Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

In questo tema d'esame si usano entrambi gli standard del punto decimale e della virgola decimale. Attenzione!

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Nell'esercizio 1 **specificare** se viene usato lo standard del punto o della virgola decimale e risolvere con lo stesso standard.

ES. 1$_{\mu 2020}$
$**$ Supponiamo che la Protezione Civile mandi urgentemente in massa, automaticamente, l'SMS "Bollire l'acqua di rubinetto prima di bere - pericolo di malattia infettiva". (Invii automatici sono stati fatti in passato). Si abbiano questi risultati, con il numero di messaggi inviati espresso in milioni:

Ore: 5:00 Messaggi inviati: 2.3
Ore: 10:00 Messaggi inviati: 3.5

Supponendo una crescita lineare, si trovi l'equazione della grandezza considerata (cioè "Messaggi inviati", che possiamo indicare per esempio con y) in funzione del tempo t, e a che ora sono state inviati 3,100,000 messaggi.
(Non è necessario convertire in forma frazionaria i dati assegnati).

SVOLGIMENTO

Si usa lo standard del punto decimale. (Perchè solo questo può essere il punto dei dati 2.3 e 3.5).
Si suppone una crescita lineare e allora il grafico nel piano cartesiano sarà la retta per i 2 punti

$$(5, 2.3) \quad (10, 3.5)$$

di equazione

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

(con ovvio significato dei simboli) e cioè

$$\frac{t - 10}{5 - 10} = \frac{y - 3.5}{2.3 - 3.5}$$

$$\frac{t-10}{-5} = \frac{y-3.5}{-1.2}$$
$$y = \frac{1.2}{5}\,(t-10) + 3.5$$
$$\boxed{\,y = 0.24\,(t-10) + 3.5\,}$$

che può considerarsi espressa in forma definitiva, oppure si apre la parentesi ottenendo

$$y = 0.24\,t - 2.4 + 3.5$$
$$y = 0.24\,t + 1.1$$

che preferiremo nel risultato finale. (Attenzione: y è in milioni).

Per trovare a che ora valeva 3.1 (milioni, ovvio!) risolviamo l'equazione

$$0.24\,t + 1.1 = 3.1$$
$$0.24\,t = 3.1 - 1.1$$
$$0.24\,t = 2$$
$$t = \frac{2}{0.24} =$$

moltiplicando numeratore e denominatore per 100

$$= \frac{200}{24} = \frac{100}{12} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} = \qquad (\star)$$

che vale $8.\bar{3} = 8.3333333...$ ma queste 2, e tantomeno le frazioni precedenti, non sono valide rappresentazioni di un'ora. Piuttosto (ricordando la nota $\frac{1}{3} = 0.\bar{3} = 0.3333333...$) riprendiamo da $(\star)$ scomponendo in questo modo:

$$(\star) \qquad = \frac{24+1}{3} = 8 + \frac{1}{3}$$

ovvero le 8 più $\frac{1}{3}$ di ora, cioè 20 minuti, ossia le 8:20.

$$\boxed{\begin{array}{c} y = 0.24\,t + 1.1 \\ \\ \text{8:20} \end{array}}$$

Nei seguenti due esercizi 2 e 3 usare lo standard della virgola decimale

ES. 2$_{\mu 2020}$
Una farmacia fa un sondaggio sul grado di soddisfazione dei clienti. Viene usato un punteggio di tipo scolastico italiano, coi mezzi punti. Rappresentare le frequenze con un bar chart, senza percentuali.
$7, 7, 6, 8, 7\frac{1}{2}, 4, 7\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}, 6, 8\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 5, 7\frac{1}{2}, 7, 2\frac{1}{2}, 7, 8, 7\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}, 6, 5, 8, 5\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 10, 8, 3\frac{1}{2}, 6, 8, 8\frac{1}{2}, 3, 7\frac{1}{2}, 5, 7, 6, 10, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 6, 6, 9, 5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7, 6, 6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, 7, 5, 5, 5\frac{1}{2}, 4, 8\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7, 6\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 6, 8\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 5, 6, 5\frac{1}{2}, 10, 6\frac{1}{2}, 6, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 4, 6, 6\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 6, 10, 4\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 7, 5, 7\frac{1}{2}, 3, 6, 6, 6\frac{1}{2}, 6, 10, 9, 5, 7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}$

SVOLGIMENTO
Si stanno usando *frazioni miste*, in cui per esempio $7\frac{1}{2}$ è da intendersi non come $7 \cdot \frac{1}{2}$ cioè 3,5 bensì

$$7 + \frac{1}{2} = 7{,}5$$

e allora sta fra 7 e 8 (e non fra 3 e 4).
Conteggiamo nel datadset

0 volte 0

0 volte $0\frac{1}{2}$

0 volte 1

0 volte $1\frac{1}{2}$

0 volte 2

1 volte $2\frac{1}{2}$

2 volte 3 eccetera

ottenendosi il bar chart ovvero istogramma a barre (da alcuni detto istogramma, purtroppo, con possibile equivoco con quell'altro tipo di diagramma, in cui i dati sono rappresentati da aree)

