Questo foglio si deve riconsegnare
piegato in 2 a raccogliere tutti i fogli di bella copia.
Questo testo deve essere costituito da un foglio
stampato fronte-retro con 6 quesiti in tutto.
Se manca qualcosa chiedere un'altra copia.

○ **Sí, segno con una X questo circoletto perché sono uno studente**
di anni passati e desidero anche un esame orale.

La valutazione é complessiva.
Tutti i quesiti valgono ugualmente.
Anche soluzioni parziali vengono valutate.
SCRIVERE I CALCOLI OVVERO PASSAGGI.
CONSEGNARE SOLO LA BELLA COPIA, non diverse versioni.

Legenda
$*$ É richiesto il valore esatto. In certi casi puó essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ É richiesta una ragionevole approssimazione.
$^{\%}$ É richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

MATEMATICHE ELEMENTARI

ES. 1_{μ}

$*$ Per le seguenti proposizioni, ciascuna vera (V) o falsa (F),
$p :=$"$\tan 0 = 0$"
$q :=$"$\cos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$"
$r :=$"$\arccos(-1) = \pi$"
si valuti di passaggio in passaggio fino al risultato finale il valore di veritá di

$$\neg((p \wedge \neg q) \wedge (p\, aut\, r))$$

SVOLGIMENTO
Si osserva che
V p é vera (valore classico)
F q é falsa ($\frac{\pi}{3}$ é > 1 e allora non é coseno di alcun numero)
V r é vera (valore classico)
Si ha allora l'espressione logica

$$\neg((V \wedge \neg F) \wedge (V \; aut \; V))$$

$$\neg((V \wedge V) \wedge F)$$

$$\neg(V \wedge F)$$

$$\neg F$$

$$\boxed{V}$$

ES. 2$_{\mu}$
$*$ Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

SVOLGIMENTO
Prima di tutto osserviamo che dev'essere

$$\underline{x > 0}$$

perché x é argomento di un logaritmo. (Ovviamente $1 + x^2 > 0$ sempre). Ricordando le $\log_b u + \log_b v = \log_b(u\,v)$ e $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$ e $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \qquad \Big/ 10^{\wedge}$$

$$\frac{200\,x}{1 + x^2} = 100 \qquad \Big/ \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2\,x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che é > 0).

CALCOLO INFINITESIMALE

ES. 3_{μ}

$*$ Trovare il minimo di

$$\frac{1}{u}+\frac{u^2}{2}$$

per $u > 0$.

SVOLGIMENTO

Detta $f(u)$ la funzione considerata risolviamo in $]0,+\infty[$ la disequazione $f'(u)>0$

$$f'(u) = -\frac{1}{u^2}+u = \frac{-1+u^3}{u^2} >^{DISEQ} 0$$

e la disequazione equivale per $u > 0$ a

$$-1+u^3 > 0$$

$$u^3 > 1$$

$$u > 1$$

da cui lo schema di crescenza e decrescenza, limitatamente a $]0,+\infty[$,

```
* * * * *| - - - - - | + + + + +
```
$\quad\nexists \quad 0 \quad \searrow \quad 1 \quad \nearrow$

allora 1 é unico punto di minimo relativo per $u > 0$ e allora anche assoluto, e allora il minimo assoluto della funzione per $u > 0$ é

$$f(1) = \frac{1}{1}+\frac{1}{2} =$$

$$\boxed{\tfrac{3}{2}}$$

o anche

$$\boxed{1.5}$$

Anche se non serve per rispondere al quesito, diamo un (disegno del) grafico di $f(u)$, in una forma molto approssimativa.

```
..%...........y ↑..%..........%..........
..%.............|..%.........%...........
...%............|...%.......%............
....%...........|.....%....%.............
......%........3/2|.......%%...............
........%.......|........................
..........%.....|........................
...........%....|........................
-----------%---|--------1-------------→ u
.............%..|........................
..............%.|........................
..............%.|........................
```
(Si noti che la funzione non ha minimo sul suo dominio).

