Piano Cartesiano, Triangoli e Funzioni Trigonometriche

Alessandro Soranzo

Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Università degli Studi di Trieste

ver. 13 settembre 2021

Nota 0. SI PREGA DI AVVERTIRE L'AUTORE DI OGNI ERRORE ANCHE SE MINUSCOLO, GRAZIE!

Nota 1. Il testo è ipertestuale, con link interni e link alla rete.

Nota 2. Attualmente la separazione della parole in fine riga, fatta automaticamente dall'editor di testo, non corrisponde sempre alla grammatica italiana (ma in questa frase sì).

Nota 3. Sono usati entrambi gli standard del punto decimale, $\pi \approx 3.14$, e della virgola decimale, $\pi \approx 3{,}14$, come di fatto si troverà nella pratica, per quanto assurdo possa sembrare: **attenzione!**

Nota 4. Nella simbologia ci si è attenuti in generale allo standard ISO 80000-2:2009([1]), per esempio tan e non tang nè tg per la funzione tangente.

[1] Si veda per esempio https://ja.wikipedia.org/wiki/ISO_80000-2

Legenda. Per esprimere i risultati degli esercizi valgono questi simboli:

$\ast$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.

$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.

% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato

Argomenti trattati

Cenni di geometria euclidea nel piano. Rette parallele, rette orientate, segmenti, semirette. Area del cerchio; lunghezza del circolo; pi greco. Triangoli. Congruenza. Similitudine. Teoremi di Euclide e Pitagora. Piano cartesiano; punti; scatterplot. Equazioni della retta nel piano cartesiano: verticale, orizzontale, obliqua in forma esplicita, retta qualunque in forma implicita. Equazioni e disequazioni di primo grado. Il sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite nel caso del determinante non nullo. Condizioni di parallelismo e di ortogonalità di 2 rette. Distanza tra due punti e punto-retta. Cenni sulle coniche: ellisse con definizione geometrica ed equazione canonica, iperboli con equazioni canoniche, parabola con definizione geometrica ed equazione. Equazione del circolo di centro e raggio arbitrari. Equazione della parabola con asse verticale, e sue relazioni con discriminante e soluzioni dell'equazione di secondo grado; la sezione aurea; la successione di Fibonacci. Area del segmento parabolico. Grafici come particolari insiemi di punti del piano. Grafico del valore assoluto; errore assoluto e relativo. Cenno al folium di Cartesio. Angoli e loro misura in gradi e radianti, e loro proporzione; angoli notevoli. Le funzioni seno, coseno e tangente: periodicità, simmetrie, grafici. Valori notevoli, in relazione al triangolo equilatero di lato 1, al quadrato di lato $\sqrt{2}$, all'esagono regolare di lato 1. Principali formule: di somma e sottrazione, duplicazione, prostaferesi, bisezione per la angente, formule parametriche razionali per seno e coseno; identità goniometrica fondamentale. Teorema dei Seni, e del Coseno. Alcune semplici equazioni e disequazioni goniometriche. Le funzioni arcsin, arccos, arctan: definizioni, grafici, nota sull'ambiguità dell'esponente -1.

Contents

1 Il piano euclideo

1.1 Retta, cerchio e altre figure, e misura in radianti

Consideremo *concetti primitivi* il *punto* e anche:
la *retta*, che viene divisa in 2 *semirette* da 1 punto *origine*;
la *retta orientata*, dove i punti si *precedono* o *seguono* fra loro;
il *piano (euclideo)*; che una retta *origine* divide in 2 *semipiani*;
il *segmento* di *estremi* 2 punti e *lunghezza* la loro distanza;
per semplicità di trattazione, anche la *curva*.

Dati un punto P e numero $r > 0$, l'insieme dei punti che hanno distanza r da C si chiama *circolo* – da altri detto *cerchio* – di centro P e raggio r, e *cerchio* l'insieme dei punti che hanno distanza $\leq r$ da C (cioè il "cerchio pieno" per cosí dire). Un segmento nel cerchio lungo $2r$ è un *diametro* . Un diametro divide il cerchio in 2 *semicerchi*. Due semirette diverse con stessa origine P dividono il piano in 2 *angoli* di *vertice* P. Se essi sono uguali si dicono *piatti*. Se uno è "minore" dell'altro si dice *convesso* e l'altro *concavo*. Due rette del piano con intersezione vuota le diremo *parallele*. Se l'intersezione ha esattamente 1 punto si dicono *incidenti*. Se l'intersezione coincide con le rette stesse, si tratta di 2 rette *coincidenti* (talvolta dette *parallele coincidenti*): in effetti è 1 sola retta considerata 2 volte. Due rette incidenti possono formare 4 angoli uguali che si dicono *retti*, e le rette si dicono *ortogonali* o *perpendicolari*. Angoli "minori" di un angolo retto si chiamano *acuti* e angoli "maggiori" di un angolo retto e "minori" di un angolo piatto si dicono *ottusi*. L'intersezione di un angolo di vertice P con un circolo di centro P è un *arco di circolo*, di cui si suppone nota come concetto primitivo la nozione di *lunghezza*. Se il raggio del circolo è 1 quella lunghezza si chiama *misura in radianti* dell'angolo. La misura dell'angolo piatto (≈ 3.14) si indica con π. Si dice *figura* ogni insieme di punti: segmenti, rette, semirette, circoli, cerchi, semicerchi, sempiani, angoli... Una figura si dice *limitata* se esiste un cerchio che la contiene (per esempio i segmenti), altrimenti *illimitata* (per esempio le rette).

1.2 Limitato, convesso, poligoni vari, perimetro, area

Una figura si dice *convessa* se contiene ogni segmento con estremi in quella figura (per esempio il cerchio), altrimenti non convessa. L'unione di 2 segmenti AB e BC (da altri denotati $[AB]$ e $[BC]$) non *allineati*, con un estremo B in comune si chiama *linea spezzata* di 2 *lati* AB e BC e *vertice* B, e in modo analogo è definita quella di più *lati*. Non facciamo i dettagli, come pure per le seguenti intuitive denominazioni:

linea spezzata *chiusa*, o altrimenti *aperta*;

linea spezzata *intrecciata*, o altrimenti non intrecciata;

lati *consecutivi*;

lunghezza della linea spezzata.

Supponiamo noto il fatto (non banale da dimostrare) che una linea spezzata chiusa non intrecciata divide il piano in 2 parti. Quella limitata si chiama *poligono (semplice)* (o *non intrecciato*), coi lati e i vertici della linea spezzata, e *perimetro* la sua lunghezza. Il poligono si dice *equilatero* se ha i lati uguali ed *equiangolo* se ha gli angoli uguali, e *regolare* se è equilatero ed equiangolo.
I poligoni con 3 lati si chiamano *triangoli* e quelli con 4 *quadrilateri*. Un quadrilatero si chiama *rombo* se è equilatero, *parallelogramma* se ha i lati a 2 paralleli, *rettangolo* se ha i lati a 2 a 2 perpendicolari, *quadrato* se è equilatero equiangolo.
Il prodotto $b \cdot h$ delle lunghezze di 2 lati consecutivi di un rettangolo si chiama *area*. Ciò genera immediatamente il concetto di area di un parallelogramma, e per dimezzamento quello di area di un triangolo, $\frac{b \cdot h}{2}$, che a sua volta genera il concetto di area per ogni poligono, e con *passaggio al limite* (concetto non banale) l'area di ogni figura *sufficientemente regolare*, in particolare il cerchio, che si dimostra avere area πr^2. I punti, i segmenti, le linee spezzate, i circoli e gli archi di circolo, e perfino le rette hanno area 0. Non esiste (oppure è *infinita*) l'area di piano, semipiani e angoli.

$\star$ Il triangolo di base b e altezza h ha area $\frac{1}{2}\, a\, b$.

⋆ Il quadrato di lato a ha perimetro $4\,a$ e area a^2
⋆ Il cerchio di raggio r ha ciconferenza $2\,\pi\,r$ e area $\pi\,r^2$, e $\pi \approx 3.14$
⋆ Il parallelepipedo di lati a, b, c ha volume $a\,b\,c$
⋆ La sfera ha volume $\frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

1.3 Isometrie e congruenza in piano e spazio euclidei

Detto E il piano euclideo, o lo spazio euclideo, ogni funzione da E in E che *conserva le distanze* si chiama *isometria* o *trasformazione rigida*.
Più formalmente, una funzione

$$f : E \to E$$

essendo E il piano euclideo o lo spazio euclideo, si dice *isometria* se

$$\Big(\forall P, Q \in E\Big) \quad d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

essendo d la *distanza* (euclidea).
Due sottoinsiemi del piano (o spazio) euclideo dei quali uno sia il trasformato isometrico dell'altro si dicono *congruenti*.
Le isometrie conservano gli angoli e le aree, e nello spazio i volumi.

Da adesso consideriamo solo il piano euclideo.

Nel piano euclideo esistono 5 tipi di isometrie:

- d – l'identitá o trasformazione identica
- dd – traslazioni
- dp – rotazioni
- db – le simmetrie assiali (o riflessioni)
- dq – antitraslazioni (anche dette glissosimmetrie, glissoriflessioni o simmetrie con scorrimento):

> sono quelle isometrie del piano euclideo che si ottengono da una simmetria assiale S composta con una traslazione T lungo una retta parallela all'asse di S.
> (Da Wikipediam l'enciclopedia libera).

Date 2 figure congruenti, ciascuna si trasforma nell'altra con 1 delle 5 isometrie dette.

Tutte le isometrie del piano euclideo (compresa l'identitá) o sono 1 riflessione o sono composizioni di 2 o 3 riflessioni.
Escludento le identitá, si hanno i seguenti 4 casi:

```
.................Conserva l'orientazione?
.................SI'...........NO
Ha punti...SI'...rotazione.....riflessione
fissi?.....NO....traslazione...antitraslazione
```

1.4 Congruenti e simili; Teoremi di Pitagora ed Euclide

Se per 2 figure F ed F' esiste una funzione biiettiva $f : F \to F'$ che conserva le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *congruenti* e si possono immaginare come *sovrapponibili*; ma si faccia attenzione che l'azione della sovrapposizione può necessitare di passare momentaneamente nello *spazio* in cui è contenuto il piano, come per i grafemi d e b. Tutte le rette sono congruenti, e anche le semirette e i semipiani.
Se F ed F' sono il piano euclideo stesso, f si chiama *isometria*↑.
Se per 2 figure F ed F' esistono un numero $\alpha > 0$ e una funzione biiettiva $g : F \to F'$ che moltiplica per α le distanze di tutte le coppie di punti corrispondenti ovvero precisamente

$$\overline{f(P)\,f(Q)} = \alpha \cdot \overline{P\,Q} \qquad \forall\, P, Q \in F$$

le 2 figure si dicono *simili*. Tutti i segmenti sono simili, e anche i circoli, i cerchi, i quadrati e i triangoli equilateri.
Si dimostra che se un triangolo ha gli angoli uguali a quelli di un altro, essi sono simili. Allora dette a, b, c le misure dei lati del primo, e a', b', c' quelle del secondo, vale la (doppia) proporzione

$$a : a' = b : b' = c : c' \qquad ossia \;\; \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,.$$

Un triangolo con un angolo retto si chiama *triangolo rettangolo*; *ipotenusa* il suo lato maggiore e *cateti* gli altri. Dette nell'ordine i, c_1 e c_2 le lunghezze di quei lati, h quella della distanza dell'ipotenusa dal vertice *opposto* (cioè h è la lunghezza dell'*altezza relativa all'ipotenusa*), e p_1 e p_2 le lunghezze delle *proiezioni dei cateti sull'ipotenusa* (nell'ordine), valgono questi 3 teoremi classici:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2 \qquad Teorema\ di\ Pitagora$$

$$c_1^2 = i \cdot p_1, \quad c_2^2 = i \cdot p_2 \qquad Primo\ Teorema\ di\ Euclide$$

$$p_1 : h = h : p_2 \qquad Secondo\ Teorema\ di\ Euclide.$$

2 Piano cartesiano – I parte

2.1 Premessa definizionale

funzione: $f(x)$, p.es. $f(x) := x^2 - 2$, spesso scritta $y = x^2 - 2$;

equazione: $f(x) = g(x)$, p.es. $x^2 - 2 = 0$ ha ***soluzione*** $\pm\sqrt{2}$;

polinomio: $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, p.es. $x^2 - 2$, ha ***radici*** $\pm\sqrt{2}$;

disequazione in 1 variabile: $f(x) > g(x)$ (o $<$ o $\geq$ o $\leq$), p.es. $x^2 > 2$, ha ***soluzione*** $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$.

