1 Equazioni differenziali

Definizione 1.1. Un'equazione in cui l'incognita è una funzione è detta **equazione funzionale**.

Esempio 1.2. Si consideri l'equazione

$$F(x, y) = 0$$

dove $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di due variabili reali. Assegnata la funzione F, che è il **dato**, si cerca una funzione **incognita** $y(x)$ tale che $F(x, y(x)) = 0$. E' il problema delle funzioni implicite. Sappiamo che, sotto opportune ipotesi ed aggiungendo la condizione $y(x_0) = y_0$, con $(x_0, y_0) \in A$, tale che $F(x_0, y_0) = 0$, esiste un'unica soluzione di tale equazione funzionale, definita in un opportuno intorno di x_0 (soluzione "in piccolo").

Definizione 1.3. Un'equazione funzionale in cui compare almeno una derivata della funzione incognita è detta **equazione differenziale**.

Esempio 1.4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x), \tag{1.1}$$

dove f è una funzione continua definita in un intervallo aperto I. Si tratta del problema della ricerca della primitiva. Sappiamo che, fissato $x_0 \in I$, tutte e sole le soluzioni di (1.1) sono date, al variare di $c \in \mathbb{R}$, da

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

Se si aggiunge la condizione $y(x_0) = y_0$, la soluzione è univocamente determinata:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in I.$$

Definizione 1.5. Un'equazione differenziale si dice **ordinaria** (ODE) se la funzione incognita dipende da una sola variabile, si dice **a derivate parziali** (PDE) se dipende da più variabili.

Esempio 1.6. L'equazione differenziale ordinaria

$$mx''(t) = -kx(t),$$

descrive il moto (armonico) di una molla.

L'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

è l'equazione delle onde unidimensionale.

La seconda legge della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

è un'equazione differenziale **vettoriale**. Se $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ indica la posizione al tempo t di un punto materiale di massa m, soggetto a una forza $\mathbf{F}(t, P(t), \mathbf{v}(t))$ si ha

$$mP''(t) = \mathbf{F}(t, P(t), \mathbf{v}(t)),$$

ovvero, per componenti,

$$\begin{cases} mx''(t) = F_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) \\ \\ my''(t) = F_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) \\ \\ mz''(t) = F_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)) \end{cases}$$

si ha un sistema di 3 equazioni differenziali in 3 funzioni incognite. Per determinare univocamente una soluzione di solito si assegnano la posizione e la velocità in un fissato istante di tempo:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0 \\ \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \\ \\ z(t_0) = z_0, \quad z'(t_0) = z'_0 \end{cases}$$

La generica equazione differenziale ordinaria ha la seguente forma

$$F(t, y(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0, \tag{1.2}$$

dove $F : A \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Il massimo ordine di derivazione della funzione incognita è detto **ordine dell'equazione differenziale**. Dunque (1.2) è la generica equazione differenziale ordinaria di ordine n.

L'equazione (1.2) è detta **in forma normale** se si può esplicitare la derivata di ordine massimo, scrivendola nella forma

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), ..., y^{(n-1)}(t)), \tag{1.3}$$

con $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Se F in (1.2) o f in (1.3) non dipendono dalla variabile indipendente t, l'equazione si diece **autonoma**.

Definizione 1.7. Si dice soluzione di (1.2) una funzione $y = y(t)$ definita su un intervallo I, ivi derivabile n volte, e tale che

$$(t, y(t), ..., y^{(n)}(t)) \in A, \quad \forall t \in I,$$

$$F(t, y(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I,$$

talvolta la prima di queste condizioni essendo considerata sottintesa nella seconda. Se I contiene un suo estremo, ad esempio se $I = (a, b]$, la derivabilità in b va intesa nel senso dell'esistenza della derivata sinistra.

Come suggerito dagli esempi, per determinare univocamente una soluzione sarà necessario imporre delle condizioni. Le condizioni più comunemente associate a una equazione differenziale ordinaria di ordine n sono le **condizioni iniziali** o **condizioni di Cauchy**:

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.4}$$

dove $t_0 \in I$. Il problema

$$\begin{cases} F(t, y(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.5}$$

è detto **problema di Cauchy** o **problema ai valori iniziali**.

Definizione 1.8. Si dice soluzione del problema di Cauchy (1.5) una soluzione di (1.2) definita in un intervallo I **avente** t_0 **come punto interno** e verificante le condizioni iniziali (1.4).

Un **sistema di equazioni differenziali** ordinarie ha la seguente forma

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, ..., y_1^{(n_1)}; y_2, ..., y_2^{(n_2)}; ...; y_m, ..., y_m^{(n_m)}) = 0, \\ \cdots \\ F_m(t, y_1, ..., y_1^{(n_1)}; y_2, ..., y_2^{(n_2)}; ...; y_m, ..., y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

dove $F_k : A \subset \mathbb{R}^{n_1 + ... n_m + m + 1} \to \mathbb{R}$, $k = 1, ..., m$. Si dice di ordine n_k in y_k. Se $n_1 = n_2 = ... = n_m = n$, il sistema si dice di ordine n.

Definizione 1.9. Si dice soluzione di (1.6) una m-upla di funzioni $(y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t))$ definite su un intervallo I, tali che ciascuna y_k è derivabile n_k volte su I, e tali che

$$(t, y_1(t), ..., y_m^{(n_m)}(t)) \in A, \quad \forall t \in I,$$

$$F_k(t, y_1, ..., y_1^{(n_1)}; y_2, ..., y_2^{(n_2)}; ...; y_m, ..., y_m^{(n_m)}) = 0, \quad \forall t \in I, \forall k = 1, ..., m.$$

Il problema di Cauchy associato al sistema di equazioni differenziali (1.6) si ottiene assegnando il valore ad un tempo $t_0 \in I$ di ogni funzione y_k e delle sue derivate fino all'ordine $n_k - 1$.

