○ **Sì, segno qua una X sul circoletto perchè sono uno studente di anni passati <u>e diverso docente</u> e desidero anche un esame orale, e consegno questo foglio piegato in 2 insieme alla bella copia.**

Chi si ritira, consegna **<u>solo</u>** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono per sè questo foglio, e consegnano solo i fogli di bella copia piegati in due, tutti insieme.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato.

In questo tema d'esame possono comparire entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale. In ogni esercizio in cui nel quesito o nello svolgimento compaiono numeri che in italiano diciamo *con la virgola*, scrivere all'inizio dello svolgimento se è usato lo standard del punto o della virgola decimale. Ovviamente se nel testo di un quesito c'è qualcuno di quei numeri, lo svolgimento va fatto continuando con lo stesso standard.

ESERCIZIO 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_\mu$ (R) $*$ $\frac{\lg x^2}{\lg x^3}$

$\boxed{\frac{2}{3}}$

(Si applica la $\mathrm{LOG}x^c = c\,\mathrm{LOG}x$ valida col logaritmo in qualunque base, il che “tira giù” un 2 al numeratore e un 3 al denominatore, e $\lg x$ si semplifica. Un’argomentazione cavillosa, che comunque non era l’obiettivo di questo esercizio, andrà a indagare sul dominio della funzione, non trovandovi nulla che contraddice la soluzione immediatamente data: il dominio è $x > 0 \wedge x \neq 1$ e là è proprio $\lg x^2 = 2\lg x$, mentre in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vale $\lg x^2 = 2\lg |x|$).

ES. 0b$_\mu$ (R) $*$ $D \sin x$

$$\boxed{\cos x}$$

(‘E un risultato classico che si sa a memoria).
ES. 0c$_\mu$ (R) $*$ Qual è meno grave, l’errore di prima o seconda specie?

$$\boxed{\text{L'errore di seconda specie}}$$

(L’errore di prima specie è notoriamente il più grave).

ES. 1$_\mu$ $*$ Quanti sottoinsiemi non vuoti ha l’insieme {He, Ne, Ar, Kr, Xe, Ra, H_2O}?
SVOLGIMENTO
L’insieme ha 7 elementi (ovviamente in senso matematico, non stiamo conteggiando gli 8 *elementi chimici*) e allora ha $2^7 = 128$ sottoinsiemi di cui 1 è l’insieme vuoto.

$$\boxed{127}$$

ES. 2$_\mu$ $\approx$ Risolvere l’equazione $x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1$.
SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale).

Dividiamo ambo i membri per uno stesso numero diverso da 0 (essendo il valore di un esponenziale)

$$x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1 \qquad \Big/ : \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \neq 0$$

$$x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}} =$$

che è già la soluzione esatta (seppure non bene espressa) e poi per le proprietà delle potenze

$$x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} =$$

e già abbiamo la soluzione esatta ed espressa bene, che ora approssimeremo; per le proprietà delle potenze

$$= \left(\mathrm{e}^3\right)^{\frac{1}{2}} =$$

per le proprietà delle potenze e delle radici

$$= \sqrt{\mathrm{e}^3} = \sqrt{\mathrm{e} \cdot \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}} \approx$$

ricordando il valore approssimato di e, e poi con la calcolatrice

$$\approx \sqrt{2.718 \cdot 2.718 \cdot 2.718} \approx \sqrt{20.079} \approx$$

$$\approx 4.481$$

ma senza voler azzardare tanti decimali (comunque giusti, come si può verificare con una buona calcolatrice o col computer) diciamo con maggior sicurezza, e comunque buona accuratezza,

$$\boxed{4.48}$$

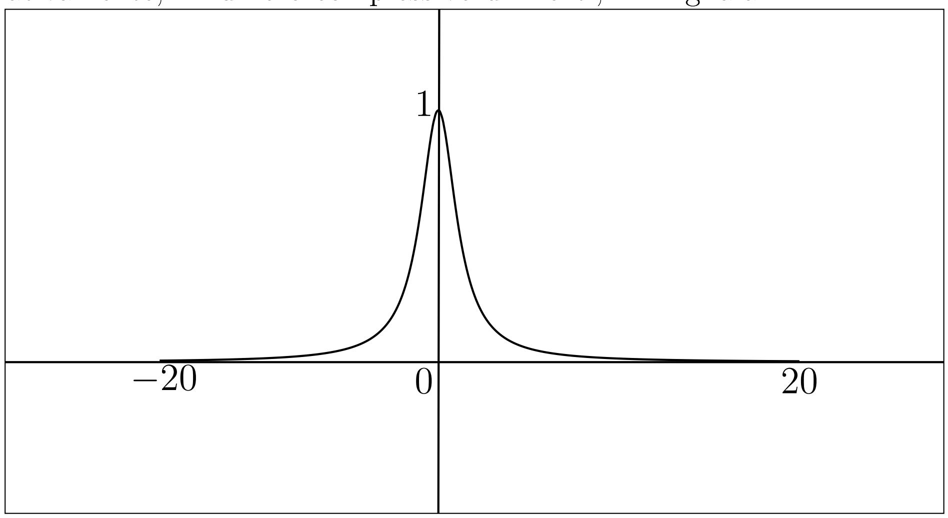
ES. 3$_\mu$ $\approx$ Approssimando arctan(20) con arctan($+\infty$), calcolare