2.2 Assi cartesiani

Gli assi cartesiani sono una retta orientata detta asse delle ascisse e una retta orientata perpendicolare alla precedente, detta asse delle ordinate, che si intersecano in un punto detto origine e denotato con O.
L'orientazione del piano e degli angoli con vertice nell'origine è antioraria. L'asse delle ascisse si sovrappone all'asse delle ordinate con una rotazione di $+90°$.

Spesso l'asse delle ascisse ha nome x, ma t se rappresenta un tempo, e quello delle ordinate y, ma p se rappresenta un peso, eccetera.

Su ciascun asse è fissata un'unità di misura, che determina l'ascissa e l'ordinata (distanze con segno) dei loro punti.

2.3 Punti del piano cartesiano

Equazione del punto([2]):

$$P = (x_0, y_0) \quad \mathit{ovvero} \quad P(x_0, y_0) \quad \mathit{ovvero} \quad (x_0, y_0)$$

[2] Altri Autori scrivono col punto e virgola: $(x_0; y_0)$

Il numero reale x_0 è l'ascissa di P e y_0 l'ordinata.

Da adesso, le relazioni geometriche fra figure diventano relazioni algebriche fra numeri, con enorme vantaggio pratico e applicativo.

Già il D'Oresme([3]) (XIV secolo), iniziatore del metodo, arrivò fino a produrre – sostanzialmente – l'equazione della retta. Oggi noi seguiamo la teoria, più completa, di Descartes (Cartesius, Cartesio, XVII secolo).

2.4 Grafico di dispersione ovvero scatterplot

(Scritto sia scatterplot che scatter plot).

"Il grafico di dispersione o grafico a dispersione o scatter plot o scatter graph è un tipo di grafico in cui due variabili di un set di dati sono riportate su uno spazio cartesiano.

I dati sono visualizzati tramite una collezione di punti ciascuno con una posizione sull'asse orizzontale determinato da una variabile e sull'asse verticale determinato dall'altra.
(...)
solitamente la variabile più importante è sull'asse delle y" (Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Grafico di dispersione).

[3]Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Nicola d'Oresme: "matematico, fisico, astronomo ed economista, vescovo, filosofo, psicologo e musicologo francese (...) teologo appassionato, traduttore competente, influente consigliere di re Carlo V di Francia (...) ebbe l'idea di utilizzare ciò che dovremmo chiamare coordinate rettangolari nella terminologia moderna, una lunghezza proporzionale alla longitudo, l'ascissa di un dato punto e una perpendicolare a quel punto, proporzionale alla latitudo, l'ordinata (...) longitudo e latitudo possono variare o rimanere costanti."

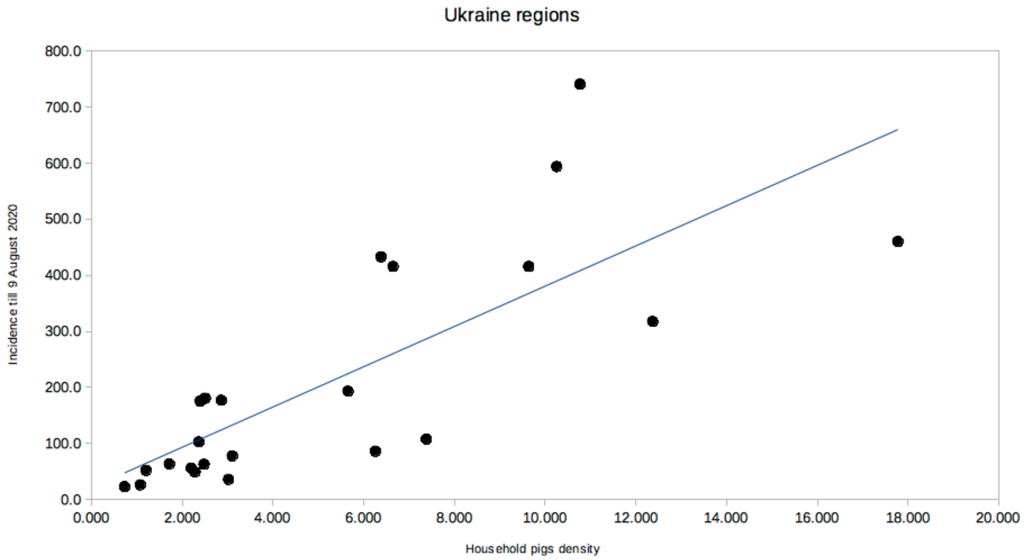


Figure 1: Esempio di scatterplot, che mette in relazione la densità di maiali d'allevamento domestico ed incidenza del covid-19, nelle regioni dell'Ukraina; tratto da: "In the first wave of the 2020 pandemic in several areas more sunlight less pandemic, more pigs more pandemic, and lower correlations with some other livestocks". (December 2020), A. Soranzo. DOI: 10.13140/RG.2.2.29852.31367 Allo scatterplot è aggiunta la *retta di regressione*.

Altri esempi in https://openi.nlm.nih.gov/detailedresult?img=PMC3973306_gkt1380f1p e moltissimi altri in https://www.google.com/search?q=ncbi+drug+scatterplot&tbm=isch&ved=2ahUKEwjOoM3xmLXsAhUlgXMKHVfYC1AQ2-cCegQIABAA&oq=ncbi+drug+scatterplot&gs_lcp=CgNpbWcQA1DUmQJYoqICYJqlAmgAcAB4AIABWogB4wKSAC
sclient=img&ei=BISHX86ONaWCzgPXsK-ABQ&bih=616&biw=1177

2.5 Rette del piano cartesiano

Esistono

- rette verticali, cioè parallele all'asse y: equazione $x = p$
- rette orizzontali, cioè parallele all'asse x: equazione $y = q$
- rette oblique, non parallele nè all'asse x nè all'asse y

Equazioni esplicita della retta passante per l'origine e non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale, per l'origine:

$$y = m\,x$$

e questa funzione è caratterizzate da
"al raddoppiare di x raddoppia y e viceversa."

La maggior parte delle funzioni di 1 variabile delle Scienze Applicate ha questa forma.
Per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con la temperatura assoluta

$$V = V_0\,\alpha\,T \qquad T\ temperatura\ assoluta \qquad retta\ per\ l'origine\ nel\ piano\ (T, V)$$

Equazioni esplicita della retta non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale:

$$y = m\,x + q$$

per esempio $giorni\_dal\_concepimento = 365.25\,anni + 273$ (Formula approssimativa).

q ci dice il punto di intersezione con l'asse y, precisamente $(0, q)$.
m: ***coefficiente angolare***, ci indica la pendenza della retta;
se è 0 la retta è orizzontale
se è > 0 la retta "sale"
se è < 0 la retta "scende".

A volte nelle Scienze Applicate l'equazione appare come

$$y = m\,(x + p)$$

che è esattamente come prima con $q = m\,p$ ovvero $p = q/m$.

Per esempio una ricerca scientifica[4] dà questo peso ideale

$$\text{weight\_children\_aged\_1-5\_years} = 2 \times (\text{age\_in\_years}\ + 5)$$

[4] Make your Best Guess: an updated method for paediatric weight estimation in emergencies, by Tinning K, Acworth J., in Emerg Med Australas. 2007 Dec;19(6):528-34.

che nella forma $y = m\,x + q$ sarebbe weight_children_aged_1-5_years = $2 \times$ age_in_years $+ 10$. Addirittura può presentarsi scritta in una forma equivalente

$$y = a\,(b\,x + c)$$

per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con i gradi Celsius

$$V = V_0\,(1 + \alpha\,t) \qquad t\; temperatura\; ^\circ C \qquad retta\; obliqua\; nel\; piano\; (t, V)$$

Equazione implicita della retta: $a\,x + b\,y + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

per esempio $2\,x - y + 10 = 0$ che è quella appena visto salvo diverse variabili.

Ogni punto $P(x, y)$ le cui coordinate verificano l'equazione della retta appartengono alla retta, e questo sarà un fatto generale, estendibile a tutte le *curve*, in rappresentazione esplicita o implicita. Per esempio $(1.7, 63.869)$ sta sulla curva del peso ideale maschile secondo Keys prima visto, che è la parabola (grafico di) $y = 22.1\,x^2$: altezza in metri 1.70 (ovvero 1.7, matematicamente), peso 63.869 in chilogrammi.

Equazione della retta per 2 punti:

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

Formula della distanza di 2 punti:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

sono parallele $\Leftrightarrow$ $m' = m$

(e ovviamente 2 rette verticali $x = p$ e $x = p'$ sono parallele).

2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$, nessuna delle quali orizzontale,

$$\text{sono perpendicolari} \iff m' = -\frac{1}{m}$$

(e ovviamente ogni retta orizzontale è perpendicolare a ogni retta verticale).

Formula della distanza punto-retta:

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Grafico cartesiano G_f di una funzione $f(x)$ è (il disegno del)l'insieme

$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$$

e spesso le funzioni hanno nome $y(x)$ denotato anche semplicemente y, e già abbiamo visto le rette orizzontali e oblique $y = m\,x + q$, che di fatto sono proprio grafici, mentre le rette verticali non sono grafici di funzioni di x. (Ma sono grafici di funzioni di y).

Fra le rette che sono grafici di funzioni di x si distinguono queste:
  $y = x$ bisettrice del I e III quadrante – funzione *identità*
  $y = -x$ bisettrice del II e IV quadrante – passaggio all'opposto
  $y = q$ con $q \in \mathbb{R}$ generica retta orizzontale, e se $q = 0$ si ha
  $y = 0$ asse x
e quelle che non sono grafici di funzioni di x sono precisamente queste:
  $x = x_0$ generica retta verticale, e se $x_0 = 0$ si ha
  $x = 0$ asse y.

2.6 Funzioni e dis/equazioni di primo grado

Per ogni m la funzione $f(x) := m\,x$ si chiama *funzione lineare*, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x$.

> Esempio: l'indice di massa corporea: $BMI := \frac{peso}{altezza^2}$, in cui l'altezza possiamo ragionevolmente considerarla costante – per un fissato individuo – mentre un peso x può variare più facilmente, in pratica abbiamo $y = \frac{1}{altezza^2} \cdot x$; si usino chilogrammi e metri).

È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costantemente nulla* se $m = 0$.
Il grafico è una retta passante per l'origine.

