

**Questo foglio si deve riconsegnare
piegato in 2 a raccogliere tutti i fogli di bella copia.**

Questo testo deve essere costituito da un foglio
stampato fronte-retro con 6 quesiti in tutto.
Se manca qualcosa chiedere un'altra copia.

- **Sí, segno con una X questo circoletto perché sono uno studente di anni passati e desidero anche un esame orale.**

La valutazione é complessiva.

Tutti i quesiti valgono ugualmente.

Anche soluzioni parziali vengono valutate.

SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.

CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

Legenda

* É richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

\approx É richiesta una ragionevole approssimazione.

% É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

MATEMATICHE ELEMENTARI

ES. 1 * Una certa terapia verrà supportata da un governo se (e solo se)
é molto efficace e costa molto

OPPURE se

é solo abbastanza efficace e non costa molto.

(Supponendo in qualche modo determinati i significati precisi dei termini).

Con ovvio significato dei simboli

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q).$$

Nel caso specifico di una terapia che sia solo abbastanza efficace e costi molto
si attribuiscono i valori di verità V o F a p , q , r , e si valuti di passaggio in pas-
saggio fino al risultato finale il valore di verità dell'espressione soprascritta,
concludendo se la terapia verrà supportata o no.

(Ragionamenti analoghi e più complessi possono venire gestiti da software).

SVOLGIMENTO

Si hanno queste 3 proposizioni, coi loro valori di verità nel caso specifico:

F p = “la terapia é molto efficace”

V q = “la terapia costa molto”

V r = “la terapia é solo abbastanza efficace”

Sostituendo nell’espressione i valori di verità, si ha quindi successivamente

$$(F \wedge V) \vee (V \wedge \neg V)$$

$$F \vee (V \wedge F)$$

$$F \vee F$$

F (falso)

La terapia non verrà supportata

ES. 2 * Considerato il seguente dataset

19.68 19.20 19.63 18.94 18.81 18.10 18.63 18.85 0.01 19.51 19.54

che possiamo supporre misurazioni di parametri corporei, si determini la mediana dopo avere eliminato un outlier.

SVOLGIMENTO

Chiaramente 0.01 é l’outlier preannunciato. (Potrebbe ragionevolmente provenire da un momentaneo malfunzionamento di una macchina che ha prodotto i dati).

I 10 dati rimanenti riordinati in modo crescente sono

18.10 18.63 18.81 18.85 18.94 19.20 19.51 19.54 19.63 19.68.

I 2 centrali ovvero mediani sono il 5° e il 6°, eliminando 4 da ogni parte:

18.94 19.20

la cui media aritmetica é il risultato cercato:

19.07

(Se non si eliminasse l'outlier – talvolta non é poi cosí evidente che qualche valore vada scartato – la mediana sarebbe alquanto simile, 18.94, mentre nei 2 casi le medie aritmetiche sono molto piú diverse fra loro, rispettivamente 19.089 e 17.3536; la mediana ha il pregio di risentire poco degli outlier, il che in casi complessi con migliaia o milioni di dati, e magari nessuna certezza su quanti e quali sarebbero da considerare outlier, é molto significativo).

CALCOLO INFINITESIMALE

ES. 3 * Calcolare

$$\int(\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

SVOLGIMENTO

PRIMO MODO, in qualche modo piú difficile del seguente:

$$\int(\cos^2 x - \sin^2 x) dx =$$

per la linearitá dell'integrale

$$\begin{aligned} & \int \cos^2 x dx - \int \sin^2 x dx = \\ & = \int (\cos x)(\cos x) dx - \int \sin^2 x dx = \end{aligned}$$

per parti sul primo integrale

$$\begin{aligned} & = (\sin x)(\cos x) - \int (\sin x)(-\sin x) dx - \int \sin^2 x dx = \\ & = (\sin x)(\cos x) - \int (-\sin^2 x) dx - \int \sin^2 x dx = \end{aligned}$$

per la linearitá dell'integrale

$$= (\sin x)(\cos x) + \int \sin^2 x dx - \int \sin^2 x dx =$$

elidendo i termini opposti e aggiungendo la costante d'integrazione

$\sin x \cos x + c$

SECONDO MODOe:

$$\int(\cos^2 x - \sin^2 x) dx =$$

per la formula di duplicazione del coseno

$$= \int \cos(2x) dx = (\star)$$

che si capisce subito essere

$$\boxed{\frac{1}{2} \sin(2x) + c}$$

la cui derivata é appunto la funzione integranda $\cos(2x)$.