0	0	
$0\frac{1}{2}$	0	
1	0	
$1\frac{1}{2}$	0	
2	0	
$2\frac{1}{2}$	1	0
3	2	00
$3\frac{1}{2}$	1	0
4	3	000
$4\frac{1}{2}$	4	0000
5	8	00000000
$5\frac{1}{2}$	12	000000000000
6	17	00000000000000000
$6\frac{1}{2}$	12	000000000000
7	9	000000000
$7\frac{1}{2}$	11	00000000000
8	5	00000
$8\frac{1}{2}$	6	000000
9	2	00
$9\frac{1}{2}$	2	00
10	5	00000

NOTA 1. Le frazioni miste sono una vera iattura. Oltre al possibile equivoco di $7\frac{1}{2}$ con $7\cdot\frac{1}{2}$ (invece di $7+\frac{1}{2}$), sono difficili da trattare informaticamente.
NOTA 2. Si noti la prevedibile forma più o meno a campana, con pochi clienti soddisfatti eccezionalmente poco o eccezionalmente molto.
Tuttavia si noti l'addensamento dei valori intorno a 10: sono clienti eccezionalmente soddisfatti, che avrebbero voluto dare anche "10 e lode" alla famacia. Questo è un fenomeno statistico tipico che si verifica quando c'è una limitazione superiore "imposta per legge": per esempio se un certo insieme di persone deve dichiarare una quantità di giorni di malattia, ma da 11 in poi scatta un qualche tipo di provvedimento del tipo diminuzione dello stipendio, si potrà avere un simile addensamento di valori intorno a 10.
Similmente può avvenire con limitazioni inferiori. Infatti qua non è molto realistico il numero di persone che ha dato i voti $2\frac{1}{2}$, 3 e $3\frac{1}{2}$: sono clienti estremamente insoddisfatti, e ben probabilmente qualcuno non si sarebbe trattenuto dal dare 0, causando così un rialzamento di una coda della campana intorno a quella limitazione inferiore.

ES. 3$_{\mu 2020}$
$*\approx$ Calcolare

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} 5 \lg^k 8$$

SVOLGIMENTO
È una serie geometrica $\Sigma_{k=1}^{\infty} a\, r^k$ con

$$a = 5 \qquad \text{e ragione } r = \lg 8$$

che è un numero fra 0 e 1 escluso perchè

$$1 < 8 < 10 \quad \Big/ \lg \ \text{(crescente)} \quad \Rightarrow 0 < \lg 8 < 1.$$

Allora la ragione è numero fra -1 e 1, e allora la serie converge.
La corrispondente serie iniziante da $k = 0$ ha somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\lg 8}$$

e (ma) quella considerata manca del termine corrispondente a $k = 0$, che vale $5 \lg^0 8$ cioè 5, e allora ha somma

$$\boxed{\frac{5}{1-\lg 8} - 5}$$

che è la soluzione esatta cercata, che possiamo scrivere

$$\boxed{\frac{5 \lg 8}{1-\lg 8}}$$

Per il valore approssimato useremo la prima espressione e ricordiamo che $\lg 2 \approx 0{,}3$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{1-\lg 8} - 5 &= \\
= \frac{5}{1-\lg 2^3} - 5 &= \\
= \frac{5}{1-3 \lg 2} - 5 &\approx \\
\approx \frac{5}{1-3 \cdot 0{,}3} - 5 &= \\
= \frac{5}{1-0{,}9} - 5 &= \\
= \frac{5}{0{,}1} - 5 = 50 - 5 &= 45
\end{aligned}$$

In definitiva, **ma vedasi la precisazione qua sotto**,

$$\boxed{\frac{5 \lg 8}{1-\lg 8} \approx 45}$$

Nota. Il risultato esatto ovviamente è esatto, invece l'approssimazione non è molto buona; un calcolo più preciso, per esempio su WolframAlpha con `5/(1 - Log[10, 8]) - 5`, dà ≈ 46.6, avendosi un errore relativo circa del 3.4%.

Questo succede per l'instabilità numerica dell'operazione di sottrazione, sottile questione di Analisi Numerica. L'approssimazione di $\lg 2$ con 0,3 è buona, con errore circa del 3 per mille, e tale rimane moltiplicando per 3 ovvero approssimando $\lg 8$; invece quando si fa la sottrazione $1 - 3 \cdot 0{,}3$ l'instabilità numerica si manifesta, in questo caso abbastanza consistentemente.
Si faccia attenzione alle sottrazioni fra numeri approssimati! Si usino molti decimali!
Qua non potevamo fare di meglio conoscendo solo l'approssimazione 0,3.
Con l'approssimazione $\lg 2 \approx 0{,}301$, con 3 decimali, l'errore relativo finale sarebbe solo circa dell'1 per mille, molto più piccolo.