Fissato $m \neq 0$, l'equazione $m\,x = 0$ ha soluzione $x = 0$ (basta dividere per $m \neq 0$), mentre la disequazione in 1 variabile

$$m\,x > 0$$

si risolve dividendo per m ciò che, se e solo se $m < 0$, inverte l'ordinamento. Analogamente si risolve se si aveva $\geq$, $<$ o $\leq$.

Per ogni $m, q \in I\!R$ la funzione $f(x) := m\,x + q$ si chiama funzione *affine*, deprecabilmente detta lineare, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x + q$.
È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costante* se $m = 0$.
Il grafico è una retta, che *intercetta* (interseca) l'asse y in $(0, q)$.
Fissati $m \neq 0$ e q, l'equazione

$$m\,x + q = 0$$

ha soluzione $x = -\frac{q}{m}$. (Si sommi $-q$ e si divida per $m \neq 0$).
Le 4 disequazioni con $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ si risolvono sommando $-q$ e poi dividendo per m <u>invertendo l'ordinamento se $m < 0$</u>.
Fissati m e q, la disequazione in 2 variabili

$$y \geq m\,x + q$$

rappresenta il *semipiano chiuso* "sopra" la retta $y = m\,x + q$, compresi i punti della retta. Col $>$, il *semipiano aperto*, esclusi i punti della retta.
Con $\leq$, e con $<$, si va "sotto" la retta, compresa (semipiano chiuso) o rispettivamente esclusa (semipiano aperto).
Ciò vale anche per la $y > m\,x$ e le 3 analoghe, che hanno $q = 0$.

Esempio di modello lineare. $\star$
Nel mondo si contavano 0,5 milioni di morti nella pandemia al 30 giugno 2020, giorno 182 dell'anno, e 1 milione al 28 settembre, giorno 272. Dal grafico si vede che in quel periodo la crescita è più o meno lineare (e poi aumenta ma non ce ne occuperemo). Ipotizzato allora il modello lineare si determini l'equazione esplicita della retta grafico del numero totale y di morti (in milioni) in funzione

del tempo t, che potrebbe servire per ulteriori studi, che qua non faremo.

SVOLGIMENTO
È usato lo standard della virgola decimale.
Abbiamo, con ovvio significato dei simboli,

$t_1 = 182 \; y_1 = 0.5$

$t_2 = 272 \; y_2 = 1$

e con l'equazione della retta

$$\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{t - 182}{272 - 182} = \frac{y - 0{,}5}{1 - 0{,}5}$$

$$\frac{t - 182}{90} = \frac{y - 0{,}5}{0{,}5}$$

che è un'equazione implicita della retta cercata, e si può semplificare

$$\frac{t}{90} - \frac{182}{90} = \frac{y}{0{,}5} - 1 \qquad \Big/ \cdot 90$$

$$t - 182 = 180\,y - 90 \qquad \Big/ + 90$$

$$t - 92 = 180\,y \qquad \Big/ : 180$$

$$\boxed{y = \tfrac{1}{180}\,t - \tfrac{23}{45}}$$

ovvero, come più piacerebbe nelle Scienze applicate,

$$\boxed{y = 0.00556\,t - 0.511}$$

dove il simbolo = (delle ScienzeApplicate) è da intendersi nel senso del ≈ (della Matematica).

Nota sulle approssimazioni numeriche. Nelle Scienze Applicate si arrotonda e approssima di tutto, sia bene che non bene, e i matematici talvolta si metterebbero le mani nei capelli. ☺

Per curiosità riportiamo qualche nota su un'incidente che causò decine di morti. ☞

> On February 25, 1991, during the Gulf War, an American Patriot Missile battery in Dharan, Saudi Arabia, failed to track and intercept an incoming Iraqi Scud missile. The Scud struck an American Army barracks, killing 28 soldiers and injuring around 100 other people. Patriot missileA report of the General Accounting office, GAO/IMTEC-92-26, entitled Patriot Missile Defense: Software Problem Led to System Failure at Dhahran, Saudi Arabia reported on the cause of the failure. It turns out that the cause was an inaccurate calculation of the time since boot due to computer arithmetic errors. Specifically, the time in tenths of second as measured by the system's internal clock was multiplied by 1/10 to produce the time in seconds. This calculation was performed using a 24 bit fixed point register. In particular, the value 1/10, which has a non-terminating binary expansion, was chopped at 24 bits after the radix point. The small chopping error, when multiplied by the large number giving the time in tenths of a second, led to a significant error. Indeed, the Patriot battery had been up around 100 hours, and an easy calculation shows that the resulting time error due to the magnified chopping error was about 0.34 seconds. (The number 1/10 equals 1/24+1/25+1/28+1/29+1/212+1/213+.... In other words, the binary expansion of 1/10 is 0.0001100110011001100110011001100....
> Now the 24 bit register in the Patriot stored instead 0.00011001100110011001100
> introducing an error of 0.000000000000000000000000011001100...
> binary, or about 0.000000095 decimal. Multiplying by the number of tenths of a second in 100 hours gives 0.000000095×100×60×60×10=0.34.)
> A Scud travels at about 1,676 meters per second, and so travels more than half a kilometer in this time. This was far enough that the incoming Scud was outside the "range gate" that the Patriot tracked. Ironically, the fact that the bad time calculation had been improved in some parts of the code, but not all, contributed to the problem, since it meant that the inaccuracies did not cancel. (https://www-users.cse.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html)

(Ed erano ben 24 bit, mica solo 3 cifre significative).

Esempio di regioni piane delimitate da rette. Con l'altezza h (in centimetri) e il peso p (in chilogrammi) la Formula di Broca definiva (oggi esistono vari altri standard)

$$\textit{peso normale} = (h - 100) \pm 10\% \quad \text{(secondo alcuni, } h \geq 130)$$

ovvero, con la corretta interpretazione del ±10%, in senso intervallare, com'è tipico delle Scienze Applicate (ma **non** dell'Analisi

Matematica),

$peso\,normale \in$

$$[(h-100)-(h-100)10\%,(h-100)+(h-100)10\%]$$

e qua – a conti fatti – riconosciamo 2 rette e 3 regioni del piano Ohp:

sottopeso $p < 0.9\,h - 90$ (sotto la retta)

sovrappeso $p > 1.1\,h - 110$ (sopra la retta)

e la terza regione, dei normopeso, è quella fra le 2 rette.
(Secondo certi Autori, ±20% invece che ±10%.).

Come sarebbe la situazione di 53 kg e 1.70 m? (Si converta in centimetri).

2.7 Nota finale sulle rette oblique

Le rette oblique con pendenza verso l'alto sono grafici di funzioni che "crescono sempre ugualmente".

Per esempio il volume V di liquido in una provetta al crescere del livello h oltre la parte "semisferica": $V = m\,h + q$, dove q è il volume della parte "semisferica" della provetta.

2.8 Nota sui modelli matematici

Il fatto che la formula di Broca per il peso ideale certamente smetta di avere senso in qualche punto imprecisato – non esiste alcun peso ideale per persone alte un chilometro – è un caso specifico dell'osservazione generale seguente.

Molte formule delle Scienze Applicate hanno un qualche dominio di ragionevolezza in cui modellizzano bene la realtà sensibile, divenendo sempre meno sensate verso imprecisati estremi.

3 Piano cartesiano – II parte

Il grafico della funzione *passaggio al reciproco*, già vista,

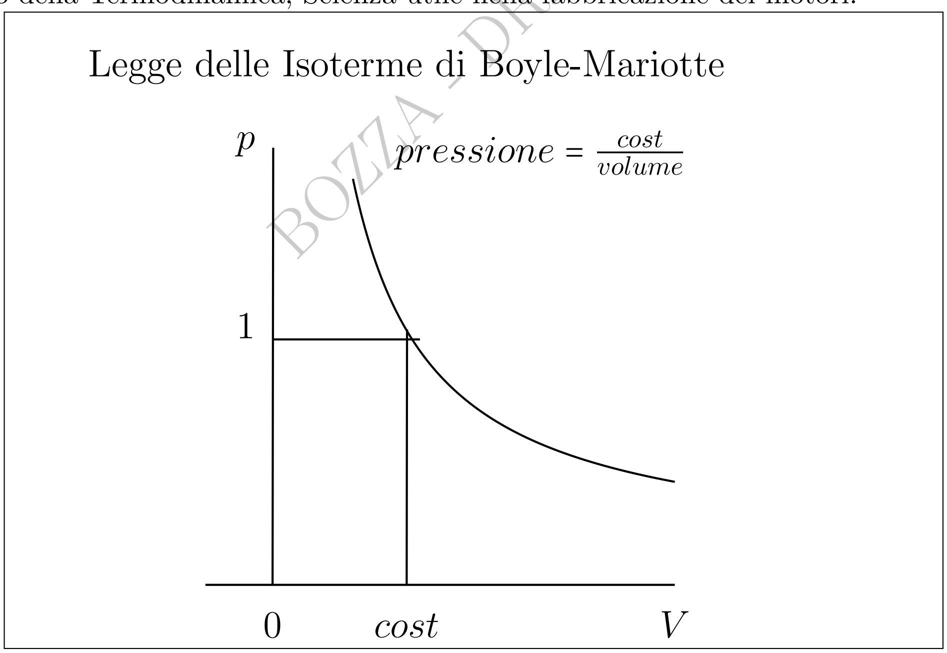
$$y = \frac{1}{x}$$

è una ***curva***(5) e più in generale

$$y = \frac{cost}{x} \qquad cost \neq 0$$

ha grafico una curva detta ***iperbole equilatera (riferita agli asintoti)*** e questa è una delle formule di più ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate.

Esempio della Termodinamica, Scienza utile nella fabbricazione dei motori.



Queste funzioni $y(x) = \frac{cost}{x}$ sono caratterizzate da *"al raddoppiare di x dimezza y e viceversa"*

Tutti i grafici sono *curve*,

[5] Una definizione rigorosa di *curva* è alquanto complessa, e in questa trattazione elementare supporremo noto il concetto. Le curve più semplici sono le rette.

e hanno un'equazione *esplicita* $y = f(x)$,
ma esistono curve che non sono grafici,
e hanno un'equazione *implicita* $f(x, y) = 0$.

In particolare il ***circolo*** di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Altri Autori lo chiamano *cerchio* ma in questo testo il ***cerchio*** sarà la regione "dentro" un circolo.
Questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio*.
Ricordiamo
la lunghezza del circolo $2\,\pi\,r$
l'area del cerchio $\pi\,r^2$.

Esercizio$_\mu$ Si verifichi se il punto $(2, 2)$ sta sul circolo

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y + 1 = 0$$

(No).

Altre curve in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}\,x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse} \text{ (in } \textit{forma canonica}^{(6)}\text{)}$$

[6] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard*.

e la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse*. Se $a > b$ l'ellisse appare "ribassata" e se $b > a$ l'ellisse appare "allungata verso l'alto".

> **Esercizio**$_\mu$ Con $a := 3$ e $b := 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

Ora vediamo una curva in equazione esplicita: la generica **parabola** con asse verticale ha equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$

La disequazione

$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$

rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga >, e questo è un fatto generale).

E ovviamente

$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$

rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

La parabola è simmetrica rispetto ad una retta detta *asse* che interseca la parabola in un punto detto *vertice* della parabola.

Per esempio in uno studio scientifico si è stabilito

$$weight \leq -3{,}767 + 89.11 * length + 1.237 * length^2 \qquad 40 \leq lenght \leq 55$$

(con la lunghezza in grammi e il peso in chilogrammi) rappresenta bene una soglia per il 90% dei neonati (Hospital Israelita Albert Einstein, San Paolo, Brasile, 1995-1998). (Con 50 cm dà 3781 grammi). (Si noti che usano il punto decimale e la virgola come separatore delle migliaia).

