

◦ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.

Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda

* è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

\approx è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.

In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.

Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

**ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici –
chi non risolve almeno 2 non passa l'esame –
per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.**

ESERCIZIO 0a_μ (R) \approx Un report di ricerca farmaceutica riceve queste valutazioni:

999 per i risultati raggiunti

27 per la ricchezza bibliografica

e si vuole produrre una valutazione complessiva con la media geometrica dei 2 valori: calcolarla.

oppure con sostanzialmente inutile maggior precisione

$$\approx 164.23$$

(Radice quadrata del prodotto dei 2 numeri, e più in generale radice n -esima del prodotto di n numeri positivi).

ESERCIZIO 0b_μ (R) % Qual è la probabilità che 3 dadi lanciati diano tutti risultato pari?

$$12.5\%$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.125\right).$$

ESERCIZIO 0c_μ (R) * Completare la parola mancante (nel modo più standard ovvero usuale, senza stranezze): “In Statistica Inferenziale si considera più grave l’errore di prima ...”

specie

(Si tratta degli errori “di prima specie” detti anche “del primo tipo”).

ESERCIZIO 1_μ %

Di una compressa il 50% è eccipiente. Della parte restante l’8% è colorante. Il resto è il principio attivo. Qual è la percentuale del principio attivo contenuto nella compressa?

SVOLGIMENTO

Di 100 parti della compressa 50 sono eccipiente. Delle restanti 50 parti, sono colorante l’8% cioè 4 parti:

$$50 \cdot 8\% = 4$$

Delle 100 parti iniziali, tolte 50 parti di eccipiente e 4 di colorante, restano 46 parti di principio attivo, che sulle 100 iniziali sono il

$$46\%$$

ESERCIZIO 2 \approx

Risolvere con la precisione di 1 cifra decimale quest'equazione:

$$x^2 \log_4 1 + x \lg 16 + \log_4 16 = 0$$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale).

Ricordiamo che \lg denota il logaritmo in base 10.

Ovviamente

$$\log_4 1 = 0 \quad \text{perchè } 4^0 = 1$$

$$\log_4 16 = 2 \quad \text{perchè } 4^2 = 16$$

e ci resta l'equazione

$$x \lg 16 + 2 = 0$$

da cui

$$x = -\frac{2}{\lg 16}$$

che è la soluzione esatta. Osservando poi che $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$$x = -\frac{2}{\lg 2^4} =$$

per la proprietà del logaritmo della potenza

$$= -\frac{2}{4 \lg 2} = -\frac{1}{2 \lg 2} \approx$$

che è una migliore versione della soluzione esatta, e ricordando che $\lg 2 \approx 0,3$

$$\approx -\frac{1}{2 \cdot 0,3} \approx$$

e a questo punto non ci resta che sperare che l'approssimazione consueta $\lg 2 \approx 0,3$ sia approssimazione sufficientemente buona (e lo è: l'esercizio è costruito bene) per produrre la soluzione approssimata con 1 cifra decimale:

$\approx -1,7$

(Un valore più preciso è -1.661).

ESERCIZIO 3 _μ *

Il numero di nuovi casi di covid-19 in Italia, in migliaia, sia modellizzato semplicemente da

$$x_t := 0.06 t^2 - 2.2 t + 36.5$$

per i giorni del 2022 dal 16 maggio ($t = 0$) al 30 giugno ($t = 45$). Ma non useremo nulla di tutto questo per risolvere il quesito, che segue.

Calcolare (essendo n una costante numerica) l'integrale

$$\int_0^n (0.06 t^2 - 2.2 t + 36.5) dt$$

(che nel modello sopra descritto approssima il numero totale di nuovi casi, in migliaia, dal giorno 0 al giorno n per $0 \leq n \leq 45$, cioè in qualunque giorno del periodo considerato).

Ovviamente il risultato è un polinomio in n .

SVOLGIMENTO

Nel quesito e quindi anche nello svolgimento viene usato lo standard del punto decimale.

Si ha subito, ricordando le primitive di t^2 , t , e di una costante,

$$\begin{aligned} \int_0^n (0.06 t^2 - 2.2 t + 36.5) dt &= \\ &= \left[0.06 \frac{t^3}{3} - 2.2 \frac{t^2}{2} + 36.5 t \right]_0^n = \\ &= 0.06 \frac{n^3}{3} - 2.2 \frac{n^2}{2} + 36.5 n - (0 - 0 + 0) = \end{aligned}$$

$$0.02 n^3 - 1.1 n^2 + 36.5 n$$

Su WolframAlfa il grafico della funzione integranda e della soluzione: [LINK ->](#) (in blu la mortalità giornaliera, l'integranda, e in magenta il numero cumulativo di morti, l'integrale che è la soluzione).

ESERCIZIO 4 _μ %

Un parametro fisiologico sia modellizzato da una variabile aleatoria normale di media 128 e scarto quadratico medio 22. Che probabilità c'è che assuma un valore maggiore di 150?

SVOLGIMENTO

Si tratta di superare di più di 1σ la media μ , per una variabile aleatoria X di media μ e varianza σ^2 :

$$P(X > \mu + \sigma)$$

Con la regola 68-95-99.7 abbiamo che il valore entro 1σ dalla media

$$|X - \mu| \leq \sigma \quad \text{è evento con probabilità } \approx 68\%$$

ovvero (evento complementare) che il valore con scarto maggiore di 1σ

$$|X - \mu| > \sigma \quad \text{è evento con probabilità } \approx 32\%$$

e quell'evento è unione di 2 eventi disgiunti, equiprobabili per simmetria, ciascuno di probabilità $\approx 16\%$, metà di $\approx 32\%$:

$$X < \mu - \sigma$$

$$X > \mu + \sigma$$

e quest'ultimo è quello che ci interessa, il superare di più di 1σ la media μ ,

$$\approx 16\%$$

[LINK](#) -> a una figura in rete, esplicativa della regola 68-95-99.7.

ESERCIZIO 5 $\mu \approx$

Stimare il parametro λ di una densità esponenziale da questo campione di numeri qua scritti con 3 cifre significative, dopo aver eliminato gli outlier:

0.867 1.56 0.566 0.839 0.00 0.00 0.132 0.374 1.15 0.00 0.0154 0.156

Si dia il risultato con 1 cifra decimale.

(Potrebbero essere intertempi, misurati in ore, fra accessi successivi ad un pronto soccorso).

SVOLGIMENTO

Nel quesito e quindi anche nello svolgimento viene usato lo standard del punto decimale.

Tolti gli 0.00, senz'altro outlier perchè la variabile esponenziale con probabilità 1 assume valori positivi, la media aritmetica degli $n = 9$ valori restanti è $\bar{X}_n = 0.62882\dots$

Lo stimatore di massima verosimiglianza è il reciproco della media

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n} \approx 1.59 \approx$$

e con 1 cifra decimale come richiesto

$$\approx 1.6$$

Nota. Salvo approssimazioni, il campione (tranne gli outlier) era stato ottenuto su WolframAlpha con parametro $\lambda = 2.1$ con l'istruzione

`9 random numbers with exponential distribution lambda=2.1`

(Ogni volta che viene richiamata, produce un nuovo campione).