$$\int_{-20}^{20} f(t)\, dt, \qquad f(t) := \frac{1}{1+t^2}$$

e potrà essere utile questa tavola di valori, dove ovviamente l'infinito va inteso nel senso del limite:

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\arctan(-x) = -\arctan x)$

Di questa questione possiamo dare un'interessante interpretazione, seppure non serva per risolvere il quesito. Il numero di morti di un'epidemia, in migliaia, sia approssimatamente modellizzato dalla $f(t)$ considerata, per $-20 \leq t \leq 20$ essendo t il tempo, dal giorno $t = -20$ (per esempio 11 dicembre 2020) al tempo $t = 20$ (20 gennaio 2021). (Per esempio, vediamo che nel giorno di picco $t = 0 = 31$ dicembre 2020 il modello dà 1000 morti). Allora ovviamente l'area espressa dall'integrale considerato dà, molto approssimativamente, il numero complessivo di morti, in migliaia.



SVOLGIMENTO

$$\int_{-20}^{20} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= [\arctan t]_{-20}^{20} =$$

$$= \arctan(20) - \arctan(-20) =$$

per la disparità dell'arcotangente ricordata nella tavola

$$= \arctan(20) - (-\arctan(20)) =$$

$$= 2\, \arctan(20) \approx 2\, \arctan(+\infty) = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi \approx$$

$$\boxed{\approx 3.14}$$

(e nell'interpretazione dell'epidemia corrisponde a circa 3140 morti, diciamo pure "circa 3000 morti" a causa delle grossolane approssimazioni).

Nota 1. È stata un'epidemia molto intensa solo per breve tempo, con un'ascesa verso il picco e una discesa in certo qual modo rapidissime, con buona parte dei morti concentrati in una settimana, molto diversa dalla pandemia attuale, per la quale – nemmeno per la sola Italia – una formula semplicissima come quella dell'esercizio non può bastare:

31 dicembre 1000 morti
1 gennaio 500 morti
2 gennaio 200 morti
3 gennaio 100 morti

Nota 2. Se invece dell'integrale, con un computer (o a mano con molta pazienza) sommiamo i morti previsti dal modello per i 41 giorni dell'epidemia, si ha, molto più precisamente,

$$\sum_{t=-20}^{20} \frac{1}{1+t^2} \approx 3.056$$

cioè ≈ 3056 morti.

ES. 4$_\mu$ % Tre geni si presentano in modo indipendente con probabilità 12,5%, 50% e 25%. Qual è la probabilità di averli tutti?

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale.

Detto A il soggetto considerato e 1, 2 e 3 i tre geni, considerando l'evento composto

$$P(A \text{ ha il gene } 1 \wedge A \text{ ha il gene } 2 \wedge A \text{ ha il gene } 3) =$$

$$= P(A \text{ ha il gene } 1) \cdot P(A \text{ ha il gene } 2) \cdot P(A \text{ ha il gene } 3) =$$

$$= 0{,}125 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 =$$

$$= 0.015625 \approx$$

$$\boxed{\approx 1.56\%}$$

ES. 5$_\mu$ $\approx$ Stimare la varianza del campione gaussiano

8.6 6.8 8.7 7.5

SVOLGIMENTO

Lo stimatore (classico, non distorto) della varianza è

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

essendo $\bar{X}_n$ la media campionaria, ora con $n = 4$:

$$\bar{X}_4 = \frac{8.6 + 6.8 + 8.7 + 7.5}{4} = 7.9$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{3}\left((8.6 - 7.9)^2 + (6.8 - 7.9)^2 + (8.7 - 7.9)^2 + (7.5 - 7.9)^2\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(0.7^2 + (-1.1)^2 + 0.8^2 + (-0.4)^2\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(0.49 + 1.21 + 0.64 + 0.16\right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2.5 \approx \\ &\boxed{\approx 0.83} \end{aligned}$$

x