3.1 Le curve a forma di J

La parabola ci offre un semplice modello del concetto, più generale, di *curva a forma di J*. Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *J curve*:

In medicine, the 'J curve' refers to a graph in which the x-axis measures either of two treatable symptoms (blood pressure or blood cholesterol level) while the y-axis measures the chance that a patient will develop cardiovascular disease (CVD). It is well known that high blood pressure or high cholesterol levels increase a patient's risk. What is less well known is that plots of large populations against CVD mortality often take the shape of a J curve which indicates that patients with very low blood pressure and/or low cholesterol levels are also at increased risk.

3.2 Qualche nota sulle coniche

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[7] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.
Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*.

Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel piano – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O).

3.3 Le curve più comuni, e le famiglie di curve

Con le rette[8] e le coniche, e il grafico di $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate.

Un esempio di ***famiglia*** (insieme) di curve in rappresentazione

[7] Insieme. Termine usato in geometria.
[8] A rigore, le rette verticali del piano cartesiano $O(x, y)$ non sono grafici di funzioni della x, però sono grafici di funzioni della y.

implicita ci viene dalla Termodinamica, con la Legge di van der Waals

$$\left(p + a\,\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = n\,R\,T$$

nel piano (V, p), con R, n, a, b costanti, al variare di T.

4 Piano cartesiano – III parte

4.1 Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Il sistema lineare (ovvero di primo grado) di 2 equazioni in 2 incognite x e y

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$$

se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$ rappresenta geometricamente l'intersezione di 2 rette nel piano cartesiano. Potrebbero non avere intersezione, se esse sono parallele e distinte, o infinite soluzioni, se esse sono coincidenti. Questi 2 casi sono caratterizzati dal *determinante* nullo

$$a\,b' - b\,a' = 0$$

e si risolveranno con cautela analiticamente e contemporaneamente facendo un disegno. Non ce ne occuperemo.

Ipotizziamo ora det $\neq 0$. Ognuna delle eventuali equazioni mancanti di 1 delle 2 variabili si risolve subito, e il valore di x o y trovato si sostituisce nell'altra equazione, se in essa c'è quella variabile, e così quell'equazione diventa un'equazione di primo grado in una sola variabile, e si risolve subito anch'essa.

Ipotizziamo ora che ci siano sia la x che la y in entrambe le equazioni: esplicitiamo y dalla prima e sostituiamola nella seconda, che diventa così un'equazione di primo grado nella sola x. Trovata la x, si trova la y dalla sua espressione precedentemente esplicitata dalla prima equazione.
Per esempio troviamo quale temperatura ha lo stesso valore numerico nelle scale Celsius e Fahrenheit:

$$\begin{cases} F = C & \text{(stesso valore numerico)} \\ F = 1.8\,C + 32 & \text{(formula di conversione)} \end{cases}$$

Esplicitiamo F dalla prima, che in effetti “è già risolta”, e sostituiamo nella seconda ottenendo

$$C = 1.8\,C + 32 \qquad \Big/ + (-1.8\,C)$$

$$-0.8\,C = 32 \qquad \Big/ : 0.8$$

$$C = 32 : (-0.8)$$

$$C = -40 \qquad \text{(40 gradi sotto 0, sia Celsius che Fahrenheit)}$$

Questo metodo si estende subito ai sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite[9] x, y e z (e poi anche di più): si esplicita z dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda e la terza, che insieme costituiscono a questo punto un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite x e y. Tuttavia, i sottocasi particolari, di 0 e infinite soluzioni, iniziano a diventare molteplici, e non sempre facilissimi da trattare.

I sistemi lineari ricorrono un’infinità di volte nelle Scienze Applicate.

Esempio.

Abbiamo una provetta di 12 g contenente 2 fluidi non miscibili di volumi 7 ml e 6 ml con pesi specifici incogniti, e un’altra provetta di 14 g contenente gli stessi fluidi di volumi 5 ml e 9 ml.

Per trovare i pesi specifici incogniti x e y risolviamo il sistema lineare (di 2 equazioni in 2 incognite)

(x g/ml) 7 ml+ (y g/ml) 6 ml=12 g

(x g/ml) 5 ml+ (y g/ml) 9 ml=14 g
ovvero

7x+6y=12

5x+9y=14
e si troveranno i pesi specifici (qua dati senza l’unità di misura g/ml) $x = \frac{8}{11} \approx 0.727$ e $y = \frac{38}{33} \approx 1.151$.

[9] Geometricamente rappresenta l’intersezione di 3 piani nello *spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$.

4.2 Sistemi di dis/equazioni e sistemi generalizzati

Un **sistema di n equazioni** in 1 incognita x, con la parentesi graffa (grande) che vale *et*, è il predicato (con opportune funzioni)

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases}$$

e sostituendo gli = con segni di disuguaglianza si ha un **sistema di n disequazioni** in 1 incognita. Naturalmente possono considerarsi **sistemi con 2 o più incognite**, e anche sia con equazioni che disequazioni.

I predicati del tipo $f(x) \neq g(x)$, che potremmo chiamare *"inequazioni"*, non li nomineremo per nome considerandoli implicitamente compresi nelle disequazioni data l'equivalenza con $(f(x) - g(x))^2 > 0$.

Non esiste un metodo generale per risolverli tutti.

Esercizio risolvibile graficamente o algebricamente
Questo ***sistema di equazioni e disequazioni*** in 2 incognite

$$\begin{cases} x\,y = 0 & \leftarrow \textit{rappresenta 2 rette, } x = 0 \textit{ e } y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0 & \leftarrow \textit{rappresenta 1 cerchio, } C(1,1),\ r = 1 \end{cases}$$

$$\text{equivale a } \begin{cases} x = 0 \lor y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ (0-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{cases} \lor \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + (0-1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 \leq 0 \end{cases} \lor \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 \leq 0 \end{cases} \qquad (**)$$

ha soluzione, come anche si vedeva subito graficamente,

$$\Big(x = 0 \land y = 1\Big) \lor \Big(x = 1 \land y = 0\Big).$$

Predicati come $(*)$ e $(**)$, ammettenti anche il *vel*, li chiameremo *sistemi generalizzati di equazioni e, in questo caso, disequazioni.*

4.3 Funzioni e dis/equazioni di secondo grado

Questo argomento si ritiene già noto

Le parabole con asse verticale hanno equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con qualche $0 \neq a, b, c \in I\!R$, e il loro asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$.
Definito il *discriminante* $\Delta := b^2 - 4ac$, la parabola interseca l'asse x in $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta \geq 0$ e altrimenti mai.
Se x_1 e x_2 sono
• le *radici* (eventualmente coincidenti) del *polinomio* $a\,x^2+b\,x+c$,
• ovvero le *soluzioni* dell'*equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
• ovvero se $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ sono le *intersezioni* della parabola con l'asse x,
allora è

$$a\,x^2 + b\,x + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Con uno *schema di prodotto dei segni* risolviamo la disequazione

$$a\,x^2 + b\,x + c > 0 \qquad \textit{oppure} \;\geq\quad \textit{oppure} \;<\quad \textit{oppure} \;\leq$$

Per esempio per $-x^2 - 2\,x + 8 \leq 0$ usando la *formula ridotta*

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad\qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

utile se b è intero pari, si trova

$$\Delta = (-1)^2 - (-1)\cdot 8 = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-1} \qquad x_1 = +2 \quad x_2 = -4$$

$$-x^2 - 2\,x + 8 = -1\cdot(x-2)\cdot(x+4) \leq 0$$

$-1 > 0 \quad$ *mai*
$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \qquad\qquad$ *Soluzione* : $x \leq -4 \vee x \geq 2\,.$

È meglio risolvere le 3 disequazioni con > e poi individuare l'insieme soluzione a seconda se nella disequazione iniziale si aveva $>$, $\geq$, $<$ o $\leq$. (Altri Autori fanno diversamente). Questo è un procedimento generale che in seguito varrà anche per più di 3 termini.

Si noti che la soluzione di

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

è esattamente la stessa di quest'*equazione razionale fratta*

$$\frac{a(x - x_1)}{x - x_2} > 0$$

e similmente avviene col $<$. Si userà lo stesso *schema di prodotto dei segni*.
Se invece di $>$ si ha $\geq$ dopo aver risolto come sopra si aggiungano alla soluzione tutti i valori di x che annullano il numeratore. Similmente con $\leq$.

L'equazione della parabola ricorre un'infinità di volte[10] nelle Scienze Applicate.

4.4 Valore assoluto, e relative dis/equazioni

Il valore assoluto può essere definito con la radice quadrata e la seconda potenza

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

ma in generale non seguiremo questa strada.

Da qua in poi questo argomento si ritiene già noto

[10] Per esempio, dà lo spazio

$$s(t) = 9.81\, t^2 + v_0\, t$$

percorso al tempo t da un corpo partito verso il basso con velocità v_0, nel campo gravitazionale terrestre, da altezza non troppo elevata, supposta la forma tale da rendere insignificante l'attrito con l'aria.

Il valore assoluto in $\mathbb{R}$, già definito,

$$|x| := \begin{cases} x & se \;\; x \geq 0 \\ -x & se \;\; x < 0 \end{cases}$$

verifica queste proprietà:

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\Big(\forall\, y \neq 0\Big) \quad |x/y| = |x|/|y|$$

$$|x|^2 = x^2 \qquad \text{e addirittura } |x^n| = |x|^n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$$

$$\Big(\forall\, a \geq 0\Big) \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a \;\; \textit{e analoga con } \geq$$

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \;\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

e molte altre([11]).

---

[11] Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule sul valore assoluto:

$$||x|| = |x|$$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$|x^\alpha| = |x|^\alpha \qquad \forall\, x \in I\!R^+, \;\; \forall\, \alpha \in I\!R$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l'ultima si chiama *disuguaglianza triangolare.*

$$\Big(\forall\, a > 0\Big) \quad |f(x)| \leq a \;\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

e i 3 = possono sostituirsi con tutti e 4 i segni di disuguaglianza..

Nota. Il valore assoluto ricorre un'infinità di volte nelle Scienze Applicate. Nel prossimo paragrafo ne vedremo alcune, e per intanto osserviamo che $|t|$ rappresenta una distanza temporale dall'istante 0, sia dopo che prima di 0.

4.5 Errore assoluto, relativo e percentuale

Nelle successive 3 formule, si noti che bisogna conosce il valore esatto di una grandezza considerata.

Si definiscono

$$\text{errore assoluto [rispetto l'esatto]} := |approx - esatto|$$

$$\text{errore relativo [rispetto l'esatto]} := \frac{|approx - esatto|}{esatto}$$

$$\text{errore percentuale [rispetto l'esatto]} := \text{errore relativo [rispetto l'esatto]} := \text{errore relativo [rispetto l'esatto] [in forma percentuale]} := \frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%$$

Quest'ultimo errore relativo, e quello della seconda formula, sono lo stesso numero, ma espresso in 2 modi diversi.

Nelle Scienze Applicate ci vorrà grande cautela nell'applicare queste 3 formule perchè i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*.

Esempio 1.$_{\mu}$ All'inizio i 46 cromosomi umani furono erroneamente conteggiati come 44 con errore (percentuale) dell'ordine del 4%:

$errore\,assoluto\,[rispetto\,l'esatto]:\ 2$

$errore\,relativo\,[rispetto\,l'esatto]:\ \frac{1}{23}$

$errore\,percentuale\,[rispetto\,l'esatto]: \approx 4.3\%$ (diciamo pure 4%).

