

1 Superfici

Sia φ una funzione **continua** definita su un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ di \mathbb{R}^2 e a valori in \mathbb{R}^3 :

$$\varphi: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \in R \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

cioè tale che le componenti $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ siano funzioni continue delle variabili u, v . Supponiamo inoltre che la restrizione di φ al rettangolo aperto $(a, b) \times (c, d)$ sia iniettiva, mentre è permesso che punti distinti della frontiera del rettangolo R abbiano la stessa immagine. Potremo naturalmente identificare il punto $\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3$ con il vettore $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ che unisce l'origine O a $\varphi(u, v)$.

Il sottinsieme dello spazio \mathbb{R}^3 descritto dai punti $\varphi(u, v)$, al variare di $(u, v) \in R$, cioè

$$\mathcal{S} = \{\varphi(u, v), (u, v) \in R\} = \varphi(R),$$

è detto **superficie**, mentre la funzione vettoriale φ è detta **rappresentazione parametrica** (o **parametrizzazione**) della superficie \mathcal{S} .

Scriveremo anche

$$\mathcal{S} \quad \dots \quad \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

o

$$\mathcal{S} \quad \dots \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

o

$$\mathcal{S} \quad \dots \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Se la parametrizzazione φ è iniettiva su tutto il rettangolo, essa trasforma la frontiera di R (i quattro lati) in una curva di \mathbb{R}^3 , che costituisce il **contorno** o **bordo** della superficie \mathcal{S} , indicato con $\partial\mathcal{S}$.

La richiesta che il dominio di φ sia un rettangolo è stata fatta solo per semplicità di esposizione, la definizione si estende in modo ovvio a qualunque insieme D del piano che sia l'unione di un aperto connesso limitato con la sua frontiera. L'insieme D è detto dominio (della parametrizzazione).

Definizione 1.1. La rappresentazione parametrica $\varphi(u, v)$ si dice **regolare** se φ è differenziabile con continuità in $(a, b) \times (c, d)$ e se i vettori $\varphi_u =$

$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ e $\varphi_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ sono linearmente indipendenti in ogni $(u, v) \in (a, b) \times (c, d)$.

Si può verificare che se la rappresentazione parametrica è regolare \mathcal{S} è dotata di piano tangente in ogni punto $P = \varphi(u, v)$, con $(u, v) \in (a, b) \times (c, d)$.

Precisamente, un vettore normale in $P = \varphi(u, v)$ a \mathcal{S} è dato da

$$\mathbf{n} = \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v).$$

Si noti che \mathbf{n} è non nullo, infatti due vettori $a, b \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti se e solo se il loro prodotto vettoriale $a \wedge b$ è non nullo.

Definizione 1.2. Una rappresentazione parametrica $\varphi(u, v)$ di una superficie \mathcal{S} è detta **regolare a pezzi** se φ è continua su R e se il rettangolo R è unione di un numero finito di sottorettangoli R_k , $k = 1, \dots, K$, aventi al più in comune punti della propria frontiera, tali che la restrizione di φ a ciascun R_k è regolare. Indicata con \mathcal{S}_k la curva $\varphi(R_k)$, per $k = 1, \dots, K$, si ha che $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^K \mathcal{S}_k$. In tal caso le derivate parziali di φ potrebbero non essere definite per i valori di (u, v) appartenenti ai lati dei sottorettangoli, quindi nei corrispondenti punti della superficie (contorni delle superfici \mathcal{S}_k) potrebbe non esistere il piano tangente. Ad esempio, la superficie di un cubo ha una rappresentazione parametrica regolare a tratti.

Esempio 1.3. Consideriamo la seguente parametrizzazione della superficie laterale del cilindro di raggio r e altezza h

$$\begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in R = [0, 2\pi] \times [0, h];$$

Si ha che φ è iniettiva su $(0, 2\pi) \times [0, h]$, il suo contorno è costituito dalle due circonferenze di base, che sono l'immagine dei lati $v = 0$ e $v = h$ rispettivamente, mentre i lati $u = 0$ e $u = 2\pi$ hanno per immagine lo stesso segmento verticale $S = \{(r, 0, z), 0 \leq z \leq h\}$, che non fa quindi parte del contorno della superficie.