Osservazione 1.10. Ogni equazione differenziale (o sistema di equazioni differenziali) può essere ricondotto allo studio di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, e similmente per i problemi di Cauchy. Vediamo in dettaglio il procedimento nel caso delle equazioni differenziali. Poniamo

$$y = y_0, y' = y_1, ..., y^{(n-1)} = y_{n-1} \tag{1.7}$$

Se $y(t)$ è una soluzione di (1.2), allora la n-upla $(y_0(t), y_1(t), ..., y_{n-1}(t))$ definite tramite (1.7) è soluzione del sistema di n equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} F(t, y_0(t), ..., y_{n-1}(t), y'_{n-1}(t)) = 0, \\ y'_0 = y_1, \\ y'_1 = y_2, \\ \cdots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \end{cases} \tag{1.8}$$

Viceversa, se $(y_0(t), y_1(t), ..., y_{n-1}(y))$ è una n-upla di funzioni che è soluzione del sistema (1.8), allora $y_0(t)$ è derivabile n volte ed è soluzione dell'equazione differenziale (1.2).

Tenendo conto delle posizioni (1.7), le condizioni iniziali (1.4), diventano

$$\begin{cases} y_0(t_0) = y_0, \\ \cdots \\ y_{n-1}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases} \tag{1.9}$$

cioè le classiche condizioni iniziali per un sistema del primo ordine.

Quindi lo studio del problema di Cauchy per una equazione differenziale di ordine n (e, più in generale, per un qualunque sistema di equazioni differenziali) si riconduce allo studio del problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

Svilupperemo pertanto la teoria per i problemi di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale.

Consideriamo il generico sistema del primo ordine **in forma normale**

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(t, y_1, ..., y_n), \\ \cdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, ..., y_n), \\ y_k(t_0) = y_0^k, \ k = 1, ..., n \end{cases} \tag{1.10}$$

dove $f_k : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, con A aperto.

Poniamo $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$ (funzione vettoriale di variabile reale), $y'(t) = (y_1'(t), ..., y_n'(t))$, $y_0 = (y_0^1, ..., y_0^n) \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_n)$. Allora il sistema (1.10) si può scrivere in forma compatta così

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

dove $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.11 (Teorema di esistenza di Peano). *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ continua su A aperto. Allora per ogni $(t_0, y_0) \in A$ esiste una soluzione di* (1.11)*, definita in un intervallo $I = (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$, per un oppportuno $r_0 > 0$.*

Osservazione 1.12.

1) Il teorema afferma l'esistenza di una soluzione "in piccolo" o locale.

2) L'ipotesi di continuità di f non può essere rimossa, come illustra il seguente esempio. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = H(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.12}$$

dove H è la funzione di Heavyside (discontinua nell'origine)

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Se, per assurdo, (1.12) avesse una soluzione, essa dovrebbe essere definita in un intorno dell'origine e dunque verificare in tale intorno

$$y'(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0, \\ 0, & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

da cui

$$y(t) = \begin{cases} t + c_1, & \text{se } t \geq 0, \\ c_2, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dalla continuità nell'origine seguirebbe $c_1 = c_2 = y_0$. La soluzione sarebbe quindi non derivabile nell'origine, contraddicendo la definizione di soluzione.

3) La sola continuità di f non garantisce l'unicità, come illustra il seguente esempio (**pennello di Peano**).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

Si ha che $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ è continua in $A = \mathbb{R}^2$. La funzione identicamente nulla $y \equiv 0$ è soluzione, ma sono soluzioni anche $y(t) = t^3$ e, per ogni $t^* > 0$,

$$y_{t^*}(t) = \begin{cases} (t - t^*)^3, & \text{per } t \geq t^*, \\ 0, & \text{per } t \leq t^*. \end{cases}$$

Ci sono pertanto infinite soluzioni.

Dunque, se si vuole garantire l'unicità, si dovranno fare ulteriori ipotesi.

Per poterle introdurre e dimostare un risultato di esistenza e unicità, apriamo una parentesi di approfondimento sugli spazi metrici.

Definizione 1.13. Un'applicazione tra spazi metrici $f : (X, d) \to (Y, d')$ si dice **lipschitziana** (su X) se esiste una costante positiva L (detta **costante di Lipschitz**) tale che

$$d'(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y), \quad \forall x, y \in X \tag{1.14}$$

Se f è funzione reale di variabile reale, allora la lipschitzianità significa che i rapporti incrementali di f costituiscono un insieme limitato. E' evidente che la Lipschitzianità implica la continuità, ma non viceversa. Ad esempio $f : [0, 1] \to [0, 1]$, definita da $f(x) = \sqrt{x}$ è continua ma non lipschitziana.

Definizione 1.14. Un'applicazione da uno spazio metrico in sè $f : (X, d) \to (X, d)$ è detta **contrazione** se esiste una costante positiva $L < 1$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y), \quad \forall x, y \in X, \tag{1.15}$$

ovvero f è una mappa lipschitziana in cui si può scegliere la costante di Lipschitz minore di 1.

Definizione 1.15. Sia X un insieme non vuoto e $f : X \to X$ un'applicazione (trasformazione di X in sè). Un elemento $x \in X$ si dice **punto fisso** o **punto unito** di f se $f(x) = x$.

Teorema 1.16 (Teorema delle contrazioni (principio di Banach-Caccioppoli)). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : (X, d) \to (X, d)$ una contrazione. Allora esiste un unico (punto fisso) $x \in X$ tale che $Tx = x$.*

Dimostrazione. Sappiamo che esiste $L < 1$ tale che $d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$, per ogni $x, y \in X$. Sia $x_0 \in X$ un qualunque punto di X e definiamo, ricorsivamente, la successione

$$x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Proviamo, per induzione, che

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0).$$

Per $n = 1$, si ha $d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq Ld(x_1, x_0)$.

"$n-1 \Rightarrow n$": $d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq Ld(x_n, x_{n-1}) \leq L^n d(x_1, x_0)$.