Esempio$_\mu$ L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore (percentuale) dell'ordine dello 0.5 per mille:

$$\text{errore percentuale rispetto l'esatto} := \frac{|3.14-\pi|}{\pi}\cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14-3.14159265\ldots|}{3.14159265\ldots}\cdot 100\% \approx$$

$$\approx \frac{|3.14-3.14159265|}{3.14159265}\cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

4.6 Proporzioni

Questo argomento si ritiene già noto

Si dice *proporzione* la *relazione quaternaria* (cioè fra 4 numeri)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad \text{classicamente scritta} \quad \mathrm{x:y=z:w}$$

ma talvolta si trova anche :: invece del segno =.
Non sottolineeremo qua la corrispondenza del concetto con la realtà sensibile, dovuta essenzialmente alla natura del prodotto e della divisione, supponendola nota dagli studi elementari.

Osserviamo invece che per l'operazione di divisione, oltre alle 4 notazioni già viste,

$$\frac{x}{y} \qquad x/y \qquad x:y \qquad x\div y$$

in ambito farmaceutico se ne usa anche una quinta, la parola (latina) **per**, che noi sempre trascriveremo come frazione.

$$\text{Per esempio:}\quad 12\ \text{mg per ml}\quad \text{scriveremo}\quad \frac{12\ \text{mg}}{1\ \text{ml}}$$

Esercizio Si abbia una boccetta di 10 ml di un farmaco X etichettata “15 mg per ml”. Quanti millilitri (ml) bisognerà iniettare per somministrare una dose di 75 mg?

Svolgimento. Riscriviamo l'indicazione in etichetta nella forma

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}}$$

e produciamo la proporzione

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}} = \frac{75 \text{ mg}}{x \text{ ml}} \qquad \bigg/ \cdot \frac{1 \text{ ml} \cdot x \text{ ml}}{15 \text{ mg}}$$

$$x \text{ ml} = \frac{75 \text{ mg} \cdot 1 \text{ ml}}{15 \text{ mg}} =$$

$= 5$ ml (e li abbiamo: la boccetta ne contiene 10).

$$\boxed{5 \text{ ml}}$$

Sul web si ritrovano diffusamente scritte col “per”, come “5 mg per 40 ml”, e il “per” chiaramente significa / ma a quanto pare in Italia una tale scrittura non si usa, risulta praticamente sconosciuta.

NOTA 1. È ben evidente l'importanza di **calcolare esattamente i dosaggi** in Farmacia. Ci sono stati errori fatali. (Plausibilmente sono numerosissimi e solo in minima parte vengono scoperti).
Ecco cosa consiglia il Royal College of Nursing inglese online:

> When you have completed your calculation, remember to check your work. Here's a reminder of the ways you might do this:
>
> - repeat the calculation
> - ask a colleague to check your answer
> - try to calculate the answer again using a different method

- check against the recommended dose range (e.g. using the British National Formulary)
- look for unusually big or small answers.

NOTA 2. Sebbene esuli dagli obiettivi di questo testo elementare di matematica, si noti che il millilitro (corrispondente al centimetro cubo) può trovarsi indicato **online di fatto** (nei cataloghi di farmaci) sia con ml che mL ma qualcuno scrive anche *diversamente*, in un modo che potrebbe in via ipotetica confondersi con altro multiplo del litro. E si faccia anche ben attenzione a distinguere la l minuscola dal numero 1...

Esercizio$_\mu$
Una pillola contiene una polvere costituita da $2.5\,mg$ di principio attivo e $300\,mg$ di eccipiente. Quanto principio attivo contiene $1\,kg$ della polvere?

SVOLGIMENTO
Una pillola contiene $(300+2.5)\,mg$ di polvere e allora si ha subito la proporzione

$$2.5\,mg : 302.5\,mg = x\,mg : 1\,kg$$

ovvero con scrittura più moderna

$$\frac{2.5\,mg}{302.5\,mg} = \frac{x\,mg}{1\,kg} \qquad \Big/ \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg}$$

trovandosi

$$x = \frac{2.5}{302.5} \cdot \frac{1\,mg}{1\,mg} \cdot \frac{1\,kg}{1\,mg} =$$

essendo ovviamente $1\,kg = 1\,000\,g = 1\,000\,000\,mg$

$$= \frac{2.5}{302.5} \cdot 10^6 =$$

$$\boxed{8\,264.46\,mg}$$

(Circa 8 grammi e un quarto).

Esercizio$_\mu$ Trovare l'unico numero $x > 0$ che sia *medio proporzionale* fra 1 e $1 + x$. (Cioè soluzione di $1 : x = x : (1 + x)$).
Riscriviamo la proporzione

$$1 : x = x : (1 + x)$$

in questa forma

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \qquad \Big/ \cdot x \cdot (1 + x)$$

$$1 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

ed escludendo la radice negativa

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \qquad \text{(mnemonico: } O_1 \textit{ numero}_6\text{! } E_1' \textit{ notevole}_8\text{.)}$$

che è la *sezione aurea* φ. Si noti che $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \approx 0.618$.
Questo numero φ tende a ricorrere nelle Scienze Naturali.

4.7 La successione di Fibonaci e la sezione aurea

La successione di Fibonacci è definita di solito *per ricorrenza*:

$$\begin{cases} a_1 := 1 \\ a_2 := 1 \\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Valori:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\ldots$$

Figura | su WolframAlpha Link->

Essa modellizza l'espansione di una popolazione animale o microbica, almeno nelle fasi iniziali. Fu studiata da Fibonacci nel medioevo per modellizzare l'accrescimento di una popolazione di conigli. E funziona bene anche come modello dell'espansione di un'epidemia nella fase iniziale.

La successione di Fibonacci è sì definita per ricorrenza (e solo su $\mathbb{N}$) ma è ha anche una definizione in forma chiusa con la sezione aurea

$$a_n := \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad \varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad n = 1, 2, \ldots$$

ed è approssimata con una funzione esponenziale in base la sezione aurea:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \tag{1}$$

per esempio $a_{10} = 55 \approx 55.0036$.
Con WolframAlpha, esattamente e senza approssimazioni:

```
Fibonacci[10]
```


Esercizio.$_\mu$ Calcolare con 5 cifre significative con la calcolatrice i primi 12 valori di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ relativi alla successione di Fibonacci.

5 Coniche e altre figure del piano

5.1 Postille ed esercizi sulle coniche

Tutti i grafici sono *curve*, e hanno un'equazione *esplicita*, ma esistono curve che non sono grafici, e hanno un'equazione *implicita*, in particolare il circolo di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

e questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio*.

Esercizio$_\mu$ Si verifichi se il punto $(2, 7)$ sta sul circolo, o dentro il circolo, o fuori del circolo

$$x^2 + y^2 + 2\,x - 10\,y + 1 = 0$$

Esercizio$_\mu$ Esplicitare i 2 semicircoli costituenti il circolo.
(Si troverà $y = 5 \pm \sqrt{-x^2 - 2x + 24}$).

Altre curve in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}\,x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse} \text{ (in } \textit{forma canonica}^{(12)}\text{)}$$

e la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

[12] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard*.

se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse*. Se $a > b$ l'ellisse appare "ribassata" e se $b > a$ l'ellisse appare "allungata verso l'alto".

Se $a = b$ si ottiene un circolo: i circoli sono particolari ellissi.

Esercizio$_\mu$ Con $a := 3$ e $b := 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

Ora vediamo una curva in equazione esplicita: la generica *parabola* con asse verticale ha equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$

La disequazione

$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$

rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga $>$, e questo è un fatto generale).
Ovviamente

$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$

rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[13] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.
Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*. La retta perpendicolare alla direttrice contenente il fuoco si chiama *asse* ed è asse di simmetria, e interseca la parabola nel *vertice*.
Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel piano – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O) e le iperboli equilatere.

[13] Insieme. Termine usato in geometria.

Sono intersezione del piano cartesiano con un *cono completo*.

Nota. Tutti i circoli sono simili, com'è ovvio. Per quanto sorprendente, anche tutte le parabole sono simili. Non tutte le ellissi sono simili, nè le iperboli.

Esercizio: intersezione retta-parabola$_\mu$
La Formula di Keys – fra i numerosi standard – calcola

$$peso\,ideale\,uomini = (statura\,in\,metri)^2 \times 22.1 \qquad (*)$$

Per quale statura (realistica) essa dà – per gli uomini – lo stesso peso della Formula di Broca

$$peso\,ideale = (statura\,in\,centimetri - 100) \pm 10\%$$

intesa senza la tolleranza del 10%?

Svolgimento
La Formula di Broca intesa senza la tolleranza del 10% è ovviamente

$$peso\,ideale = statura\,in\,centimetri - 100$$

ovvero

$$peso\,ideale = (statura\,in\,metri - 1) \times 100 \qquad (**)$$

da mettere a sistema con la $(*)$:

$$\begin{cases} p = 22.1\,h^2 & \text{che è la } (*) \\ p = 100\,(h-1) & \text{che è la } (**) \end{cases}$$

e uguagliando si ha successivamente

$$22.1\,h^2 = 100\,(h-1)$$
$$22.1\,h^2 - 100\,(h-1) = 0$$
$$22.1\,h^2 - 100\,h + 100 = 0$$
$$h_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 22.1 \cdot 100}}{22.1}$$
$$h \approx 3.03 \quad \vee \quad h \approx 1.49$$

e ovviamente la prima soluzione non ha senso dal punto di vista della realtà sensibile (è ovvio che tutte queste formule hanno un certo dominio entro il quale funzionano bene, e poi perdono significato nella realtà).

$$\boxed{\approx 149\, cm}$$

(Il peso ideale corrispondente sarebbe $\approx 49\, kg$).

5.2 Area del segmento parabolico, ed epidemie

Mentre l'area del triangolo è notoriamente $\frac{1}{2}\, b\, h$, l'area del segmento parabolico – la cui definizione lasciamo all'intuitivo lettore – è

$$A = \frac{2}{3}\, b\, h$$

Questo ci permette di stimare a colpo d'occhi il numero totale di morti di un'epidemia disponendo di un istogramma a barre (bar chart) dei morti giornalieri, se – come spesso succede – esso disegna più o meno un segmento parabolico:

$$morti = \frac{2}{3}\, durata \times picco$$

(Ovviamente la durata va intesa in giorni e sarà bene non prendere il valore di picco effettivo ma mediarlo coi valori dei giorni vicini, anche a occhio).

