Questo foglio si deve riconsegnare
piegato in 2 a raccogliere tutti i fogli di bella copia.
Questo testo deve essere costituito da un foglio
stampato fronte-retro con 6 quesiti in tutto.
Se manca qualcosa chiedere un'altra copia.

○ **Sì, segno con una X questo circoletto perché sono uno studente di anni passati e desidero anche un esame orale.**

La valutazione è complessiva.
Tutti i quesiti valgono ugualmente.
Anche soluzioni parziali vengono valutate.
SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.
CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

Legenda
$*$ È richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ È richiesta una ragionevole approssimazione.
% È richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

MATEMATICHE ELEMENTARI

ES. 1 $*$ Si risolva la seguente disequazione:

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8}$$

SVOLGIMENTO

Essendoci una radice quadrata, cercheremo di ricondurci al caso "radice maggiore" oppure al caso "radice minore", e in effetti in questo caso

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8} \quad \Big/ + (-\mathrm{e})$$

$$x - \mathrm{e} > \sqrt{x^2 - 8}$$

$$\sqrt{x^2-8} < x - \mathrm{e}$$

proprio al caso “radice minore”, e allora la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2-8 \geq 0 \\ x-\mathrm{e} > 0 \\ x^2-8 < (x-\mathrm{e})^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{8} \vee x \geq \sqrt{8} \\ x > \mathrm{e} \\ x^2-8 < x^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -2\sqrt{2} \vee x \geq 2\sqrt{2} \approx 2.82 \\ x > \mathrm{e} \approx 2.718 \text{ che sappiamo a memoria} \\ 2\,\mathrm{e}\,x < \mathrm{e}^2+8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \approx 2.831 \text{ con la calcolatrice dal soprastante} \end{cases}$$

e mettendo in ordine crescente i capisaldi (ovvero valori delimitanti) trovati

........$-2\sqrt{2}$.........e..........$2\sqrt{2}$.........$\frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}$..........
.............|............|............|..............|............ schema d'intersezione
∼∼∼∼∼ − − − − − − − −− ∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼
− − − − − − − −− ∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼ $\cap$
∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼ − − −−

otteniamo il soprastante schema d'intersezione che ci dà la soluzione

$$\boxed{2\sqrt{2} \leq x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}}$$

ES. 2 In relazione all'elemento sodio (Na), definite le cellule
ipo-sodiche: con contenuto di sodio fra 0 e < 1 000 unità
normo-sodiche: con contenuto di sodio fra 1 000 e < 10 000 unità
iper-sodiche: con contenuto di sodio fra 10 000 e < 20 000 unità
(unità che non specifichiamo, essendo ininfluente) un macchinario esamina 52 000 cellule (tutti numeri arrotondati per semplicità) trovandovi
6 000 ipo-sodiche, 36 000 normo-sodiche, 10 000 iper-sodiche.
Rappresentare la situazione con un istogramma. (Non è il bar chart).

SVOLGIMENTO

Nell'istogramma le grandezze sono proporzionali alle aree dei rettangoli (invece nel bar chart, che alcuni Autori chiamano comunque istogramma – ma qua veniamo avvertiti della differenza – alle lunghezze delle aste, eventualmente strisce rettangolari).

Avremo quindi 3 rettangoli, con basi che si estendono su un asse orizzontale

da 0 a 1000 lunga 1 000

da 1 000 a 10 000 lunga 9 000

da 10 000 a 20 000 lunga 10 000.

(Non vi è alcuna questione problematica fra valori compresi o esclusi).

Le altezze le otteniamo dividendo le aree

6 000, 36 000, 10 000 (o numeri ad essi rispettivamente proporzionali)

per le lunghezze delle basi corrispondenti, ottenendo:

6 unità

4 unità

1 unità

Come unità si può prendere per esempio 1 centimetro, o su carta a quadretti 1 o 2 quadretti, o anche altre unità.

Ecco l'istogramma, coi 3 rettangoli ed una legenda:

```
A--------------------
A-------------------- A=ipo-sodiche, 6000
ABBBBBBBBB----------- B=normo-sodiche, 36000
ABBBBBBBBB----------- C=iper-sodiche, 10000
ABBBBBBBBB-----------
ABBBBBBBBBCCCCCCCCCCC
!!-------!----------!
0 1000   10000      20000
```

CALCOLO INFINITESIMALE

ES. 3 ∗ Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\mathrm{e}^x}{\arctan x + \frac{1}{\ln|x|}}$$

SVOLGIMENTO

Per $x \to -\infty$ si hanno questi limiti:

$\mathrm{e}^x \to 0$ e allora (limite della somma nel caso finito)

$2 + e^x \to 2$
$\arctan x \to -\frac{\pi}{2}$
$|x| \to +\infty$ e allora (limite di ln a $+\infty$)
$\ln|x| \to +\infty$ e allora (limite della reciproca d'infinita)
$\frac{1}{\ln|x|} \to 0$

e allora (limite della somma nel caso finito)
$\arctan x + \frac{1}{\ln|x|} \to -\frac{\pi}{2}$

e allora (limite del quoziente nel caso finito con denominatore che non tende a 0) il limite vale

$$\frac{2}{-\frac{\pi}{2}}$$

e in conclusione

$$\boxed{-\frac{4}{\pi}}$$

(Che vale ≈ -1.27, avendo ricordato che $\pi \approx 3.14$, ma non era richiesto).