Sia ora $m > n$. Si ha che

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} L^i d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0)L^n \sum_{j=0}^{m-1-n} L^j \leq$$

$$d(x_1, x_0)\frac{L^n}{1-L} \to 0, \quad \text{per } n \to \infty. \tag{1.16}$$

Quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che

$$d(x_m, x_n) \leq \epsilon, \quad \text{per } n \geq n_\epsilon, m > n,$$

cioè la successione x_n è di Cauchy. Dalla completezza di X, segue che essa converge a un punto $x \in X$. Essendo una contrazione, T è continua e quindi Tx_n converge a Tx, ma $Tx_n = x_{n+1}$ e quindi converge a x. Per l'unicità del limite in spazi metrici, $Tx = x$ e perciò x è punto fisso di T. Se, per assurdo, esistesse un altro (punto fisso) $y \in X$, $y \neq x$ tale che $Ty = y$, allora si avrebbe

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y),$$

ed, essendo $L < 1$ e $d(x, y) > 0$, si avrebbe una contraddizione. ∎

Osservazione 1.17. Si noti che, passando al limite per $m \to \infty$ in (1.16), si ha la seguente maggiorazione dell'errore

$$d(x_n, x) \le \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0). \tag{1.17}$$

Consideriamo lo spazio vettoriale $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue definite nell'intervallo $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}^n$. Il teorema di Weierstrass, applicato alla funzione $\|f(x) - g(x)\|$ continua sul compatto $[a,b]$, permette di definire in tale spazio la seguente distanza

$$d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} \|f(x) - g(x)\|. \tag{1.18}$$

Le prime due proprietà di distanza sono elementari, per la disuguaglianza triangolare si noti che

$$\|f(x) - h(x)\| \le \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - h(x)\| \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h), \quad \forall x \in [a,b],$$

dalla quale, passando al massimo nell'espressione a primo membro, si ha

$$d_\infty(f,h) \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h).$$

Vediamo che $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ è completo rispetto a tale distanza.

Sia f_n una successione di Cauchy in $(C([a,b], \mathbb{R}^n), d_\infty)$, dunque per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \le d_\infty(f_m, f_n) \le \epsilon, \quad \forall n, m \ge n_\epsilon, \forall x \in [a,b]. \tag{1.19}$$

Segue che per ogni $x \in [a,b]$, la successione a valori in $\mathbb{R}^n$ $f_n(x)$ è di Cauchy e dunque, per la completezza di $\mathbb{R}^n$, converge a un vettore di $\mathbb{R}^n$, che indichiamo con $f(x)$. Rimane pertanto definita una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, per ogni $x \in [a,b]$. Facendo tendere m all'infinito in (1.19), si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che

$$\|f_n(x) - f(x)\| \le \epsilon, \quad \forall n \ge n_\epsilon, \forall x \in [a,b], \tag{1.20}$$

cioè per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale che

$$d_\infty(f_n, f) \le \epsilon, \quad \forall n \ge n_\epsilon. \tag{1.21}$$

Rimane da provare che $f \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$, ovvero la continuità di f.

Sia $x_0 \in [a,b]$. Essendo f_{n_ϵ} continua, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)\| < \epsilon \quad \forall x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta. \tag{1.22}$$

Da (1.21) per $n = n_\epsilon$ e da (1.22) si ha che per ogni $x \in [a, b]$ tale che $|x - x_0| < \delta$,

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_{n_\epsilon}(x)\| + \|f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)\| + \|f_{n_\epsilon}(x_0) - f(x_0)\| \leq 3\epsilon, \tag{1.23}$$

cioè f è continua in x_0.

Osservazione Sia F un sottinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo l'insieme $X = C([a, b], F)$ delle funzioni continue su $[a, b]$ a valori in F. Da quanto visto, segue facilmente che X, dotato della distanza d_∞, è uno spazio metrico completo.

Ritorniamo ora ad esaminare il problema di Cauchy (1.11).

Data $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f = f(t, y) = f(t, y_1, ..., y_n)$, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.18. f si dice **lipschitziana in A rispetto a y uniformemente in t** se

$$\exists L > 0 \ : \ \|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|, \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in A. \tag{1.24}$$

Osserviamo che solo la variabile $y = (y_1, ..., y_n)$ viene incrementata e che la costante L non dipende dalla variabile t, per questo si parla di Lipschitzianità rispetto a y uniformemente in t.

Definizione 1.19. f si dice **localmente lipschitziana in A rispetto a y uniformemente in t** se per ogni $(t_0, y_0) \in A$ esiste un intorno U di (t_0, y_0), contenuto in A, tale che

$$\exists L > 0 \ : \ \|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|, \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in U. \tag{1.25}$$

Dunque la costante L dipende sia dal punto (t_0, y_0) che dall'intorno U.

Osservazione 1.20. La condizione (1.24) non implica la continuità di f in A. Per convincersene basta considerare, nel caso $n = 1$, $f(t, y) = h(t)y$, con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitata ma discontinua. E' immediato verificare (1.24), ma f non è continua.

Definizione 1.21. Diremo che f verifica le **ipotesi di Lipschitz** in A se

i) f è continua in A;

ii) f è localmente lipschitziana in A rispetto a y uniformemente in t.

Proposizione 1.22. *Se f verifica le ipotesi di Lipschitz in A, allora per ogni compatto $K \subset A$, esiste $L = L(K) > 0$ tale che*

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|, \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in K. \tag{1.26}$$

Omettiamo la dimostrazione della Proposizione 1.22.

Osservazione 1.23. Se f è dotata di tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, per $i, j = 1, ..., n$, continue in A, allora la condizione ii) è verificata. Sia infatti $(t_0, y_0) \in A$ e sia U un intorno compatto e convesso di (t_0, y_0), contenuto in A (ad esempio una palla chiusa). Indichiamo con $\nabla_y f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right)$ il gradiente di f_i rispetto alle sole $y_1, ..., y_n$. Applicando il teorema del valor medio a $f_i(t, \cdot)$, a t fissato, come funzione delle sole variabili y, si ha che per ogni (t, y), $(t, \tilde{y}) \in U$, esiste un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$, appartenente al segmento che unisce y a $\tilde{y}$, tale che

$$f_i(t, y) - f_i(t, \tilde{y}) = \nabla_y f_i(t, \xi) \cdot (y - \tilde{y}),$$

da cui

$$|f_i(t, y) - f_i(t, \tilde{y})| \leq \|\nabla_y f_i(t, \xi)\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \leq M_i \|y - \tilde{y}\|,$$

dove $M_i = \max_U \|\nabla_y f_i\|$. Quindi si ha

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|, \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in U,$$

dove $L = (\sum_{i=1}^n M_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

In particolare, se $f \in C^1(A)$ le ipotesi di Lipschitz sono verificate.