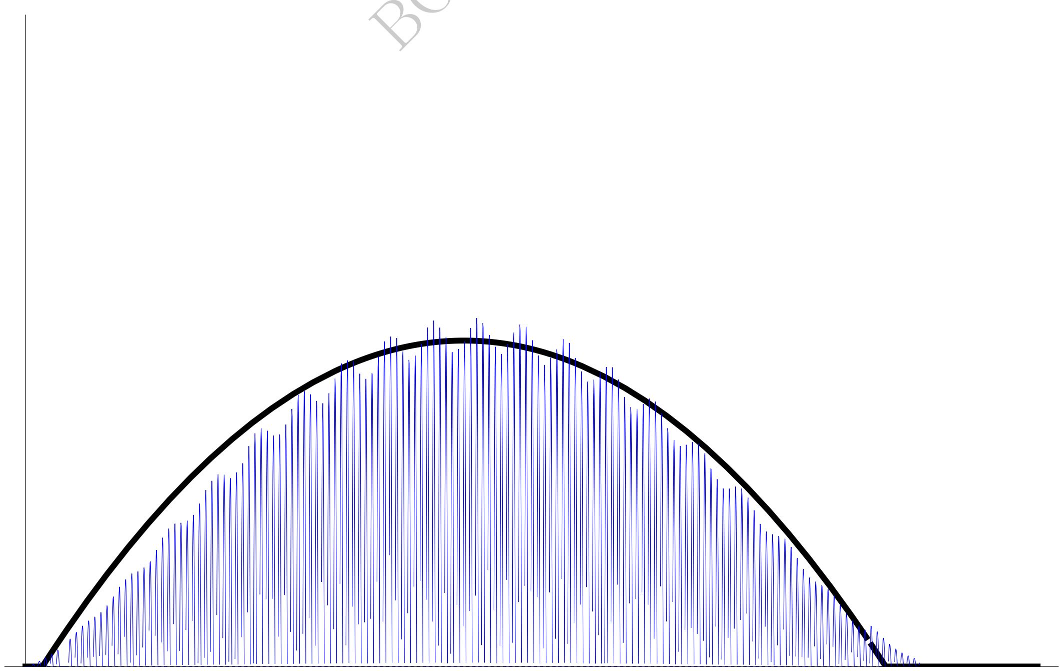


Figure 2: Modellizzazione del numero giornaliero di morti di un'epidemia con una parabola

In generale una migliore approssimazione dell'andamento del numero dei morti delle epidemie si ha con curve "a campana" che crescono poco all'inizio e dotate di una "coda destra".

5.3 Altre figure nel piano cartesiano

Con le rette (non verticali) e le coniche, e i grafici di $\text{sgn}(x)$ e $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, e ce ne sono infiniti altri, per esempio (quello della funzione)

$$y = \sqrt[3]{x}$$

e, oltre alle rette verticali, infinite altre curve in rappresentazione implicita, per esempio il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

`x^3+y^3-3xy=0`

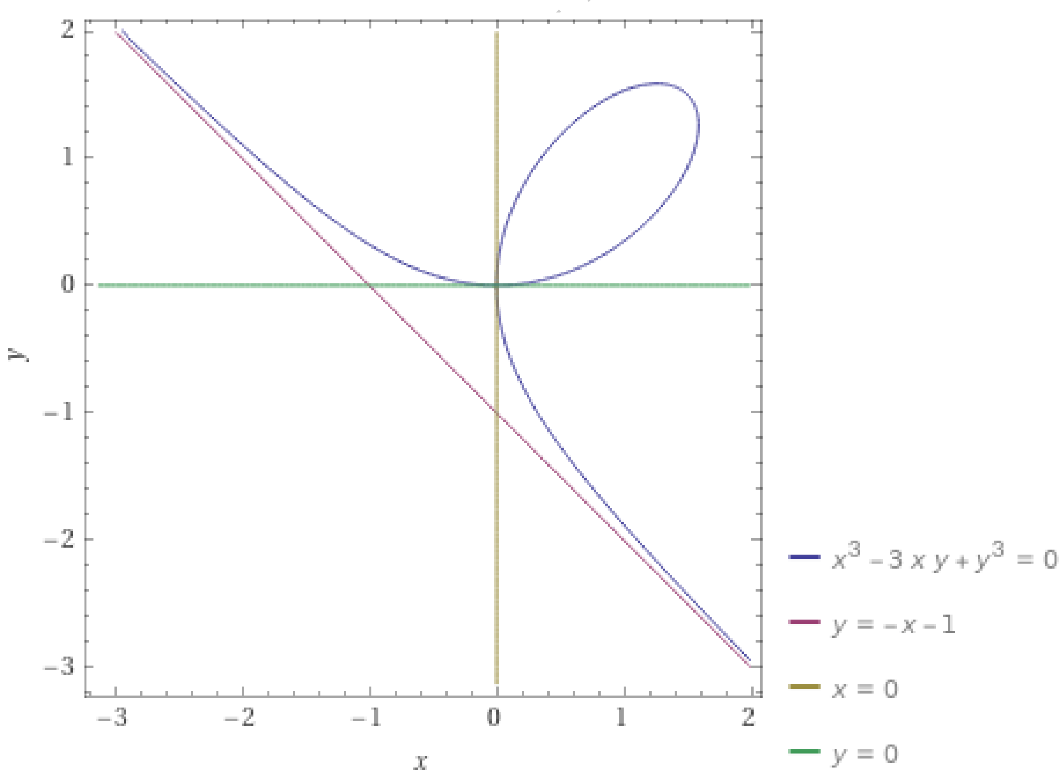


Figure 3: Folium di Cartesio e suo asintoto $y = -x - 1$

(avendo scelto $a \coloneqq 1$ per fare un esempio concreto).

5.4 Risolvere le equazioni con calcoli o disegni?

Come norma generale bisogna risolvere le equazioni analiticamente, cioè coi calcoli, per quanto possibile, perchè esistono casi in cui il disegno inganna.
Tuttavia fare i disegni è comunque utilissimo

- per verificare la correttezza dei risultati trovati
- per una comprensione complessiva della situazione
- per presentare divulgativamente i risultati, o per presentarli in modo chiaro in relazioni tecniche
- per un tentativo seppure incerto di soluzione almeno approssimata quando il calcolo analitico è impossibile o proibitivamente difficile.

Come esempio dell'ultimo caso si consideri il *sistema di 2 equazioni in 2 incognite di* 6° *grado*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal disegno (sperabilmente, e, in effetti, in questo caso non ingannevole) vediamo che ci sono 4 soluzioni, e abbiamo anche loro approssimazioni, tanto migliori quanto più grande e preciso è il disegno.

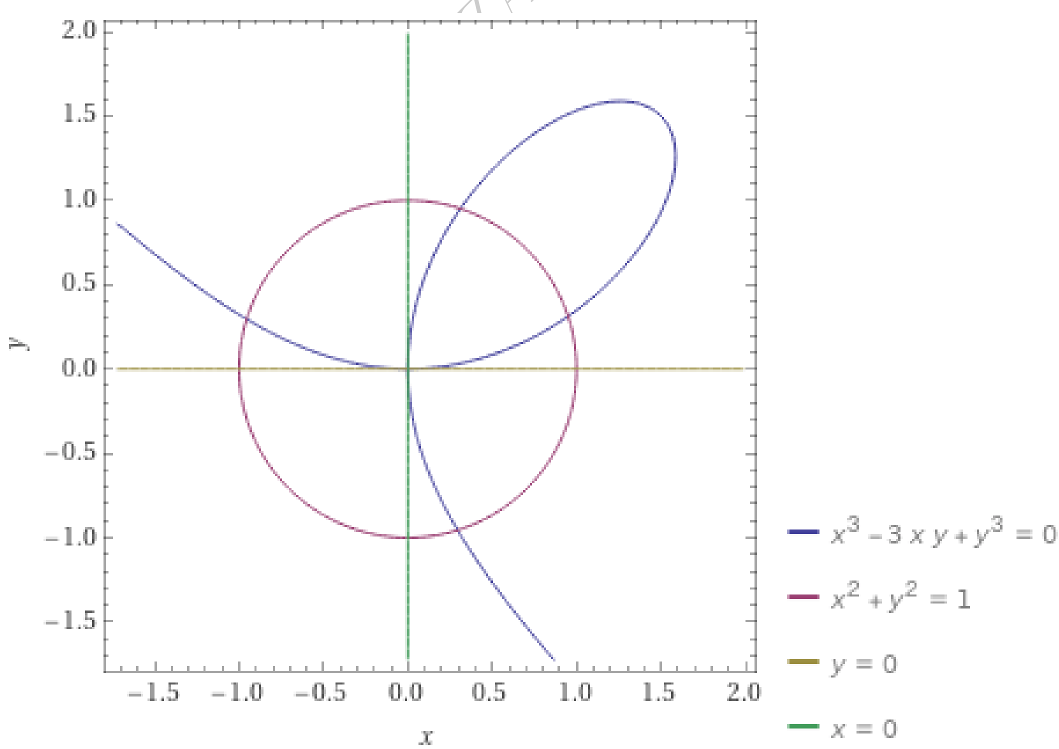


Figure 4: Intersezioni del folium di Cartesio col circolo unitario di centro l'origine

La soprastante figura è stata ottenuta con la più potente intelligenza artificiale attualmente online gratuitamente, WolframAlfa, (qua utilizzata per ben piccola cosa) con cui il futuro Ingegnere farà bene a familiarizzare. Si segua questo LINK.
Si noti che WolframAlfa dice che non ci sono soluzioni, ma questo è dovuto al fatto che per fare un disegno chiaro sono state aggiunte alle 2 equazioni date le 2 equazioni degli assi cartesiani, e togliendo queste ultime dà le 4 soluzioni cercate, approssimate con parecchi decimali: LINK.

6 Funzioni Trigonometriche I

6.1 Introduzione

Le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate di interesse ingegneristico: Fisica, Topografia, Teoria dei Segnali, Ingegneria Aerospaziale e Navale... Uno degli strumenti matematici più usati dall'Ingegnere è l'Analisi di Fourier, basata sulle funzioni trigonometriche.

6.2 Definizioni

Supponiamo noti i concetti di
punto
segmento e sua lunghezza
retta e semiretta, retta orientata e semiretta orientata
piano e semipiano e piano cartesiano
angolo e angolo orientato, e loro vertice e lati
angolo retto, angolo piatto e angolo giro
circolo, semicircolo, e loro raggio e diametro.

L'intersezione di un angolo di vertice P con un circolo di centro P è un *arco di circolo*, di cui si suppone nota come concetto primitivo la nozione di *lunghezza*. Se il raggio del circolo è 1 quella lunghezza si chiama *misura in radianti* dell'angolo.

La lunghezza di un semicircolo di raggio 1 è stata studiata per millenni e oggi si sa che è
≈ 3.1416
≈ 3.14
e il suo valore esatto
3.14159...
si denota con π. Che allora è la misura dell'angolo piatto.

Nel piano cartesiano di assi X, Y e origine O consideriamo il circolo di centro O e raggio 1 (*circolo goniometrico)*. Ad ogni *angolo goniometrico* (che è orientato e ha un lato sul semiasse delle ascisse positive) di misura in radianti $x \in [-2\pi, 2\pi]$, e poi in effetti *facendo anche più di 1 giro*, $x \in \mathbb{R}$, associamo il punto $P(x)$ corrispondente sul circolo goniometrico.
Si definiscono le funzioni *seno* e *coseno*, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\sin(x) := ordinata(P(x)) \qquad \cos(x) := ascissa(P(x))$$

e *tangente* e *cotangente*

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Per esempio si ha (banalmente le prime 2, difficilmente la terza)

$$\sin\pi = 0 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \sin 1 \approx 0.84 \tag{2}$$

Classicamente sono state considerate molte altre funzioni trigonometriche, in particolare l'*emisenoverso* $\frac{1-\cos x}{2}$ di grande importanza per la formula nautica e in generale geografica, che troviamo su Wikipedia[14]:

$$emisenoverso\left(\frac{d}{R}\right) =$$
$$= emisenoverso(\Delta\phi) + \cos(\phi_1)\cos(\phi_2) emisenoverso(\Delta\lambda)$$

ϕ_1, ϕ_2 sono le latitudini dei due punti
R è il raggio della sfera che approssima la Terra
d è la distanza fra i due punti (calcolata lungo una geodetica, ovvero un cerchio di raggio massimo che passa per i punti)
$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ è la differenza fra le latitudini dei due punti
$\Delta\lambda$ è la differenza fra le longitudini dei due punti.

