Questo foglio si deve riconsegnare
piegato in 2 a raccogliere tutti i fogli di bella copia.
Questo testo deve essere costituito da un foglio
stampato fronte-retro con 6 quesiti in tutto.
Se manca qualcosa chiedere un'altra copia.

○ Sí, segno con una X questo circoletto perché sono uno studente di anni passati e desidero anche un esame orale.

La valutazione é complessiva. Tutti i quesiti valgono ugualmente.
Anche soluzioni parziali vengono valutate.
SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.
CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

Legenda
$*$ É richiesto il valore esatto. Puó anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ É richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

ES. 1$_{\mu 2018}$

$\approx$ Il punto e la virgola sono entrambi usati da alcuni come separatore delle migliaia, e da altri come separatore della parte intera dalle cifre decimali, ma spesso si riesce a capire quale dei significati ha il punto, o la virgola, dal contesto. Si considerino questi dati relativi a particelle ovvero corpuscoli, da considerare semplificatamente dischetti piani:

	PARTICELLE A	PARTICELLE B	PARTICELLE C
Diametro (nm)	987	12,140	92,500
Vita media (h)	14.5	56	122

Si ipotizzi una particella della stessa forma, che abbia un diametro ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C. Qual è l'area di questa particella, in nm^2 (che sono i nanometri quadrati)? Si esprima la soluzione usando lo spazietto per separare le migliaia e il punto decimale se ci sono decimali.

SVOLGIMENTO

La presenza del dato 14.5 ci indica che il punto non è usato come separatore delle migliaia ma come punto decimale; e invece la virgola è usata come separatore delle migliaia, in particolare nel diametro delle particelle C:

$$d = 92\,500\, nm$$

(qua meglio trascritto con lo spazietto invece della confondente virgola come spaziatore delle migliaia; ma purtroppo i testi tecnici e scientifici continuano a presentare queste problematiche e bisogna abituarsi ad affrontarle; per esempio si veda la tabella in
https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/).
Ora però dobbiamo occuparci dell'ipotetica particella col diametro d' ridotto di un quinto rispetto a quello delle particelle C

$$d' = d - \frac{1}{5}\, d = \frac{4}{5}\, d = \frac{4}{5}\, 92\,500\, nm =$$

$$= \frac{4 \cdot 92\,500}{5}\, nm = 74\,000\, nm$$

e allora raggio (la metà)

$$r = 37\,000\, nm$$

e ricordando che l'area del cerchio è πr^2 e che $\pi \approx 3.14$

$$\boxed{\approx 4\,298\,660\,000\, nm^2}$$

o in effetti, usando un'approssimazione di π più precisa,

$$\boxed{\approx 4\,298\,670\,000\, nm^2}$$

(ma in generale per π usiamo la semplice approssimazione 3.14).

ES. 2$_{\mu 2018}$

$*$ Supponiamo che di 116 individui, 73 hanno l'anticorpo VISα, e 53 l'anticorpo VISγ. Quanti hanno entrambi gli anticorpi?

SVOLGIMENTO

Sappiamo che per la numerosità ovvero cardinalità dell'insieme unione vale

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

cioè equivalentemente vale

$$\#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$$

e ora con

$A = \{\text{soggetti con VIS}\alpha\}$

$B = \{\text{soggetti con VIS}\gamma\}$

si ha

$$\text{numero di soggetti con entrambi gli anticorpi} =$$
$$= \#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B) =$$
$$= 73 + 53 - 116 =$$
$$\boxed{10}$$

ES. 3$_{\mu 2018}$

$*$ Supponiamo che in un tubo (per esempio della flebo) ovvero vaso (tubo anatomico) passi un liquido nella misura di

$$p(t) := |t| \, dl/h$$

nel tempo t fra -1 e 2 (h, ore, unità di tempo; quella negativa indica un tempo anteriore a un tempo detto 0; si può ipotizzare, per esempio, che lo 0 sia una certa mezzanotte, e allora stiamo considerando il tempo dalle 23 alle 2 di notte, in effetti del giorno successivo). Calcolare

$$\int_{-1}^{2} p(t) \, dt$$

che da un punto di vista fisico – ma non ce ne occuperemo – rappresenta la quantità totale di liquido fluito nel tempo considerato, e ha unità di misura dl, cioè decilitri, ma per semplicità si facciano i calcoli e si dia la soluzione senza unità di misura.