Nei seguenti tre esercizi 4, 5 e 6 usare lo standard del punto decimale

ES. 4$_{\mu 2020}$
$*$ % Si consideri un'ipotetica malattia con una *letalità* del 25%, cioè con probabilità 1/4 di morire in caso di malattia. (Si tratta di probabilità in senso frequentista). Calcolare la probabilità che di 7 malati ne muoiano più dell'80%, ovviamente supponendo l'indipendenza dei casi. Al risultato espresso in forma esatta si può arrivare sia facendo i calcoli con la frazione $\frac{1}{4}$ che con la sua scrittura decimale 0.25, ma quest'ultimo modo (sconsigliabile) richiederebbe di fare moltiplicazioni a mano perchè una normale piccola calcolatrice tascabile non può fare in forma esatta i calcoli necessari (richiederebbe un display con più cifre).

SVOLGIMENTO
L'80% di 7 è 5.6 e dovendo morire un numero di persone maggiore, o sono 6 o sono 7.
Si tratta di calcolare la probabilità di k successi su $n = 7$ prove, essendo k o 6 o 7, e ovviamente in questo caso il successo è la morte. (Possiamo immaginarlo come successo della malattia, un po' tristemente).
Con la nota formula della probabilità di k successi su n prove

$$\tilde{p}_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

la probabilità dei 6 morti è

$$\tilde{p}_6 = P(6\, morti) =$$

$$= \binom{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{7-6} =$$

$$= \frac{7!}{6!(7-6)!} \cdot \frac{1}{4^6} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 =$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1} \cdot \frac{1}{4^6} \cdot \frac{3}{4} =$$
$$= 7 \cdot \frac{3}{4^7} = \frac{21}{16\,384}$$

e con analogo ma più breve calcolo

$$\tilde{p}_7 = P(7\, morti) = (...) = \frac{1}{16\,384}$$

e allora la probabilità cercata è

$$\tilde{p} = P(6\, morti\ \vee\ 7\, morti) = \qquad \text{(sono eventi disgiunti)}$$
$$= P(6\, morti) + P(7\, morti) = \tilde{p}_6 + \tilde{p}_7 = \qquad \text{(valori sopra trovati)}$$
$$= \frac{21}{16\,384} + \frac{1}{16\,384} = \frac{22}{16\,384} = \qquad \text{(algebra delle frazioni)}$$
$$= \frac{11}{8\,192} \approx \qquad \text{(calcolatrice)}$$
$$\approx 0.00134277$$

$$\boxed{\tfrac{11}{8\,192} \approx 0.134\%}$$

ES. 5$_{\mu 2020}$
$* \approx \%$ Si consideri una variabile aleatoria W di densità $\Gamma(\alpha, \lambda)$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} & se\ \ x > 0 \\ \\ 0 & se\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

Fissati $\alpha := 2$ e $\lambda := 1$, calcolare la probabilità che W assuma valori ≤ 2.
Un laborioso calcolo sarà risparmiato osservando che

$-x\, e^{-x} - e^{-x}$ ha derivata $x\, \mathrm{e}^{-x}$

(come sarebbe magari opportuno ritenere a memoria, come $D\, \sin x = \cos x$).

SVOLGIMENTO

Essendo $\Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$ la densità è

$$f(x) := \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & se\ \ x > 0 \\ \\ 0 & se\ \ x \leq 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che per una v.a. W continua (di quelle sufficientemente regolari che ricorrono nella pratica delle Scienze Applicate) di densità $f(x)$

$$P(a \leq W \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall\, a, b, \quad ogni \leq \ sostituibile\, con \ <$$

e in quest'ultima a e b possono essere infiniti, ovviamente col $<$, allora

$$P(W \leq 2) = P(-\infty < W \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx =$$

essendo nulla la densità fino a 0

$$= \int_0^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 x\,e^{-x}\,dx =$$

l'integrale indefinito lo conosciamo dal suggerimento sulla derivata

$$= \left[-x\,e^{-x} - e^{-x}\right]_0^2 =$$

$$= -2\,e^{-2} - e^{-2} + 0 + e^0 =$$

$$= -3\,\mathrm{e}^{-2} + 1 =$$

$$= 1 - \frac{3}{\mathrm{e}^2}$$

che è il valore cercato esatto.

Infine con l'approssimazione $\mathrm{e} \approx 2.718$, con la calcolatrice,

$$\boxed{1 - \tfrac{3}{\mathrm{e}^2} \approx 0.594 = 59.4\%}$$

(Siccome è un valore che viene da una densità definita in forma *esatta* non c'è motivo di arrotondare a 59%).

ES. 6$_{\mu 2020}$

$*$ Supponiamo che per un test di Student, con ipotesi H_0 e alternativa H_1, ad un certo livello α, la regione critica sia definita da $t \geq 1.6602$ e lo stimatore $T := g(X_1, ..., Xn)$ relativo al test abbia prodotto il valore 0.77, e che sia vera H_1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Non è possibile rispondere perchè non è specificato quale test si usa
- Non è possibile rispondere perchè non è specificato α
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Si commette un errore di prima specie
- Si commette un errore di seconda specie
- Era il caso in generale sperato

SVOLGIMENTO

Lo stimatore T vale 0.77 che $\notin$ alla regione critica, e l'ipotesi (nulla) è falsa (perchè è vera l'alternativa). Allora "male non respingo ipotesi falsa", cioè

$$\boxed{\text{Si commette un errore di seconda specie}}$$