E che nonostante l'apparenza diversa é del tutto equivalente alla soluzione trovata col primo modo, per la formula di duplicazione del seno: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Oppure, se non si riconosce subito l'integrale, si fa con la formula di integrazione per sostituzione $t := mx + q$

$$\int f(mx + q) dx = \frac{1}{m} \left(\int f(t) dt \right)_{t=mx+q}$$

con $m := 2$ e $q := 0$ cosí che $t = 2x$, e riprendendo il calcolo da sopra

$$\begin{aligned} (\star) &= \frac{1}{2} \left(\int \cos(t) dt \right)_{t=2x+0} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin(t) \right)_{t=2x} + c \end{aligned}$$

e sostituendo appunto $2x$ al posto di t si ottiene come prima $\frac{1}{2} \sin(2x) + c$.

CALCOLO DELLE PROBABILITÁ

ES. 4 * \approx % Per una variabile aleatoria geometrica Z iniziante da 1 di parametro $\frac{1}{4}$ calcolare

$$P(Z > 2).$$

SVOLGIMENTO

$$P(Z > 2) =$$

con l'evento complementare, che ci evita il calcolo della somma di una serie,

$$= 1 - P(Z \leq 2) =$$

la Z é geometrica iniziante da 1, e solo 1 e 2 sono i possibili valori ≤ 2

$$= 1 - P(Z = 1 \vee Z = 2) =$$

la probabilità dell'unione di eventi disgiunti é la somma delle probabilità

$$= 1 - (P(Z = 1) + P(Z = 2)) =$$

con la notazione consueta per la densità geometrica iniziante da 1

$$= 1 - (p_1 + p_2) =$$

e ricordando la formula della densità considerata $p_k = p(1-p)^{k-1}$, con $p = \frac{1}{4}$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1-1} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2-1} =$$

e con semplici calcoli aritmetici

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^0 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16 - 4 - 3}{16}$$

e in conclusione

$$\frac{9}{16} \approx 0.5625 = 56.25\%$$

o con minore ma comunque accettabile precisione

$$\frac{9}{16} \approx 0.563 = 56.3\%$$

ES. 5 \approx % Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	25	3
NEGATIVI	7	54

Calcolare la specificità del test.

SVOLGIMENTO

Per definizione di specificità, “*veri negativi / totale sani*”,

$$Sp = \frac{V_-}{V_- + F_+} = \frac{54}{54 + 3} = \frac{54}{57} \approx 0.9473$$

$$\approx 0.947 = 94.7\%$$

STATISTICA INFERENZIALE

ES. 6 * Supponiamo che per un test statistico, con ipotesi (nulla) H , e alternativa A vera, al livello $\alpha = 0.1$, la regione critica sia $T > 734.66$ e il calcolo dello stimatore del test dia $T = g(x_1, \dots, x_n) = 786.45$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- Si commette un errore di prima specie
- Era il caso in generale sperato
- Si commette un errore di seconda specie
- Si è sostanzialmente perso tempo
- Non ha senso perché α deve essere ≤ 0.05 ossia 5%.

SVOLGIMENTO

Lo stimatore cade nella regione critica, perché $786.45 > 734.66$, e allora l'ipotesi viene respinta, ed essa è falsa perché l'alternativa è vera. Siamo nel caso “*bene respingo ipotesi falsa*” che, come è ben noto, per i test statistici

Era il caso in generale sperato

REGOLAMENTO DI QUESTO ESAME – Questo foglio resta allo studente

All'esame scritto non é permesso usare il telefono cellulare né alcuna strumentazione elettronica avanzata. Neppure calcolatrici programmabili, in cui si potrebbero memorizzare formule e procedimenti che invece bisogna conoscere. (Altrimenti l'esame potrebbe diventare una gara a chi meglio sa ingannare, o può ingannare con costosi dispositivi). Bisogna invece portare una semplice calcolatrice non programmabile con le 4 operazioni (dalla somma alla divisione) e anche la radice quadrata, ma *non* logaritmi, esponenziali, media, varianza, eccetera. (Si intende che della varianza bisogna sapere la formula e capire il significato, non schiacciare un tasto). Chi sarà sprovvisto di calcolatrice verrà comunque ammesso all'esame ma non é permesso passarsi calcolatrici durante l'esame, e allora conviene portarne una. Si può portare un semplice orologio, ma, ripetiamo, non si può usare il telefono cellulare, che deve rigorosamente restare SPENTO nello zainetto o borsa.

Il compito si consegna entro un'ora e mezza dall'inizio dell'esame.

Si possono richiedere fogli di carta aggiuntivi, per brutta copia o bella copia, ma non si possono assolutamente usare fogli propri.

I fogli vanno consegnati raccolti nel foglio dei quesiti piegato in due.

Non usare penne rosse né bianchetto.

SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Si può cancellare errori o tentativi non riusciti sovrapponendovi una rigatura, più o meno fitta, senza preoccupazioni “estetiche”, lasciando solo la versione definitiva ovvero bella copia.

Non consegnare assolutamente la brutta copia; per ogni quesito deve esserci una sola risposta, da considerare “bella copia”, non si può “tentare” o “partecipare” con più versioni, sperando che qualcuna vada bene.