Definizione 1.24. Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale continua, $g = (g_1, ..., g_n)$. Definiamo

$$\int_a^b g(t)dt = \left(\int_a^b g_1(t)dt, ..., \int_a^b g_n(t)dt\right),$$

ovvero il vettore le cui componenti sono gli integrali delle funzioni componenti.

Lemma 1.25. *Sia* $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *continua. Allora*

$$\left\|\int_a^b g(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|g(t)\|dt \tag{1.27}$$

Dimostrazione. Poniamo $\gamma_i = \int_a^g g_i(t)dt$, così che $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) = \int_a^b g(t)dt$. Si ha, dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e per la linearità dell'integrale,

$$\|\gamma\|^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_a^b g_i(t)dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \gamma_i g_i(t)dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \|\gamma\|\|g(t)\|dt = \|\gamma\| \int_a^b \|g(t)\|dt.$$

Se $\|\gamma\| > 0$, basta dividere per $\|\gamma\|$ i due membri di questa disuguaglianza per avere la (1.27), se $\|\gamma\| = 0$ la tesi è banale.

■

Lemma 1.26 (Lemma di Volterra). *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ continua in A, con A aperto. Si ha che una funzione y è soluzione del problema di Cauchy* (1.11) *in un intervallo I se e solo se*

i) y è continua in I;

ii) $(t, y(t)) \in A, \ \forall t \in I$;

*iii) y verifica la seguente **equazione integrale di Volterra***

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds, \quad \forall t \in I, \tag{1.28}$$

dove $\int_{t_0}^t f(s, y(s))ds = \left(\int_{t_0}^t f_1(s, y(s))ds, ..., \int_{t_0}^t f_n(s, y(s))ds\right)$.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$

La funzione $t \mapsto f(t, y(t))$ è continua in I e quindi ivi integrabile. Integrando i due membri dell'equazione differenziale $y'(s) = f(s, y(s))$ tra t_0 e t, per ogni $t \in I$, si ha

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds, \quad \forall t \in I,$$

Dalla condizione iniziale segue l'equazione di Volterra.

$\Leftarrow$

La funzione $s \mapsto f(s, y(s))$ è continua in I e quindi esiste $\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^t f(s, y(s))ds\right) = f(t, y(t))$, per ogni $t \in I$. Dunque è derivabile anche il primo membro dell'equazione di Volterra e si ha che esiste $y'(t) = f(t, y(t))$. Inoltre dall'equazione di Volterra si ha che $y(t_0) = y_0$.

■

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ continua in A, con A aperto, e sia $(t_0, y_0) \in A$. Essendo A aperto, esistono $a > 0, b > 0$ tali che il cilindro

$$\Gamma = \Gamma_{a,b} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, \|y - y_0\| \leq b\} = \\ = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)}$$

sia contenuto in A. Essendo $\|f\|$ continua e Γ compatto, per il teorema di Weierstrass, essa ammette massimo su Γ:

$$M = \max_{(t,y)\in\Gamma} \|f(t, y)\|$$

Teorema 1.27 (Teorema di esistenza ed unicità "in piccolo"). *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, con A aperto, verificante le ipotesi di Lipschitz in A. Per ogni $(t_0, y_0) \in A$ esiste un intorno $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ di t_0 in cui è definita una soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy* (1.11)*, la quale, inoltre, assume i suoi valori in $\overline{B_b(y_0)}$. Tale soluzione è unica, nel senso che ogni altra soluzione di* (1.11) *definita in I_0 coincide con y in I_0. Più precisamente $r_0 = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, dove a, b, M sono stati introdotti sopra.*

Osservazione 1.28. Si parla di teorema di esistenza ed unicità in piccolo perchè

i) esso garantisce l'esistenza di una soluzione definita in un intorno di t_0 che, in generale, è strettamente contenuto nell'intervallo $[t_0 - a, t_0 + a]$ tale che $\Gamma_{a,b} \subset A$.

ii) il teorema afferma l'unicità delle soluzioni **in** I_0; se si hanno due soluzioni y e w definite su un intervallo $J \supset I_0$, il teorema ci assicura soltanto che esse coincidono in I_0.

Dimostrazione. Essendo Γ compatto, dalla Proposizione 1.22, segue che

$$\exists L > 0 \ : \ \|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|, \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in \Gamma. \tag{1.29}$$

Per il Lemma di Volterra, y è soluzione di (1.11) in I_0 se e solo se y è continua in I_0 e verifica ivi l'equazione integrale di Volterra

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \quad \forall t \in I,$$

dove, naturalmente, rimane sottintesa la condizione $(t, y(t)) \in A$, per ogni $t \in I_0$. Sia $X = C(I_0, \overline{B_b(y_0)})$. Si noti che se una funzione y appartiene allo spazio X, allora il suo grafico è contenuto in Γ. Definiamo

$$\begin{aligned} T : \ & X \to X \\ & y \mapsto Ty \end{aligned}$$

dove
$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \quad \forall t \in I_0.$$
E' una definizione ben posta. Infatti dal fatto che $y \in X$ segue che $(s, y(s)) \in \Gamma \subset A$ per ogni $s \in I_0$ e quindi si può definire $f(s, y(s))$. Inoltre Ty è continua, anzi è di classe C^1 in I_0. Infine, dal Lemma 1.25,
$$\|(Ty)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\| ds \right| \le$$
$$\le M|t - t_0| \le M r_0 \le b.$$
Si ha che una funzione $y \in X$, ovvero una funzione continua in I_0 a valori in $\overline{B_b(y_0)}$ (il cui grafico è quindi contenuto in Γ) è soluzione del problema di Cauchy (1.11) se e solo se è punto fisso di T. Perciò il problema di Cauchy è equivalente ad un problema di punto fisso.