Calcoliamo:

$$\varphi_u = (-r \sin u, r \cos u, 0),$$

$$\varphi_v = (0, 0, 1),$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (r \cos u, r \sin u, 0),$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = r \neq 0, \quad \text{per ogni } (u, v) \in R.$$

Quindi la rappresentazione data è regolare.

Si può visualizzare il significato di questa parametrizzazione, per semplicità considerando il caso $r = 1$, immaginando che il rettangolo R sia un foglio di carta che viene arrotolato, incollando i due lati opposti $u = 0$ e $u = 2\pi$.

Esempio 1.4. Consideriamo la seguente parametrizzazione della sfera di centro l'origine e raggio r , ottenuta scegliendo $u = \varphi$, $v = \vartheta$, con φ , ϑ le coordinate sferiche angolari,

$$\begin{cases} x = r \sin u \cos v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos u \end{cases} \quad (u, v) \in R = [0, \pi] \times [0, 2\pi];$$

Si ha che φ è iniettiva su $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$, mentre il lato $u = 0$ ha per immagine il polo Nord, lato $u = \pi$ ha per immagine il polo Sud, i lati $v = 0$ e $v = 2\pi$ hanno per immagine il meridiano della sfera contenuto nel semipiano $\{y = 0, x \geq 0\}$.

Calcoliamo:

$$\varphi_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u),$$

$$\varphi_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0),$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (r^2 \sin^2 u \cos v, r^2 \sin^2 u \sin v, r^2 \sin u \cos u) = r \sin u \varphi(u, v),$$

$$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = r^2 \sin u \neq 0 \text{ per ogni } (u, v) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi].$$

Quindi la rappresentazione data è regolare; è del resto evidente che \mathbf{S} è dotata di piano tangente anche nei punti del meridiano immagine della frontiera di R . Ai fini della determinazione dei piani tangenti è più conveniente introdurre la sfera come luogo degli zeri della funzione $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, il cui gradiente individua la direzione ortogonale al piano tangente nei punti della sfera.

Si può visualizzare il significato di questa parametrizzazione immaginando che R sia un foglio di plastilina che viene deformato a "incartare" la sfera, incollando due lati opposti lungo il meridiano della sfera contenuto nel semipiano $\{y = 0, x \geq 0\}$ e schiacciando gli altri due lati uno nel Polo Nord e l'altro nel Polo Sud.

Se restringiamo il dominio della precedente parametrizzazione al rettangolo chiuso $\tilde{R} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$, la superficie che si ottiene è la semisfera contenuta nel semispazio $\{z \geq 0\}$. In questo caso il lato $u = \frac{\pi}{2}$ di \tilde{R} ha per immagine la circonferenza $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z = 0\}$, che costituisce il contorno della superficie.

Come illustrato dagli esempi precedenti, il contorno di una superficie parametrica può essere l'immagine solo di una parte della frontiera del dominio

della parametrizzazione oppure può non esservi contorno, nel qual caso la superficie è detta **chiusa**.

Esempio 1.5. Sia $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su R e dotata di derivate parziali prime continue su $(a, b) \times (c, d)$. Il suo grafico

$$gr(f) = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in R\}$$

è una superficie, detta **superficie cartesiana**, avente la seguente parametrizzazione standard $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $x \in R$, ovvero

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in R,$$

che è regolare. Infatti $\varphi_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$, $\varphi_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$, $|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} > 0$, per ogni $(u, v) \in (a, b) \times (c, d)$.

Area delle superfici e integrali di superficie.

Definizione 1.6. Sia \mathcal{S} una superficie regolare. Definiamo

$$\text{area}(\mathcal{S}) = \int_R |\varphi_u \wedge \varphi_v| dudv.$$

L'area di \mathcal{S} sarà indicata anche con la seguente scrittura formale

$$\text{area}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d\sigma,$$

e $d\sigma$ è detto elemento d'area. Si può verificare che il valore dell'integrale non dipende dalla parametrizzazione.