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

ES. 4 $* \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità 7%. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probabilità c'è che andando 4 volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso?

SVOLGIMENTO

$$P(punto\ al\ 1^\wedge\ viaggio) = ... = P(punto\ al\ 4^\wedge\ viaggio) = 7\% = \frac{7}{100}$$

Evento complementare:

$$P(non\ punto\ al\ 1^\wedge\ viaggio) = ... = P(non\ punto\ al\ 4^\wedge\ viaggio) = 93\% = \frac{93}{100}$$

Evento composto:

$$P(mai\ punto\ nei\ 4\ viaggi) = \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} = \left(\frac{93}{100}\right)^4$$

Evento complementare:

$$P(\textit{punto almeno}\ 1\ \textit{volta nei}\ 4\ \textit{viaggi}) = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{93^4}{100^4} = 1 - \frac{74\,805\,201}{100\,000\,000} = \frac{100\,000\,000 - 74\,805\,201}{100\,000\,000} =$$

$$\boxed{\tfrac{25\,194\,799}{100\,000\,000} \approx 0.252 = 25.2\%}$$

(Qualche piccola calcolatrice potrebbe non riuscire a calcolare $100\,000\,000 - 74\,805\,201$ perchè il primo numero ha 9 cifre, ma il calcolo si fa facilmente a mano. Qualche piccola calcolatrice potrebbe non riuscire a calcolare 93^4, che ha 8 cifre, e allora o si calcola 93^3, che ha 6 cifre, e si moltiplica a mano per 93, oppure si dà come soluzione esatta $1 - (\frac{93}{100})^4$, e per calcolare il valore decimale approssimato, e quello percentuale, con la calcolatrice si eleva alla 4 (con moltiplicazioni successive) 0.93, cioè $\frac{93}{100}$, trovando $\approx 0.252 = 25.2\%$).

ES. 5 $\approx$ % Un certo parametro fisiologico sia (approssimativamente, ovvio) variabile aleatoria X normale con media 60 e varianza 25 (numeri puri, oppure anche con opportune unità di misura qua omesse per semplicità). (Si può immaginare che sia il numero di battiti cardiaci al minuto per una qualche specie di animale). Si consideri la variabile aleatoria $Z := \frac{X-60}{5}$. Che probabilità c'è che $2Z \leq -3.92$?

SVOLGIMENTO

Essendo $\mu = 60$ e $\sigma^2 = 25$ e $\sigma = 5$, la $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ è variabile aleatoria normale standard (standardizzazione di X normale).
Naturalmente $2Z \leq -3.92$ equivale a $Z \leq -1.96$, e allora

$$P(2Z \leq -3.92) = P(Z \leq -1.96) =$$

essendo Z variabile aleatoria normale standard

$$= \phi(-1.96) =$$

per la formula di simmetria $\phi(1 - x) = 1 - \phi(x)$

$$= 1 - \phi(1.96) \approx$$

ricordando il valore classico $\phi(1.96) \approx 0.975$

$$\boxed{\approx 0.025 = 2.5\%}$$

(È stato facile risolvere il quesito perchè si è presentato il valore $\phi(1.96)$ che si sa a memoria; se l'argomento x di ϕ fosse stato diverso da 1.96 il problema si poteva risolvere con le tavole dei quantili normali, oppure online su wolframalpha con l'istruzione `CDF[NormalDistribution[0,1],`$_{valore\ di\ x}$`]` o con vari software come per esempio wxMaxima (gratuito) o Mathematica$^{(R)}$, o anche con calcolatrici particolarmente avanzate).