Utilizzeremo il teorema delle contrazioni introducendo una metrica in X che lo renda completo e relativamente alla quale T sia una contrazione. Già sappiamo che d_∞ rende X completo, accade però che se si lavora con d_∞, per provare che T è una contrazione, è necessario restringere ulteriormente l'intervallo di esistenza della soluzione rispetto all'intervallo I_0 dell'enunciato. Osserviamo che la proprietà di essere punto fisso dipende dalla sola definizione di T, mentre la proprietà di essere una contrazione dipende dalla scelta della metrica, quindi si può cercare una metrica più conveniente. A tale scopo considereremo una distanza lievemente modificata dalla presenza di una "funzione peso"
$$p(t) = e^{-\rho|t-t_0|},$$
dove ρ è una qualunque costante verificante $\rho > L$. Definiamo
$$\tilde{d}_\infty(y, w) = \max_{t \in I_0} e^{-\rho|t-t_0|} \|y(t) - w(t)\|.$$
Valgono, similmente a quanto visto per d_∞, le proprietà di distanza ed inoltre
$$e^{-\rho r_0} d_\infty(y, w) \le \tilde{d}_\infty(y, w) \le d_\infty(y, w). \tag{1.30}$$
Da questa doppia disuguaglianza segue che una successione y_n è di Cauchy relativamente alla distanza d_∞ se e solo se lo è relativamente alla distanza $\tilde{d}_\infty$ e che y_n è convergente relativamente alla distanza d_∞ se e solo se lo è relativamente alla distanza $\tilde{d}_\infty$. Quindi dalla completezza di (X, d_∞) segue che $(X, \tilde{d}_\infty)$ è pure completo.

Vediamo ora che $T : (X, \tilde{d}_\infty) \to (X, \tilde{d}_\infty)$ è una contrazione. Date $y, w \in X$, si ha

$$p(t)\|(Ty)(t) - (Tw)(t)\| = p(t) \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, w(s)) ds \right\| \leq$$

$$\leq p(t) \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, w(s))\| ds \right| \leq Lp(t) \left| \int_{t_0}^{t} p(s)\|y(s) - w(s)\| \frac{1}{p(s)} ds \right| \leq$$

$$\leq Lp(t)\tilde{d}_\infty(y, w) \left| \int_{t_0}^{t} e^{\rho|s-t_0|} ds \right| \leq \frac{L}{\rho} \left(1 - e^{-\rho|t-t_0|}\right) \tilde{d}_\infty(y, w),$$

da cui

$$\tilde{d}_\infty(Ty, Tw) \leq \frac{L}{\rho} \tilde{d}_\infty(y, w).$$

Quindi T è una contrazione ed esiste perciò un'unica $y \in X$ tale che $Ty = y$, ovvero un'unica soluzione del problema di Cauchy (1.11) definita in I_0 e a valori in $\overline{B_b(y_0)}$. Rimane da verificare che non esiste un'altra soluzione di (1.11) definita in I_0 che non verifichi la condizione di assumere i valori in $\overline{B_b(y_0)}$. Supponiamo, per assurdo, che z sia una soluzione di (1.11) definita in I_0 tale che $z(I_0) \not\subseteq \overline{B_b(y_0)}$. Sia, ad esempio, $\widetilde{t} \in I_0, \widetilde{t} > t_0$, tale che $z(\widetilde{t}) \notin \overline{B_b(y_0)}$. Dunque l'insieme $S = \{t > t_0 \ : \ \|z(t) - y_0\| > b\}$ è non vuoto. Sia t^* il suo estremo inferiore. Si ha allora che, per la continuità di z, $\|z(t^*) - y_0\| \geq b$. Inoltre, per ogni $t \in [t_0, t^*)$, $z(t) \in \overline{B_b(y_0)}$ e quindi, sempre per la continuità di z, segue $z(t^*) \in \overline{B_b(y_0)}$ e quindi $t^* \notin S$ e $t^* < \widetilde{t}$. Quindi $(s, z(s)) \in \Gamma$ per ogni $s \in [t_0, t^*]$, $\|z(t^*) - y_0\| = b$ e $t^* < t_0 + r_0$. Si ha

$$z(t^*) - y_0 = z(t^*) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t^*} f(s, z(s)) ds,$$

da cui

$$\|z(t^*) - y_0\| \leq M(t^* - t_0) < Mr_0 < b,$$

da cui una contraddizione.

■

Osservazione 1.29. La dimostrazione si basa sul teorema delle contrazioni, la cui dimostrazione è di tipo costruttivo. Inoltre il teorema delle contrazioni fornisce anche un metodo per il calcolo approssimato della soluzione $y(t)$. Sappiamo infatti che se $y_0 \in X$, la successione delle iterate $y_n = T^n y_0$ converge al punto fisso $y(t)$, soluzione del problema di Cauchy (1.11).

Scegliendo $y_0(t) \equiv y_0$, possiamo anche maggiorare l'errore con la formula (1.17):

$$\tilde{d}_\infty(y_n, y) \leq \left(\frac{L}{\rho}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{L}{\rho}} \tilde{d}_\infty(y_1, y_0),$$

da cui, tenuto conto di (1.30) e osservando che

$$d_\infty(y_1, y_0) \le Mr_0,$$

si ha

$$\max_{t\in I_0} \|y_n(t) - y(t)\| = d_\infty(y_n, y) \le e^{\rho r_0}\tilde{d}_\infty(y_n, y) \le$$
$$\le \frac{L^n}{\rho - L}\frac{e^{\rho r_0}}{\rho^{n-1}} d_\infty(y_1, y_0) \le Mr_0 \frac{L^n}{\rho - L}\frac{e^{\rho r_0}}{\rho^{n-1}}$$

Proposizione 1.30 (Regolarità delle soluzioni). *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, continua su A aperto, e sia $y(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ in un intervallo I. Se $f \in C^k(A)$ allora $y \in C^{k+1}(I)$, $k = 0, 1, \ldots$. Se $f \in C^\infty(A)$ allora $y \in C^\infty(I)$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente per induzione.