L'ambiguità notazionale è notevole: per esempio Wikipedia in inglese per l'emisenoverso elenca[15] 11 fra nomi e simboli, da "haversed sine" a "hv" passando per "sem".
La ben più comune cotangente si troverà indicata
cotg
ctg
cotan
cotang
cot ← standard ISO 80000-2:2009[16]

6.3 Periodicità

Il punto goniometrico è palesemente 2π–periodico, $P(x + 2\pi) = P(x)$ e allora $P(x + 2k\pi) = P(x)$ per ogni k intero, dal che si vede subito la periodicità

[14] https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_dell%27emisenoverso
[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Versine#Overview
[16] Si veda per esempio https://ja.wikipedia.org/wiki/ISO_80000-2

del seno e del coseno, mentre con considerazioni meno elementari si trova che tangente e cotangente sono π-periodiche:

$$\sin(x+2k\pi) = \sin(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos(x+2k\pi) = \cos(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot(x+k\pi) = \cot(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\tan(x+k\pi) = \tan(x), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

6.4 Simmetrie

Dalla disegno del circolo goniometrico capiamo subito che

il seno è dispari: $\sin(-x) = -\sin x$
il coseno è pari: $\cos(-x) = \cos x$
la tangente è dispari: $\tan(-x) = -\tan x$
la cotangente è dispari: $\cot(-x) = -\cot x$

Un'quazione di I grado con vari elementi visti$_\mu$ $\approx$
Risolvere l'equazione

$$\cos\pi + \sqrt[4]{3{,}8416} + x \lg\frac{1}{2} = 0$$

dando la soluzione approssimata con 2 decimali. Potrà essere utile questa tavola di valori notevoli:

α	0°	90°	180°	270°
$\cos\alpha$	1	0	-1	0

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard della virgola decimale.

Sperabilmente si ricorderà che un angolo pari π (radianti) misura 180° (è l'angolo piatto) oppure lo si ricava ricordando che l'angolo (giro) di 360° corrisponde a $2\,\pi$ (radianti). (Oppure ancora, lo si ricava dalla nota proporzione che consente la conversione fra gradi e radianti $\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x°$).
Poi dalla tabella ricaviamo (o si sa a memoria)

$$\cos\pi = \cos 180° = -1$$

La radice quarta è la radice quadrata della radice quadrata:

$$\sqrt[4]{3{,}8416} = \sqrt{\sqrt{3,8416}} = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$$

Allora abbiamo l'equazione

$$-1 + 1{,}4 = -x \lg \frac{1}{2}$$

da cui

$$x = -\frac{0{,}4}{\lg \frac{1}{2}}$$

che è la soluzione esatta, e ricordando che $\lg \frac{1}{t} = -\lg t$

$$x = \frac{0{,}4}{\lg 2}$$

che ancora è la soluzione esatta, e ricordando il valore approssimato $\lg 2 \approx 0{,}3$ – che è alla base della classica approssimazione ingegneristica dei 3 decibel col raddoppio – si trova, con 2 decimali come richiesto,

$$\boxed{\approx 1{,}33}$$

(Un valore più preciso che si trova col computer è ≈ 1.32877).

6.5 Area sotto una "campata" di sinusoide

Coi metodi del calcolo integrale si può dimostrare che l'area sotto una "campata" della sinusoide è 2 e l'area sotto una campata di $h \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$, da 0 a b, è $\frac{2}{\pi}\, b\, h$, da confrontarsi con l'analoga formula dell'area del segmento parabolico.

Figure 5: Campate parabolica e sinusoidale: la parabola è sopra

7 Funzioni Trigonometriche II

7.1 Gradi e radianti

La misura dell'angolo piatto di π radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di 180°, e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ \tag{3}$$

che consente di passare da un sistema all'altro.

Esercizio$_\mu$
Qual è la misura in radianti di un angolo di 150°?

SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{x_{rad}}{150^\circ} \qquad \Big/ \cdot 150^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} \cdot 150^\circ = x_{rad}$$

$$x_{rad} = \frac{15}{18}\pi_{rad}$$

$$\boxed{\tfrac{5}{6}\pi}$$

Esercizio$_\mu$
Qual è la misura in gradi di un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti?

SVOLGIMENTO
Sappiamo che 180° sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180^\circ = x_{rad} : x^\circ$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180^\circ = \frac{2}{3}\pi_{rad} : x^\circ$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180^\circ} = \frac{\frac{2}{3}\pi_{rad}}{x^\circ} \qquad \Big/ \cdot \frac{180^\circ \cdot x^\circ}{\pi_{rad}}$$

$$x^\circ = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ$$

120°

7.2 Angoli notevoli

Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$

e un qualche interesse ha anche 1 rad $\approx 57°$, e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (3). Quasi mai si scrive *rad*, in Analisi Matematica assolutamente mai.

Alcuni valori numerici interessanti:

$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{4}\,rad \approx 0.785\,rad$)
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{3}\,rad \approx 1.05\,rad$)
$\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{2}\,rad \approx 1.57\,rad$).
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ (per esempio $\cos\frac{\pi}{4}$)
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ (per esempio $\sin\frac{\pi}{3}$)
$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$ (per esempio $\tan\frac{\pi}{6}$)

7.3 Alcuni valori notevoli

Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$ π	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Nello schema soprastante è da intendersi che

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(270°)$$

assolutamente non si intenda che $-\frac{\pi}{2}$ sia uguale a $-\frac{3}{2}\pi$ o a $270°$.
La considerazione del quadrato inscritto nel circolo goniometrico e coi lati paralleli agli assi, che per il Teorema di Pitagora ha lato $\sqrt{2}$, dà subito, con analogo *caveat* come sopra (e anche dopo),

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$ $\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$ $\frac{7}{4}\pi$
$x°$	45°	135°	225°	315°
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1	−1	1	−1

La considerazione dei 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico, con un vertice in $(0,1)$ e rispettivamente in $(1,0)$, dà subito, dividendoli in triangoli equilateri di lato 1 e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$ $\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$ $\frac{11}{6}\pi$
$x°$	30°	150°	210°	330°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$ $\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$ $\frac{5}{3}\pi$
$x°$	60°	120°	240°	300°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

La considerazione di decagoni regolari darebbe ancora altri valori.

7.4 Alcune formule goniometriche notevoli

Nel corso dei secoli sono state dimostrate moltissime formule. Ecco alcune delle principali.

Identità goniometrica fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{4}$$

Formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
\end{aligned}$$

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x \cos x$$

$$\cos(2\,x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\,\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\,\sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan(2\,x) = \tfrac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x}, \qquad x \neq \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Formule di prostaferesi:

$$\begin{array}{l} \sin x + \sin y = 2\,\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y = 2\,\cos\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y = 2\,\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y = -2\,\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2} \end{array}$$

Formule di bisezione della tangente:

$$\tan\frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{\sin x}{1+\cos x}, & x \neq (2\,k+1)\,\pi \\ \\ \frac{1-\cos x}{\sin x}, & x \neq k\,\pi \end{cases} \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

Formule parametriche razionali per il seno e il coseno

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

dove

$$t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \alpha \neq \pi + 2\,k\,\pi$$

Decine di altre formule in
https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities

8 Funzioni Trigonometriche III

8.1 Trigonometria – la goniometria dei triangoli

Teorema dei seni.[17] In un triangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti α, β, γ

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Teorema del Coseno.[18] In un triangolo di lati a, b, c, con angolo γ opposto al lato di misura c

$$c^2 = a^2 + b^2 - a\,b\cos\gamma.$$

Ed esistono poi innumerevoli altre formule di trigonometria.

8.2 Funzioni goniometriche inverse

Arcoseno, funzione dispari:
$\arcsin x$ è l'angolo α il cui seno è x, con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Arcocoseno:
$\arccos x$ è l'angolo α il cui coseno è x, con $\alpha \in [0, \pi]$.

Arcotangente, funzione dispari:

$\arctan x$ è l'angolo α la cui tangente è x, con $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.

In simboli:

$$\arcsin := \left(\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1}$$

[17] Nasir al-Din al-Tūsī, persiano, XIII sec. d.C. "He is often considered the creator of trigonometry as a mathematical discipline in its own right", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

[18] Euclide, greco, III sec. a.C., ben noto, e Jamshīd al-Kāshī, persiano, XIII sec. d.C. "Much of al-Kāshī's work was not brought to Europe, and much, even the extant work, remains unpublished in any form", Wikipedia, l'enciclopedia libera (in inglese). "è noto anche [...] specialmente in Italia, come teorema di Carnot, dal nome del matematico francese Lazare Carnot, anche se in realtà il teorema è stato reso popolare dal francese François Viète", Wikipedia, l'enciclopedia libera (in italiano).

$$\arccos := \left(\cos\big|_{[0,\pi]} \right)^{-1}$$

$$\arctan := \left(\tan\big|_{]-\pi/2,\pi/2[} \right)^{-1}$$

Questi $^{-1}$ indicano la funzione inversa, assolutamente non la reciproca. (Questa del $^{-1}$ è una grave ambiguità notazionale della Matematica, che richiede intelligenza, caso per caso).

Alcuni valori notevoli. Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\nexists$
arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono. (Per esempio $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.61548$).

8.3 L'ambiguità notazionale dell'esponente -1

Una delle pù gravi ambiguità notazionali della matematica è quella dell'esponente -1***, che ha sostanzialmente 3 significati: reciproco, inversa, controimmagine; che spesso vengono confusi dai non matematici.***

Cerchiamo di fare chiarezza.

Figure 6: Don Quixote Attacking the Windmill (1835), John Doyle, Metropolitan Museum of Art. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Don_Quixote_Attacking_the_Windmill_MET_DP868289.jpg

Certamente

$$a^{-1}$$

indica inequivocabilmente il reciproco $\frac{1}{a}$ di a se a è un numero, ma se è una funzione – e può ben esserlo – cominciano problemi:

$$f^{-1}(x)$$

in questa trattazione significherà sempre l'inversa di $f(x)$ mentre la reciproca la denoteremo $\frac{1}{f(x)}$ e casomai, volendoci del male, $(f(x))^{-1}$. Il problema maggiore si ha quando – e concretamente ciò viene fatto spesso – in lunghi calcoli per brevità di scrittura si omette di indicare la variabile indipendente, e si scrive f intendendo $f(x)$, lasciando nell'incertezza riguardo la scrittura f^{-1}. Così all'atto pratico ci si ritrova sempre con qualcuno che pensa che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, o il logaritmo il

reciproco dell'esponenziale (invece è l'inversa).
Resta il fatto che in un testo diverso da questo, la scrittura

$$\ln^{-1}(x)$$

è ambigua, e può indicare sia $\exp(x)$ che $\frac{1}{\ln(x)}$. In questo testo solo $\exp(x)$.

Inoltre, l'esponente -1 è usato per indicare anche tutta un'altra cosa, la controimmagine, che non è un elemento ma un insieme; per esempio $f^{-1}(\mathbb{R})$.

8.4 Esercizi sull'arcoseno

Esercizio$_{\mu2018}$ Calcolare approssimatamente $\arcsin\frac{21}{25}$ (a mano, ovvio, ma anche prendere confidenza con una calcolatrice scientifica sarà un bene). Si cerchi poi il valore online su WolframAlpha con

```
ArcSin[21/25]
```

Svolgimento
Calcoliamo $21 : 25 = 0.84$ (con la divisione a mano, o meglio osservando che $\frac{21}{25} = \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{4} = 0.84$) e insomma cerchiamo un angolo, fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il cui seno sia 0.84. Ricordando (vedi (2)) che $\sin 1 \approx 0.84$ concludiamo $\arcsin\frac{21}{25} \approx 1$.
WolframAlpha con `ArcSin[21/25]` ci dà ≈ 0.997.