CALCOLO DELLE PROBABILITÁ

ES. 4$_\mu$

$*$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in metropolitana, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di entrare in contatto coi pidocchi, con probabilitá p. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probablitá c'é che in 10 viaggi in metropolitana – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona sia entrata in contatto coi pidocchi?

SVOLGIMENTO

$$P(contatto\,nel\;1^\wedge\;viaggio) = ... = P(contatto\,nel\;10^\wedge\;viaggio) = p$$

Evento complementare:

$$P(non\,contatto\,nel\,1^\wedge\,viaggio) = ... = P(non\,contatto\,nel\,10^\wedge\,viaggio) = 1-p$$

Evento composto:

$$P(nessun\;contatto) = (1-p)\cdot ... \cdot(1-p) = (1-p)^{10}$$

Evento complementare:

$$\boxed{P(almeno\;un\;contatto) = 1-(1-p)^{10}}$$

ES. 5$_\mu$

$\approx$ % Un certo parametro fisico Y sia variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2. Si consideri $X := \frac{Y-\mu}{\sigma}$. Che probabilitá c'é che $3X \leq 5.88$?

SVOLGIMENTO

É $3X \leq 5.88 \Leftrightarrow X \leq 1.96$, é la stessa cosa, e allora

$$P(3X \leq 5.88) = P(X \leq 1.96) =$$

essendo $X := \frac{Y-\mu}{\sigma}$ variabile aleatoria normale standard

$$= \phi(1.96) \approx$$

ricordando quel valore classico di ϕ

$$\boxed{\approx 0.975 = 97.5\%}$$

STATISTICA INFERENZIALE

ES. 6 $*$ Si consideri un tetraedro con le facce numerate da 1 a 4, che viene lanciato 100 volte ottenendo questi risultati:

1.. 2.. 3.. 4

27 38 17 18

Si consideri col test del χ^2 al livello 0.01 l'ipotesi che le facce abbiano probabilitá rispettive $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.

Come é noto, una certa varietá di notazioni é usata nell'esprimere i quantili e quindi le tavole di essi, con possibili ambiguitá; comunque, per risolvere ogni incertezza fra α e $1-\alpha$ (e si escludano a priori altre possibili ambiguitá) si sappia che il quantile necessario per risolvere il problema é presente nella seguente tavola.

n	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
1	2.706	3.841	5.412	6.635	7.879	9.550	10.828
2	4.605	5.991	7.824	9.210	10.597	12.429	13.816
3	6.251	7.815	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	7.779	9.488	11.668	13.277	14.860	16.924	18.467
5	9.236	11.070	13.388	15.086	16.750	18.907	20.515

SVOLGIMENTO

Con $k = 4$ e allora $k-1 = 3$, e $\alpha = 0.01$ e $1-\alpha = 0.99$, ci serve per il test del chi quadrato il quantile $\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{0.99}(3)$. Nella tabella non troviamo

0.01 ma troviamo 0.99 e allora, evitata ogni ambiguitá notazionale, in quella colonna troviamo $\chi^2_{0.99}(3) \approx 11.345$ che useremo.
Per l'ipotesi H: $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{10}$, $p_3 = \frac{1}{4}$, $p_4 = \frac{1}{5}$, é $p_i\, n_i \geq \frac{1}{5} \cdot 100 = 20$ che é ben maggiore di 5.
É $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25$, $\frac{3}{10} \cdot 100 = 30$, $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25$, $\frac{1}{5} \cdot 100 = 20$, cioé i valori attesi sono 25, 30, 25, 20.

$$T = \frac{(27-25)^2}{25} + \frac{(38-30)^2}{30} + \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(18-20)^2}{20} =$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{64}{30} + \frac{64}{25} + \frac{1}{5} = \frac{6 \cdot 4 + 5 \cdot 64 + 6 \cdot 64 + 30 \cdot 1}{150} =$$

$$= \frac{758}{150} \approx 5.1 < 11.345 \approx \chi^2_{0.99}(3)$$

e allora

$$\boxed{\text{l'ipotesi non é respinta al ivello 0.01}}$$