Vogliamo ora migliorare il risultato di unicità ottenuto nel Teorema 1.27, che è di carattere locale. Iniziamo con l'osservare che se $y : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $w : I_2 \to \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni del problema di Cauchy (1.11), allora esiste un intorno di t_0 in cui esse coincidono. Infatti, basta scegliere il cilindro $\Gamma_{a,b}$ a cui applicare il teorema, avente semialtezza a sufficientemente piccola in modo che $[t_0 - a, t_0 + a] \subset I_1 \cap I_2$. Segue allora dal Teorema 1.27 che esiste un'unica soluzione di (1.11) in $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$, con $r_0 \le a$. Essendo entrambe le soluzioni y e w definite in I_0, esse coincidono in tale intervallo.

Proviamo ora il seguente

Teorema 1.31 (Teorema di unicità globale). *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, verificante le ipotesi di Lipschitz su A aperto, e siano $y : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $w : I_2 \to \mathbb{R}^n$ soluzioni del problema di Cauchy* (1.11), *con* $(t_0, y_0) \in A$. *Allora*

$$y(t) = w(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2,$$

ovvero due soluzioni dello stesso problema di Cauchy, in ipotesi di Lipschitz, coincidono nel comune intervallo di definizione.

Dimostrazione. Per definizione di soluzione, $I_1 \cap I_2$ è un intervallo avente t_0 come punto interno. Supponiamo, per assurdo, che esista $t_1 \in I_1 \cap I_2$ tale che $y(t_1) \ne w(t_1)$ e, per fissare le idee, sia $t_1 > t_0$. Sia

$$\bar{t} = \inf\{t \in (t_0, t_1] \mid y(t) \ne w(t)\}.$$

Tale insieme è certamente non vuoto perchè contiene t_1 (e, per il teorema di permanenza del segno applicato alla funzione $\|y(t) - w(t)\|$, contiene anche un intorno sinistro di t_1, da cui $\bar{t} < t_1$). Per ogni $t \in [t_0, \bar{t})$, si ha che $(y - w)(t) = 0$, e dunque, per la continuità di y e w, $y(\bar{t}) = w(\bar{t}) = \bar{y}$ e $(\bar{t}, \bar{y}) \in A$ per definizione di soluzione. Ora, y e w sono soluzioni del problema di Cauchy di punto iniziale $(\bar{t}, \bar{y})$ in un intorno di $\bar{t}$. Per quanto osservato sopra, esse devono coincidere in un intorno di $\bar{t}$, contraddicendo la definizione di $\bar{t}$.

■

Il **significato geometrico** di tale teorema è che, in ipotesi di Lipschitz, i grafici di due soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ non si possono intersecare, a meno che le due soluzioni non coincidano nel comune intervallo di definizione. In altri termini, per due soluzioni dello stesso problema di Cauchy l'unica eventuale differenza sta nell'intervallo in cui sono definite.

Il Teorema 1.27 garantisce l'esistenza della soluzione del problema di Cauchy (1.11) in un intervallo $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$, in realtà tale soluzione può essere prolungata ad un intervallo più ampio. Infatti, posto $P_1 = (t_1, y_1) = (t_0 + r_0, y(t_0 + r_0)) \in A$, essendo A aperto si può considerare un cilindro Γ_1 di centro P_1 e tutto contenuto in A. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), \\ y(t_1) = y_1, \end{cases}$$

ha una soluzione y_1 definita in un intorno $[t_1 - r_1, t_1 + r_1]$ di t_1. La funzione

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 \le t \le t_1, \\ y_1(t), & t_1 \le t \le t_1 + r_1, \end{cases}$$

è continua in t_1 ed inoltre è derivabile e verifica l'equazione differenziale $z' = f(t, z)$ per ogni $t \in [t_0, t_1) \cup (t_1, t_1 + r_1]$. Per la continuità di z in t_1 si ha che esiste $\lim_{t \to t_1} z'(t) = \lim_{t \to t_1} f(t, z(t)) = f(t_1, z(t_1))$. Per un classico risultato del calcolo differenziale per funzioni di una variabile, si ha che esiste $z'(t_1) = \lim_{t \to t_1} z'(t) = f(t_1, z(t_1))$, quindi z è soluzione dell'equazione differenziale $z' = f(t, z)$ in $[t_0, t_1 + r_1]$. Essa prolunga la soluzione y fornita dal Teorema 1.27. Si può ripetere questo procedimento a partire da $P_2 = (t_2, y_2) = (t_1 + r_1, y_1(t_1 + r_1))$, e così via, ottenendo una successione di punti P_n e prolungando ad ogni passo la soluzione a destra senza porre mai termine al processo. Similmente, si può prolungare la soluzione a sinistra.

Definiamo

$$I^+ = \{t > t_0 \mid \text{la soluzione } y(t) \text{ di (1.11) è prolungabile in } [t_0, t]\},$$

$$T^+ = \sup I^+.$$

I^+ è ovviamente un intervallo, eventualmente superiormente illimitato e si ha $T^+ > t_0$. Verifichiamo che $T^+ \notin I^+$. Se $T^+ = +\infty$, la tesi è ovvia, sia quindi

$T^+ \in \mathbb{R}$. Se, per assurdo, $T^+ \in I^+$ la soluzione sarebbe definita sull'intervallo $[t_0, T^+]$ e, per quanto osservato sopra, sarebbe prolungabile a destra, contraddicendo la definizione di T^+. Similmente si definiscono I^- e T^- e si prova che $T^- \notin I^-$. L'intervallo aperto, eventualmente illimitato, $I_M = (T^-, T^+)$ è detto **intervallo massimale** e la soluzione di (1.11) definita in I_M è detta **soluzione massimale**, in quanto non ulteriormente prolungabile. Quindi in ipotesi di Lipschitz ogni problema di Cauchy ha una e una sola soluzione massimale.

Similmente, data una soluzione di una equazione differenziale (in ipotesi di Lipschitz) si può pensare di prolungarla scegliendo un punto del suo grafico come punto iniziale di un problema di Cauchy. Analogamente, è detta soluzione massimale dell'equazione differenziale una soluzione non ulteriormente prolungabile.