Esercizio$_{\mu2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x > 0.8$$

Svolgimento
(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{\arcsin(0.8) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$0.9272... + 2k\pi < x < 2.2142... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\sin x \leq 0.8$$

(Aiutandoci senz'altro con un disegno del circolo goniometrico) si trova subito

$$\boxed{-\pi - \arcsin(0.8) + 2k\pi \leq x \leq \arcsin(0.8) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

numericamente

$$-4.0688... + 2k\pi < x < 0.9272... + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si veda su Wolframalpha il grafico di $\sin x - 0.8$ fra $-\frac{3}{2}\pi$ e $\frac{\pi}{2}$: `Link->`. (Curva sotto lo 0 da circa -4 a circa 1; è stato rappresentato un periodo di 2π, poi si ripete; usare altri intervlli, come $[-\pi, \pi]$ invece di $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$, potrebbe portare a più complesse espressioni della soluzione, comunque valide).

9 Esercizi sulle funzioni trigonometriche

Esercizio$_{\mu 2018}$ Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, corrispondenti appunto a $\sin x = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

(Si notino le periodicità).

Esercizio$_{\mu}$
La temperatura – considerata senza unità di misura– in una cella frigorifera sia modellizzata nelle 24 ore del giorno da

$$u_a(t) := 2\,a + a\,\sin\frac{\pi\,t}{12} \qquad 0 \le t \le 24$$

essendo a un parametro fissabile con una manopola. In quale orario la temperatura è ≥ 2.5 per $a := 1$?

Svolgimento.
Seppure non sia necessario per risolvere il problema, vediamo su WolframAlpha il grafico della temperatura per $a := 1$ scrivendovi

```
plot 2+Sin[Pi t/12], t from 0 to 24
```

Ora (con $a := 1$) abbiamo la disequazione

$$2 + \sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 2.5 \qquad \Big/ + (-2)$$

$$\sin\frac{\pi\,t}{12} \ge 0.5$$

$$\text{poniamo } x := \frac{\pi\,t}{12} \text{ ottenendo } \sin x \ge \frac{1}{2}$$

e ci interessano solo i tempi

$$0 \le t \le 24 \qquad \Big/ \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$0 \le \frac{\pi\, t}{12} \le 2\,\pi \text{ cioè } 0 \le x \le 2\,\pi$$

e allora in $[0, 2\,\pi]$ dobbiamo risolvere $\sin x \ge \frac{1}{2}$, che si fa disegnando il circolo goniometrico, trovando subito (sono valori notevoli)

$$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi\, t}{12} \le \frac{5}{6}\pi \Big/ \cdot \frac{12}{\pi}$$
$$2 \le t \le 10$$

e in conclusione

$$\boxed{\text{Fra le 2 e le 10 di mattina}}$$

Esercizio$_{\mu}$ Approssimare $\cos(1)$ usando le (2) e (4).
Si verifichi poi su WolframAlpha con `Cos[1]`

Esercizio$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2 \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Svolgimento
Con la formula di addizione del coseno

$$2\Big(\cos x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\left((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\cos x - \sqrt{3}\sin x$$

e con il secondo membro così riscritto la disequazione equivale a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < -\cos x - \sqrt{3}\sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < -\sqrt{3}\sin x$$

$$-\sqrt{3}\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big/ : (-\sqrt{3}) < 0$$

$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da $-\frac{5}{6}\pi$ fino a $-\frac{\pi}{6}$, estremi esclusi, corrispondente appunto a $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{-\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

equivalentemente scritta

$$\boxed{\tfrac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \tfrac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Esercizio$_{\mu 2018}$ Calcolare approssimatamente $\arcsin\frac{21}{25}$ (a mano, ovvio, ma anche prendere confidenza con una calcolatrice scientifica sarà un bene).
Si cerchi poi il valore online su WolframAlpha con

`ArcSin[21/25]`

Svolgimento

Calcoliamo $21 : 25 = 0.84$ (con la divisione a mano, o meglio osservando che $\frac{21}{25} = \frac{21}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{84}{100} = 0.84$) e insomma cerchiamo un angolo, fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, il cui seno sia 0.84. Ricordando (vedi (2)) che $\sin 1 \approx 0.84$ concludiamo $\arcsin\frac{21}{25} \approx 1$.
WolframAlpha con `ArcSin[21/25]` ci dà ≈ 0.997.

APPENDICE A
ALTRI ESERCIZI RISOLTI

Esercizio$_{\mu 2018}$

$\ast$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 8:00 di mattina concentrazione 50 mg/dl e alle 6:00 di sera concentrazione 82 mg/dl. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura).

Trovare la retta per i 2 punti espressa in forma esplicita, senza unità di misura.

(Con essa si potrebbe ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione; ma qua non ne faremo nulla).

Svolgimento

Osservato che le 6:00 di sera sono le 18:00, cioè a 18 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(8\,h, 50\,mg/dl), (18\,h, 82\,mg/dl) \quad \text{ovvero meglio} \quad (8, 50), (18, 82)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 18}{8 - 18} = \frac{y - 82}{50 - 82}$$

$$\frac{t - 18}{-10} = \frac{y - 82}{-32} \quad \Big/ \cdot (-1) \cdot 10 \cdot 32$$

$$32\,(t - 18) = 10\,(y - 82)$$

$$32\,t - 576 - 10\,y = -820$$

$$-10\,y = -32\,t - 244$$

$$\boxed{y = 3.2\,t + 24.4}$$

anche esprimibile con

$$\boxed{y = \frac{16}{5}\,t + \frac{122}{5}}$$

(Da cui p.es. a mezzogiorno, $t := 12$, la concentrazione ipotetica 62.8 mg/dl).

Esercizio$_{\mu 2018}$

$\star$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 6:00 di mattina concentrazione 70 nmoli/L e alle 9:00 di sera 150 nmoli/L. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura, h e poi nmoli/L).
Con la retta per i 2 punti si può ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione. Con l'equazione esplicita di quella retta, senza unità di misura, calcolare l'ora in cui la concentrazione è salita a ≥ 110 (nmoli/L, unità di misura che non esprimiamo per semplicità).

Svolgimento

Osservato che le 9:00 di sera sono le 21:00, cioè a 21 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(6\,h, 70\,nmoli/L), (21\,h, 150\,nmoli/L) \quad \text{ovvero meglio} \quad (6, 70), (21, 150)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 21}{6 - 21} = \frac{y - 150}{70 - 150}$$

$$\frac{t-21}{-15} = \frac{y-150}{-80} \quad \Big/ \cdot (-1) \cdot 15 \cdot 80$$
$$80\,(t-21) = 15\,(y-150)$$
$$80\,t - 1680 - 15\,y = -2250$$
$$-15\,y = -80\,t - 570$$

e dividendo per -15

$$y = \frac{16}{3}\,t + 38$$

e ora risolviamo la disequazione della concentrazione $y \geq 110$

$$\frac{16}{3}\,t + 38 \geq 110$$
$$\frac{16}{3}\,t \geq 110 - 38$$
$$\frac{16}{3}\,t \geq 72$$
$$t \geq 72 \cdot \frac{3}{16} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

cioè a 13.5 ore dalla mezzanotte, cioè 13 ore e mezza, cioè alle

$$\boxed{13{:}30}$$

Esercizio$_{\mu 2020}$

$\star\ \star$ Supponiamo che la Protezione Civile mandi urgentemente in massa, automaticamente, l'SMS "Bollire l'acqua di rubinetto prima di bere - pericolo di malattia infettiva". (Invii automatici sono stati fatti in passato). Si abbiano questi risultati, con il numero di messaggi inviati espresso in milioni:

Ore: 5:00 Messaggi inviati: 2.3

Ore: 10:00 Messaggi inviati: 3.5

Supponendo una crescita lineare, si trovi l'equazione della grandezza conside-rata (cioè "Messaggi inviati", che possiamo indicare per esempio con y) in funzione del tempo t, e a che ora sono state

inviati 3,100,000 messaggi.
(Non è necessario convertire in forma frazionaria i dati assegnati).

SVOLGIMENTO

Si usa lo standard del punto decimale. (Perchè solo questo può essere il punto dei dati 2.3 e 3.5).
Si suppone una crescita lineare e allora il grafico nel piano cartesiano sarà la retta per i 2 punti

$$(5, 2.3) \quad (10, 3.5)$$

di equazione

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

(con ovvio significato dei simboli) e cioè

$$\frac{t - 10}{5 - 10} = \frac{y - 3.5}{2.3 - 3.5}$$

$$\frac{t - 10}{-5} = \frac{y - 3.5}{-1.2}$$

$$y = \frac{1.2}{5}(t - 10) + 3.5$$

$$\boxed{y = 0.24\,(t - 10) + 3.5}$$

che può considerarsi espressa in forma definitiva, oppure si apre la parentesi ottenendo

$$y = 0.24\,t - 2.4 + 3.5$$

$$y = 0.24\,t + 1.1$$

che preferiremo nel risultato finale. (Attenzione: y è in milioni).

Per trovare a che ora valeva 3.1 (milioni, ovvio!) risolviamo l'equazione

$$0.24\,t + 1.1 = 3.1$$

$$0.24\,t = 3.1 - 1.1$$

$$0.24\,t = 2$$
$$t = \frac{2}{0.24} =$$

moltiplicando numeratore e denominatore per 100

$$= \frac{200}{24} = \frac{100}{12} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} = \qquad (\star)$$

che vale $8.\overline{3} = 8.3333333...$ ma queste 2, e tantomeno le frazioni precedenti, non sono valide rappresentazioni di un'ora. Piuttosto (ricordando la nota $\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.3333333...$) riprendiamo da $(\star)$ scomponendo in questo modo:

$$(\star) \qquad = \frac{24+1}{3} = 8 + \frac{1}{3}$$

ovvero le 8 più $\frac{1}{3}$ di ora, cioè 20 minuti, ossia le 8:20.

$$\boxed{\begin{array}{c} y = 0.24\,t + 1.1 \\ \\ 8{:}20 \end{array}}$$

APPENDICE B
ESERCIZI DA RISOLVERE

Esercizio$_\mu$
$\ast$ [*disegno*] Si considerino 2 parametri fisiologici $p > 0$ e $q > 0$ per i quali si definisce *situazione normale* se (p, q) sta entro la curva

$$\frac{p^2}{100} + q^2 = 1$$

e *situazione anormale* altrimenti. (Per semplicità sono state omesse le unità di misura). Com'è la situazione coi valori $p = 5.6$ e $q = 0.73$? Si rappresenti graficamente la situazione.

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[4]{x}$. (Per esempio in $[-16, 16]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/4)`).

Esercizio$_\mu$
Disegnare per punti un grafico approssimativo di $\sqrt[8]{x}$ in $[-1, 1]$ ma si noti che non è definita per $x < 0$). (È funzione crescente il che permette di escludere "arzigogoli" della curva, in generale non facili da escludere per una funzione generica, e allora anche pochi punti – purchè ben scelti – potranno dare un'idea della situazione). (Suggerimento: si calcolino con la calcolatrice le radici ottave di 0.1, 0.2,..., 0.9 con $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$, e a mano quelle di 0 e 1). (Si verifichi poi su WolframAlpha con `x^(1/8)`).