzione  $\ln^2 x$ .

#### SVOLGIMENTO

Prima di tutto deve essere

$$x > 0 \quad (1)$$

perchè argomento del logaritmo.

Cercheremo la derivata della funzione  $f(x) := \ln^2 x$  e risolveremo la disequazione  $f'(x) > 0$ .

Ci servirà in ogni caso la nota formula  $D \ln x = \frac{1}{x}$ .

Se ci ricordiamo la formula di derivazione della funzione composta

4

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o anche solo il caso particolare

$$D f^\alpha = \alpha f^{\alpha-1} \cdot f'$$

si ha subito

$$\begin{aligned} D \ln^2 x &= 2 \ln^1 x \cdot D \ln x = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \frac{2 \ln x}{x} \quad (2) \end{aligned}$$

Se invece non ci ricordiamo nessuna di quelle 2 formule calcoliamo

$$D \ln^2 x = D(\ln x \cdot \ln x) =$$

con la derivata del prodotto

$$= \frac{1}{x} \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

riottenendo la (2).

Allora abbiamo la disequazione

$$\frac{2 \ln x}{x} > 0 \quad / \cdot x > 0 \quad \text{nel dominio, vedi (1)}$$

$$2 \ln x > 0 \quad / : 2 > 0$$

$$\ln x > 0 \quad / \exp$$

$$x > 1$$

allora la funzione nel dominio è crescente per  $x > 1$  e decrescente per  $x < 1$  e allora  $x = 1$  è (l'unico) punto di minimo (assoluto) cercato:

$$\boxed{1}$$

**ESERCIZIO 4<sub>μ</sub>** % Viene condotto su 400 persone un test screening, e poi un'indagine diagnostica più approfondita, ottenendo questi risultati:

	MALATI	SANI
POSITIVI	116	15
NEGATIVI	30	239

Calcolare la specificità del test.

**SVOLGIMENTO**

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Ricordando la definizione della specificità

$$Sp := \frac{\text{veri negativi}}{\text{totale sani}} = \frac{V_-}{V_- + F_+} =$$

coi dati del quesito

$$= \frac{239}{239 + 15} = \frac{239}{254} \approx 0,9409$$

e con ragionevole approssimazione

$$\approx 0,94$$

e in percentuale come richiesto

$$\approx 94\%$$

**ESERCIZIO 5**  $\mu \approx$ 

Consideriamo il dataset

$$8,4 \cdot 10^6 \quad 0,87 \cdot 10^6 \quad 10 \cdot 10^6 \quad 38 \cdot 10^6 \quad 1,8 \cdot 10^6$$

Calcolare lo stimatore non distorto della media, con 2 cifre significative.

(Il dataset corrisponde più o meno alle quantità di italiani con rispettivamente 0 dosi di vaccino per la prevenzione del contagio da covid-19, e qua ci sono bambini ora non vaccinabili e persone vaccinabili non vaccinate, poi con solo 1 dose, con solo 2 dosi, con solo 3 dosi, con 4 dosi, ma non ce ne occupiamo assolutamente, lo prendiamo semplicemente come dataset).

**SVOLGIMENTO**

Viene usato lo standard della virgola decimale (già nel testo del quesito). Media degli  $n = 5$  valori del dataset:

$$\begin{aligned} \bar{X}_5 &= \frac{8,4 \cdot 10^6 + 0,87 \cdot 10^6 + 10 \cdot 10^6 + 38 \cdot 10^6 + 1,8 \cdot 10^6}{5} = \\ &= \frac{8,4 + 0,87 + 10 + 38 + 1,8}{5} \cdot 10^6 \approx 11,8 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

e con 2 cifre significative

$$12 \cdot 10^6$$