Esempio 1.32. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

Sono verificate le ipotesi di Lipschitz su $A = \mathbb{R}^2$. Ci aspetteremmo che la soluzione massimale sia definita su tutto $\mathbb{R}$ dato che possiamo scegliere il cilindro $\Gamma_{a,b}$ con a, b grandi a piacere. Invece si verifica subito che la funzione $y = \tan t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, è soluzione di (1.31), ed è ovviamente non prolungabile al di fuori di tale intervallo. Quello che accade è che il grafico della soluzione esce attraverso le pareti laterali dei cilindri che man mano si considerano nel processo di prolungamento descritto sopra, intuitiamente ciò si spiega osservando che la pendenza $y'(t)$ cresce velocemente (in modo quadratico) al crescere di $y(t)$.

Per ottenere un risultato di esistenza più soddisfacente, dovremo fare ulteriori ipotesi. Ci servirà in particolare il seguente risultato, che non dimostriamo.

Teorema 1.33 (Teorema di uscita delle soluzioni dal compatto). *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, verificante le ipotesi di Lipschitz su A aperto, e sia $y(t)$ una soluzione massimale dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ nell' intervallo massimale $I_M = (T^-, T^+)$. Sia $T^+ < +\infty$. Allora per ogni compatto $K \subset A$, esiste $\delta > 0$ tale che $(t, y(t)) \notin K$, per ogni $t \in (T^+ - \delta, T^+)$. Similmente, se $T^- > -\infty$, per ogni compatto $K \subset A$, esiste $\delta > 0$ tale che $(t, y(t)) \notin K$, per ogni $t \in (T^-, T^- + \delta)$.*

Lemma 1.34 (Lemma di Gronwall). *Sia $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita nell'intervallo I e sia $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$. Supponiamo* *che esistano costanti $M \geq 0$, $L \geq 0$ e un punto $x_0 \in I$ tali che*

$$u(x) \leq M + L \left| \int_{x_0}^{x} u(t)dt \right|, \quad \forall x \in I. \tag{1.32}$$

Allora

$$u(x) \leq M e^{L|x-x_0|}, \quad \forall x \in I. \tag{1.33}$$

Dimostrazione. Se $L = 0$ la tesi è ovvia. Sia quindi $L > 0$ e osserviamo che la tesi è ovvia se $x = x_0$. Supponiamo allora, per fissare le idee, che sia $x > x_0$. Per ogni $t \in (x_0, x)$ si ha, per ipotesi, $u(t) \leq M + L \int_{x_0}^{t} u(s)ds$. Moltiplicando i due membri di questa disuguaglianza per $e^{-L(t-x_0)}$ si ha

$$u(t)e^{-L(t-x_0)} \leq Me^{-L(t-x_0)} + e^{-L(t-x_0)} L \int_{x_0}^{t} u(s)ds,$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-L(t-x_0)} \int_{x_0}^{t} u(s)ds \right) \leq Me^{-L(t-x_0)}.$$

Integrando i due membri tra x_0 e x, si ha

$$e^{-L(x-x_0)} \int_{x_0}^{x} u(s)ds \leq -\frac{M}{L} e^{-L(x-x_0)} + \frac{M}{L}.$$

Moltiplicando i due membri per $Le^{L(x-x_0)}$, si ha infine

$$u(x) \leq L \int_{x_0}^{x} u(s)ds + M \leq Me^{L(x-x_0)}.$$

Calcoli analoghi si possono fare nel caso $x < x_0$. ■

Teorema 1.35 (Teorema di esistenza globale). *Sia f verificante le ipotesi di Lipschitz sulla* ***striscia*** *$A = I \times \mathbb{R}^n$, con I un intervallo aperto, eventualmente illimitato. Supponiamo che per ogni compatto $K \subset I$ esistano $K_1, K_2 \geq 0$ tali che*

$$\|f(t, y)\| \leq K_1 + K_2\|y\|, \quad \forall t \in K, \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.34}$$

Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in A$ ($\Leftrightarrow \forall t_0 \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}^n$), il problema di Cauchy (1.11) ha un'unica soluzione massimale definita in I.

Osservazione 1.36.

1) La tesi si può esprimere equivalentemente dicendo che la soluzione di (1.11) è prolungabile a tutto I, oppure che ogni soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è prolungabile a tutto I. Vista la struttura di $A = I \times \mathbb{R}^n$, I è il massimo intervallo nel quale abbia senso definire una soluzione, per questo motivo si parla di esistenza globale.

2) Per $n = 1$, la condizione (1.34) diventa

$$-K_1 - K_2|y| \leq f(t, y) \leq K_1 + K_2|y|, \quad \forall t \in K, \forall y \in \mathbb{R}$$

ovvero, a t fissato, la crescita di $f(t, \cdot)$ è sottolineare. La condizione (1.34) è detta **ipotesi di sottolinearità.**

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$, eventualmente $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$. Sia $y(t)$ la soluzione massimale di (1.11) e sia $I_M = (T^-, T^+)$ il suo intervallo (massimale) di definizione. Proviamo, ad esempio, che $T^+ = b$. Sia, per assurdo, $T^+ < b$, dunque $T^+ \in \mathbb{R}$. Consideriamo il compatto $K = [t_0, T^+] \subset I$. Per l'ipotesi (1.34) esistono $K_1, K_2 \geq 0$ tali che

$$\|f(t, y)\| \leq K_1 + K_2\|y\|, \quad \forall t \in [t_0, T^+], \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.35}$$

Ricordando l'equazione integrale di Volterra, il Lemma 1.25, e da (1.35), si ha che, per ogni $t \in [t_0, T^+)$,

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds \right\| \leq \|y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\|ds \leq \\
\leq \|y_0\| + \int_{t_0}^t K_1 + K_2\|y(s)\|ds = \|y_0\| + K_1(t - t_0) + K_2 \int_{t_0}^t \|y(s)\|ds \leq \\
\leq \|y_0\| + K_1(T^+ - t_0) + K_2 \int_{t_0}^t \|y(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Gronwall a $u(t) = \|y(t)\|$, si ha

$$\|y(t)\| \leq Me^{L(t-t_0)} \leq Me^{L(T^+-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T^+),$$

dove $M = \|y_0\| + K_1(T^+ - t_0)$, $L = K_2$. Consideriamo il compatto $K' = [t_0, T^+] \times \overline{B_N(0)} \subset I \times \mathbb{R}^n = A$, con $N = Me^{L(T^+-t_0)}$. Si ha che $gr\left(y_{|[t_0,T^+)}\right) \subset K'$, contraddicendo il Teorema 1.33. Quindi abbiamo provato che $T^+ = b$. Similmente, si prova che $T^- = a$.

