

◦ Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati e diverso docente e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.

Chi si ritira, consegna solo questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda

* è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

\approx è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale.

In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale.

Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

**ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici –
chi non risolve almeno 2 non passa l'esame –
per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.**

ES. 0a_μ (R) * Il logaritmo decimale di -1 è positivo o negativo o non esiste?

non esiste

(Per i numeri negativi non esiste il logaritmo considerato come funzione reale di variabile reale; ad un livello superiore nell'Analisi Matematica i logaritmi dei numeri negativi esistono ma sono numeri complessi nè positivi nè negativi, e, oltre al fatto che si tratta di un livello superiore, quel tipo di logaritmi di solito si considera solo per la base e , e se proprio si considerasse il logaritmo complesso in base 10, nessuno ragionevolmente lo chiamerebbe "logaritmo decimale" bensì "logaritmo (complesso) in base 10").

ES. 0b_μ (R) % Qual è la probabilità del pari con un dado?

50%

(I casi favorevoli sono i risultati 2, 4 e 6, i casi possibili sono ovviamente 6).

ES. 0c_μ (R) * Trascrivere in lettere italiane "χ²", il nome del test statistico.

chi quadrato

oppure

chi quadro

(La χ è una lettera dell'alfabeto greco che in italiano si chiama "chi").

ES. 1_μ \approx

In un articolo scientifico⁽¹⁾ leggiamo

Therapeutic options in patients with advanced-stage gastroenteropancreatic (GEP) neuroendocrine tumors are limited. We compared the efficacy of radionuclide therapy with ¹¹¹In-pentetreotide and ¹¹¹I-metaiodobenzylguanidine (MIBG) in 20 patients (group A) with the outcome of similar patients who could not be treated for nonmedical reasons (group B, n = 12).

¹Nguyen C, Faraggi M, Giraudet AL, de Labriolle-Vaylet C, Aparicio T, Rouzet F, Mignon M, Askienazy S, Sobhani I. Long-term efficacy of radionuclide therapy in patients with disseminated neuroendocrine tumors uncontrolled by conventional therapy. J Nucl Med. 2004 Oct;45(10):1660-8. PMID: 15471830.

Dei numerosi elementi statistici dell'articolo non ci occuperemo, solo ci chiediamo la media interquartile delle età dei soggetti del gruppo B:

62, 74, 40, 58, 79, 50, 71, 59, 67, 65, 81, 85

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Riordiniamo il dataset in ordine crescente

40, 50, 58, 59, 62, 65, 67, 71, 74, 79, 81, 85

poi lo dividiamo in 4 parti uguali

40, 50, 58, 59, 62, 65, 67, 71, 74, 79, 81, 85

poi eliminiamo la prima e la quarta parte

59, 62, 65, 67, 71, 74

e la media aritmetica $\approx 66.333\dots$ dei numeri rimasti è la media interquartile richiesta, che con una ragionevole approssimazione (si tratta di età in anni) è

66,3

ES. 2 _{μ} \approx

Fra queste costanti matematiche classicamente considerate: e , π , φ , una è alquanto vicina a $\sqrt{10}$: con ciò, approssimarne il logaritmo naturale, dando 3 cifre significative, usando le proprietà di radici e logaritmi.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Con la calcolatrice troviamo

$$\sqrt{10} \approx 3.16$$

e allora, ricordando $\pi \approx 3.14$,

$$\pi \approx \sqrt{10}$$

allora, per la nota proprietà $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ per ogni $x \geq 0$,

$$\pi \approx 10^{\frac{1}{2}} \quad / \lg$$

$$\lg \pi \approx \frac{1}{2}$$

e con la formula approssimata $\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$

$$\ln \pi \approx \frac{\lg \pi}{0.4343} = \frac{0.5}{0.4343} \approx 1.15128$$

e in definitiva, usando 3 cifre significative come richiesto,

$$\ln \pi \approx 1.15$$

Nota. Un valore più preciso è ≈ 1.14473 e l'errore relativo del risultato trovato 1.15 è dello 0.4%. Si noti però che la corretta approssimazione di $\ln \pi$ con 3 cifre significative è 1.14 e non l'1.15 che abbiamo trovato operando a partire dall'approssimazione con 0.4343.