STATISTICA INFERENZIALE

ES. 6 $*$ Per una variabile aleatoria uniforme $\mathbb{U}[q, 3\,q]$ si trovi lo stimatore dei momenti del parametro q, producendo la stima relativa a questo campione:

12.9 8.66 5.0 5.06 6.33 6.7 12.76 13.1 8.18 5.09 14.23 14.52

SVOLGIMENTO

La speranza matematica è la semisomma degli estremi dell'intervallo

$$E(X) = \frac{q + 3\,q}{2} = 2\,q$$

che uguagliamo alla media campionaria (o empirica) ottenendo l'equazione

$$2\,q =^{EQ} \bar{X}_n$$

da cui lo stimatore $\hat{q}$ di q è la metà della media campionaria

$$\hat{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

che applicato al nostro dataset con gli $n = 12$ numeri ci dà

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{12.9 + 8.66 + 5.0 + 5.06 + 6.33 + 6.7 + 12.76 + 13.1 + 8.18 + 5.09 + 14.23 + 14.52}{12}$$

$$\boxed{\approx 4.69}$$

(Il vero valore q usato per produrre quei numeri casuali era 5, cioé i numeri erano generati come pseudocasuali in $[5, 15]$, con un'istruzione del tipo

```
for i:1 while i<13 do print(float(5+round(random(10))));
```

del software di manipolazione simbolica wxMaxima, che somma – per 12 volte – a 5 un numero pseudocasuale fra 0 e 10, ma in effetti è stata usata una un po' più complicata per avere numeri con al massimo 2 cifre decimali).

REGOLAMENTO DI QUESTO ESAME – Questo foglio resta allo studente

All'esame scritto non è permesso usare il telefono cellulare né alcuna strumentazione elettronica avanzata. Neppure calcolatrici programmabili, in cui si potrebbero memorizzare formule e procedimenti che invece bisogna conoscere. (Altrimenti l'esame potrebbe diventare una gara a chi meglio sa ingannare, o può ingannare con costosi dispositivi). Bisogna invece portare una semplice calcolatrice non programmabile con le 4 operazioni (dalla somma alla divisione) e anche la radice quadrata, ma *non* logaritmi, esponenziali, media, varianza, eccetera. (Si intende che della varianza bisogna sapere la formula e capire il significato, non schiacciare un tasto). Chi sarà sprovvisto di calcolatrice verrà comunque ammesso all'esame ma non è permesso passarsi calcolatrici durante l'esame, e allora conviene portarne una. Si può portare un semplice orologio, ma, ripetiamo, non si può usare il telefono cellulare, che deve rigorosamente restare SPENTO nello zainetto o borsa.

Il compito si consegna entro un'ora e mezza dall'inizio dell'esame.

Si possono richiedere fogli di carta aggiuntivi, per brutta copia o bella copia, ma non si possono assolutamente usare fogli propri.

I fogli vanno consegnati raccolti nel foglio dei quesiti piegato in due.

Non usare penne rosse né bianchetto.

SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.

$\boxed{\text{RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI}}$

Si può cancellare errori o tentativi non riusciti sovrapponendovi una rigatura, più o meno fitta, senza preoccupazioni "estetiche", lasciando solo la versione definitiva ovvero bella copia.

Non consegnare assolutamente la brutta copia; per ogni quesito deve esserci una sola risposta, da considerare "bella copia", non si può "tentare" o "partecipare" con più versioni, sperando che qualcuna vada bene.

Il testo del compito e sperabilmente anche i risultati e magari anche gli svolgimenti verranno messi su internet.

In ogni momento della prova scritta d'esame ci si può ritirare consegnando solo il testo del compito con sovrascritta una grande R (come "Ritirato").

Anche soluzioni parziali saranno valutate. **La valutazione è complessiva**. Tutti i quesiti valgono ugualmente per la valutazione.

Sul testo del compito d'esame troverete scritto: ○ **Sì, segno con una X questo circoletto perché sono uno studente di anni passati e desidero anche un esame orale.**

Perché questa scritta? Perché gli studenti di anni precedenti a questo attuale – che comunque devono fare questo esame scritto come tutti – possono chiedere (segnando il circoletto) prolungamento orale dell'esame, se ritengono che gli argomenti trattati nel loro anno non fossero sufficienti per risolvere qualche esercizio di questo esame scritto; in quel caso concorderemo un esame orale a cui verranno col programma del loro anno, stampato su carta, e possibilmente anche gli appunti, ed esamineremo le differenze relativamente ai quesiti di questo esame.

Entro martedì $\leftarrow_{\textit{giorno valido per questo esame}}$ alle 18:00 dovrebbero essere pubblicati i punteggi (voti) sulla pagina web del docente; sono voti provvisori, non sono ancora registrati.

Entro le 12 del giorno seguente, mezzogiorno, ci si può ancora ritirare (verosimilmente per rifare meglio) con email.

La sera stessa di quel giorno, i voti positivi (cioé maggiori o uguali a 18) verranno registrati (e diventano definitivi), e i voti negativi "scompaiono".

Se si scrive al docente bisogna farlo dall'account istituzionale, cioé dall'email che l'università fornisce ad ogni studente.

$*$ È richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ È richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ È richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.