■

Osservazione 1.37. Siano sottintese le ipotesi di Lipschitz in $A = I \times \mathbb{R}^n$. Le ipotesi di sottolinearità sono, in particolare, verificate in ciascuno dei seguenti casi:

i) Per ogni compatto $K \subset I$, f è limitata in $K \times \mathbb{R}^n$.

ii) Per ogni compatto $K \subset I$, f è lipschitziana in y uniformemente in t in $K \times \mathbb{R}^n$, cioè esiste $L > 0$ tale che

$$\|f(t, y) - f(t, \widetilde{y})\| \leq L\|y - \widetilde{y}\|, \quad \forall t \in K, \forall y, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, scelto $\widetilde{y} = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \|f(t, y)\| \leq \|f(t, y) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \leq L\|y\| + \|f(t, 0)\| \leq \\ \leq L\|y\| + M, \quad \forall t \in K, \forall y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

dove $M = \max_{t \in K} \|f(t, 0)\|$.

iii) Sono definite e continue in A tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, per $i, j = 1, ..., n$, e, per ogni compatto $K \subset I$, esse sono limitate in $K \times \mathbb{R}^n$.

Sia infatti $M > 0$ tale che $\|\nabla f_i(t, y)\| \leq M$, per ogni $t \in K$, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, e per ogni $i = 1, ..., n$. Applicando il teorema del valor medio a $f_i(t, \cdot)$, a t fissato, come funzione delle sole variabili y, si ha che per ogni (t, y), $(t, \tilde{y}) \in K \times \mathbb{R}^n$, esiste un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$, appartenente al segmento che unisce y a $\tilde{y}$, tale che

$$f_i(t, y) - f_i(t, \tilde{y}) = \nabla_y f_i(t, \xi) \cdot (y - \tilde{y}),$$

da cui

$$|f_i(t, y) - f_i(t, \tilde{y})| \leq \|\nabla_y f_i(t, \xi)\| \cdot \|y - \tilde{y}\| \leq M\|y - \tilde{y}\|,$$

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq M\sqrt{n}\|y - \tilde{y}\|, \quad \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in K \times \mathbb{R}^n,$$

per cui ci siamo risondotti al caso ii).

Finora abbiamo trattato le questioni dell'esistenza e dell'unicità per il problema di Cauchy (1.11). Il terzo aspetto in ordine di importanza è la **stabilità** ovvero la **dipendenza continua dai dati iniziali**. Precisamente, ci poniamo il seguente problema: quanto è sensibile la soluzione $y(t)$ a perturbazioni dei dati iniziali t_0 e y_0? A piccole variazioni dei dati corrispondono piccole variazioni della soluzione? E se sì, come lo quantifichiamo? La questione è molto importante per le applicazioni perchè le misurazioni sono di solito affette da errori.

Esempio 1.38. Consideriamo i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.36}$$

$$\begin{cases} y' = ty, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1.37}$$

con $y_0 \neq 0$.

E' immediato verificare che $y \equiv 0$ è la soluzione massimale di (1.36), mentre $y(t) = y_0 e^{\frac{t^2}{2}}$ è la soluzione massimale di (1.37). Per quanto vicino a 0 sia il valore di y_0, le due soluzioni non sono globalmente vicine, anzi i loro grafici divergono per $t \to \infty$. Questo esempio fa capire che si può sperare di ottenere un risultato di dipendenza continua dai dati iniziali solo in un intorno del punto iniziale, infatti il problema della stabilità troverà soluzione solo in termini locali.

Teorema 1.39 (Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali). *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, verificante le ipotesi di Lipschitz sull'aperto A. Siano $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in A$ e siano $y : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $w : I_2 \to \mathbb{R}^n$ soluzioni rspettivamente dei seguenti problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_1) = y_1, \end{cases} \tag{1.38}$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_2) = y_2. \end{cases} \tag{1.39}$$

Sia $J = [\alpha, \beta]$ un intervallo chiuso e limitato tale che $J \subset I_1 \cap I_2$ e sia K un compatto contenente $gr(y|_J) \cup gr(w|_J)$ e contenuto in A. Sia $M = \max_{(t,y)\in K} \|f(t, y)\|$, e, in base alla Proposizione 1.22, sia $L > 0$ tale che

$$\|f(t, y) - f(t, \widetilde{y})\| \leq L\|y - \widetilde{y}\|, \quad \forall (t, y), (t, \widetilde{y}) \in K.$$

Allora

$$\|y(t) - w(t)\| \leq (\|y_1 - y_2\| + M|t_1 - t_2|)e^{L|t-t_1|}, \quad \forall t \in J. \tag{1.40}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che il teorema è significativo solo se $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. In tal caso si può scegliere ad esempio $K = \mathrm{gr}(y_{|J}) \cup \mathrm{gr}(w_{|J})$.

Per ogni $t \in J$ si ha

$$y(t) = y_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, y(s))ds,$$

$$w(t) = y_2 + \int_{t_2}^{t} f(s, w(s))ds = y_2 + \int_{t_1}^{t} f(s, w(s))ds + \int_{t_2}^{t_1} f(s, w(s))ds,$$

da cui

$$\|y(t)-w(t)\| \leq \|y_1-y_2\|+\left\|\int_{t_1}^{t} f(s,y(s)) - f(s,w(s))ds\right\|+\left\|\int_{t_1}^{t_2} f(s,w(s))ds\right\| \leq$$
$$\leq \|y_1-y_2\| + M|t_2-t_1| + \left|\int_{t_1}^{t} L\|y(s)-w(s)\|ds\right|.$$

Applicando il Lemma di Gronwall alla funzione $\|y(t)-w(t)\|$, si ha la (1.40).

■