SVOLGIMENTO
Ricordando che

$$|x| := \begin{cases} x & se\, x \geq 0 \\ -x & se\, x < 0 \end{cases}$$

ora (eliminando le unità di misura)

$$\int_{-1}^{2} p(t)\, dt = \int_{-1}^{2} |t|\, dt =$$

per la Regola di Chasles

$$= \int_{-1}^{0} (-t)\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

per la linearità dell'integrale

$$= -\int_{-1}^{0} t\, dt + \int_{0}^{2} t\, dt =$$

ricordando la primitiva elementare $\int t\, dt = t^2/2 + c$

$$= \Big[-\frac{t^2}{2} \Big]_{-1}^{0} + \Big[\frac{t^2}{2} \Big]_{0}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2} =$$

esattamente

$$\boxed{2.5}$$

oppure anche validamente (ma in effetti meno bene, visto il significato fisico)

$$\boxed{\tfrac{5}{2}}$$

(Si tratta di due decilitri e mezzo, dal punto di vista fisico, molto meglio espressi – almeno come risultato finale – come 2.5 che $\frac{5}{2}$).
NOTA. Il calcolo $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$, che è proprio quello richiesto salvo il diverso nome della variabile, x e non t, era assegnato come esercizio su *Le 64 Pillole*.

ES. 4$_{\mu 2018}$
$* \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei

risultati di 2 dadi regolari a 8 facce numerate da 1 a 8? (Hanno la forma di ottaedro regolare).

SVOLGIMENTO

Dei 64 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6	3+7	3+8
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6	4+7	4+8
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6	5+7	5+8
6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6	6+7	6+8
7+1	7+2	7+3	7+4	7+5	7+6	7+7	7+8
8+1	8+2	8+3	8+4	8+5	7+6	8+7	8+8

con somme rispettive

02	03	04	05	06	07	08	09
03	04	05	06	07	08	09	10
04	05	06	07	08	09	10	11
05	06	07	08	09	10	11	12
06	07	08	09	10	11	12	13
07	08	09	10	11	12	13	14
08	09	10	11	12	13	14	15
09	10	11	12	13	14	15	16

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3, 5, 7, 11, 13) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16) rispettivamente

P	P	n	P	n	P	n	n
P	n	P	n	P	n	n	n
n	P	n	P	n	n	n	P
P	n	P	n	n	n	P	n
n	P	n	n	n	P	n	P
P	n	n	n	P	n	P	n
n	n	n	P	n	P	n	n
n	n	P	n	P	n	n	n

avendosi così 23 casi favorevoli su 64 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\, favorevoli}{\#\, casi\, possibili\, equiprobabili} =$$

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.359 = 35.9\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{23}{64} \approx 0.3594 = 35.94\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ES. 5$_{\mu 2018}$

$* \approx \%$ Si consideri un'entità biologica (come batteri, virus, corpuscoli sanguigni...) che quando si forma ha una vita (in giorni, interi) che è pari a 7 + una variabile aleatoria geometrica X di densità iniziante da 0 di parametro $\frac{1}{2}$. (Quindi può vivere 7 giorni, 8 giorni, 9 giorni... eccetera, con probabilità via via sempre più piccole).

Che probabilità ha di vivere un numero pari di giorni?

SVOLGIMENTO

$$P(\text{vive un numero pari di giorni}) = P(7+X \text{ è pari}) =$$

$$= P(X \text{ è dispari}) =$$

$$= P(X \text{ è 1 oppure 3 oppure 5 oppure 7...}) =$$

più formalmente

$$= P(X = 1 \vee X = 3 \vee X = 5 \vee X = 7 \vee ...) =$$

e trattandosi di eventi disgiunti

$$= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + ... =$$

ricordando la densità $p_k = p\,(1-p)^k$ per $k = 0, 1, 2...$ della variabile aleatoria geometrica di parametro p iniziante da 0, nel nostro caso $\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})^k$,

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$$

dove si riconosce la serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ (perchè ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$)

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...ar^n + ...$$

con anche $a = \frac{1}{4}$ e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$\boxed{\tfrac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{1}{3} \approx 0.3333 = 33.33\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

ES. 6$_{\mu 2018}$

$*$ Per il campione gaussiano di varianza 3.61 (che potrebbe essere costituito per esempio dai pesi in grammi di animali da laboratorio di una certa fissata età o di semi o frutti di interesse fitoterapico, se per essi è supposta nota la varianza in base a ricerche precedenti)

7.63 12.22 8.74 7.95 13.43 8.15 9.22 8.14 7.04 9.56

si determini l'intervallo di fiducia consueto (bilatero, centrato) con $\alpha = 0.05$, nella forma $[a, b]$.

SVOLGIMENTO

Ricordando la formula

$$\bar{X}_n \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (\alpha = 0.05)$$

ora con $n = 10$ e $\sigma^2 = 3.61$ e allora $\sigma = 1.9$ si ha

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{1.9}{\sqrt{10}} \approx 1.178$$

e la media

$$\bar{X}_{10} = \frac{1}{10}(x_1 + ... + x_{10}) = 9.208$$

e in definitiva si trova l'intervallo di fiducia 9.208 ± 1.178 $(\alpha = 0.05)$ o piuttosto, senza decimali qua veramente poco significativi, 9.21 ± 1.18 (e qualcuno direbbe perfino 9.2 ± 1.2) che scritto nella forma $[a, b]$ richiesta è infine

$$\boxed{[8.03, 10.39] \qquad (\alpha = 0.05)}$$