ESERCIZIO 3 _{μ} *

Anche ricordando che $\cos 0 = 1$ e $\cos \pi = -1$, trovare a tale per cui

$$1 = \int_0^{\pi} a \cdot \sin t \, dt$$

(e con quel valore di a , la funzione

$$f(t) := \begin{cases} a \cdot \sin t & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sarà una densità di probabilità ma di tutto ciò non ci occuperemo).

SVOLGIMENTO

È notoriamente

$$\int \sin t \, dt = -\cos t + c$$

allora

$$\int a \cdot \sin t \, dt = -a \cdot \cos t + c$$

e allora

$$\begin{aligned} 1 & \stackrel{EQUAZ}{=} \int_0^{\pi} a \cdot \sin t \, dt = \\ & = [-a \cdot \cos t]_0^{\pi} = \\ & = -a \cdot \cos \pi + a \cdot \cos 0 = \end{aligned}$$

e con i (ben noti) valori del coseno riportati nel quesito

$$= a + a = 2a$$

da cui l'equazione

$$1 \stackrel{EQUAZ}{=} 2a$$

e allora a vale

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

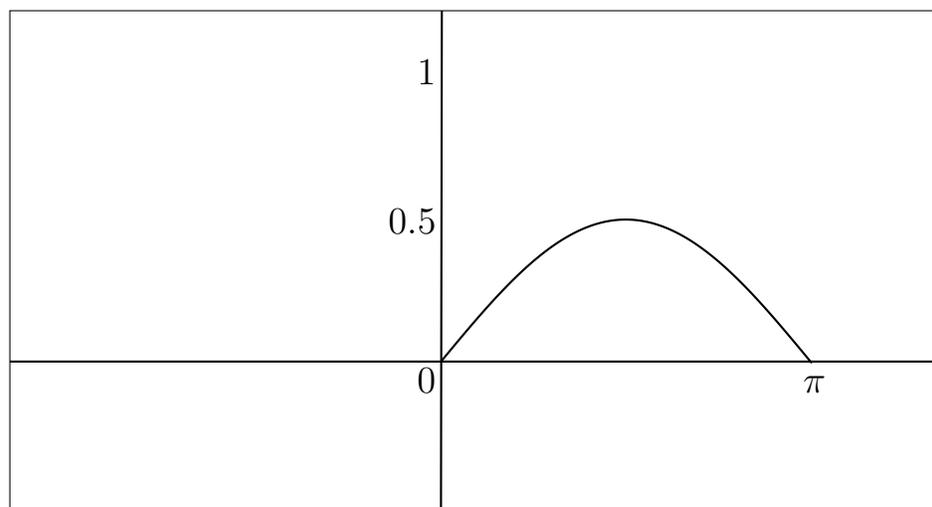
ovvero

$$\boxed{0.5 \text{ (con lo standard del punto decimale)}}$$

ovvero

$$\boxed{0,5 \text{ (con lo standard della virgola decimale)}}$$

Nota. Ecco un (disegno del) grafico della densità.



ES. 4_μ %

Tre geni si presentano in modo indipendente con probabilità approssimative 10%, 30% e 60%. Qual è la probabilità di averli tutti?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Detto A il soggetto considerato e 1, 2 e 3 i tre geni, considerando l'evento composto

$$\begin{aligned} &P(A \text{ ha il gene 1} \wedge A \text{ ha il gene 2} \wedge A \text{ ha il gene 3}) = \\ &= P(A \text{ ha il gene 1}) \cdot P(A \text{ ha il gene 2}) \cdot P(A \text{ ha il gene 3}) \approx \\ &(\text{si noti che i 3 valori sono stati dichiarati approssimativi nel quesito}) \end{aligned}$$

$$\approx 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,6 =$$

$$= 0,018$$

e in definitiva col segno \approx

$$\approx 1,8\%$$

ESERCIZIO 5 $\mu \approx$

Stimare il parametro λ di una densità esponenziale da questo campione:

0.233, 2.65, 1.81, 3.71, 0.895, 2.21, 6.61, 4.31, 1.39, 0.107

Si dia il risultato con 2 cifre significative.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

La media aritmetica degli $n = 10$ valori è $\bar{X}_n = 2.3925$.

Lo stimatore di massima verosimiglianza è il reciproco della media

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}_n} \approx 0.41797 \approx$$

e con 2 cifre significative come richiesto

$$\approx 0.42$$

Nota. Salvo approssimare i valori a 3 cifre significative, il campione era stato ottenuto su WolframAlpha con parametro $\lambda = 0.5$.