Se, in particolare, \mathcal{S} è una superficie cartesiana, si ha

$$\text{area}(\mathcal{S}) = \int_R \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} dx dy.$$

Similmente, se g è una funzione continua definita in un insieme B contenente \mathcal{S} , si definisce **integrale (di superficie) di g esteso a \mathcal{S}**

$$\int_{\mathcal{S}} g d\sigma = \int_R g(\varphi(u, v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| dudv.$$

Come applicazioni, si hanno il calcolo di masse, baricentri e momenti di inerzia di lamine.

Se \mathcal{S} è una superficie regolare a pezzi, si definisce

$$\text{area}(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^K \int_{\mathcal{S}_k} d\sigma,$$

$$\int_{\mathcal{S}} g d\sigma = \sum_{k=1}^K \int_{\mathcal{S}_k} g d\sigma.$$

Esercizio 1.7. Calcolare l'area di un cilindro di altezza h e raggio di base R .

Esercizio 1.8. Calcolare l'area della superficie della sfera di raggio R .

Definizione 1.9. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale differenziabile su un aperto A di \mathbb{R}^3 . Si definisce **divergenza** di \mathbf{F}

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (1.1)$$

Teorema 1.10 (Teorema della divergenza). *Sia D un aperto connesso limitato di \mathbb{R}^3 la cui frontiera $\mathcal{F}D$ sia una superficie regolare a pezzi. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale differenziabile su un aperto A contenente $D \cup \mathcal{F}D$. Vale la seguente formula*

$$\iiint_D \text{div}(\mathbf{F}) \, dx dy dz = \int_{\mathcal{F}D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (1.2)$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna a D .

Si noti che $\int_{\mathcal{F}D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ rappresenta il flusso del campo \mathbf{F} uscente dalla superficie $\mathcal{S} = \mathcal{F}D$.

Indichiamo con il simbolo ∇ (nabla) il “vettore formale”

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Sia \mathbf{F} un campo vettoriale differenziabile in un aperto A di \mathbb{R}^3 . Restano definiti formalmente i seguenti prodotti scalare e vettoriale:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \text{div}(\mathbf{F})$$

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \text{rot}(\mathbf{F})$$

indicati rispettivamente con **divergenza** e **rotore** di \mathbf{F} .

Esercizio 1.11. Calcolare divergenza e rotore del campo vettoriale $\mathbf{F} = (xy, y^2 - z^2, yz)$.

Definizione 1.12. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale differenziabile su un aperto A di \mathbb{R}^3 . \mathbf{F} si dice **irrotazionale** se $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ in A .

Osserviamo che \mathbf{F} è irrotazionale in A se e solo se valgono le condizioni necessarie affinché esso sia conservativo in A , condizioni che sono anche sufficienti se A è semplicemente connesso. Quindi se \mathbf{F} è un campo conservativo differenziabile con continuità in un aperto A di \mathbb{R}^3 , si ha che \mathbf{F} è irrotazionale. Inoltre se \mathbf{F} è irrotazionale in un aperto A semplicemente connesso A allora \mathbf{F} è conservativo, ovvero esiste un campo scalare differenziabile Φ in A tale che $\mathbf{F} = \nabla\Phi$.

Sia F un campo vettoriale differenziabile due volte con continuità in un aperto A di \mathbb{R}^3 . Allora

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) = 0. \quad (1.3)$$

Sia Φ un campo scalare differenziabile due volte con continuità in un aperto A di \mathbb{R}^3 . Allora

$$\text{rot}(\nabla\Phi) = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

La verifica delle precedenti identità è una immediata applicazione del teorema di Schwarz.

Definizione 1.13. Una superficie regolare \mathcal{S} si dice **orientabile** se è possibile definire su \mathcal{S} un campo vettoriale continuo \mathbf{n} tale che $\mathbf{n}(P)$ sia un vettore unitario, normale alla superficie in ogni punto $P \in \mathcal{S}$. Un tale campo, se esiste, determina una orientazione della superficie \mathcal{S} . E' evidente che se un tale campo vettoriale continuo \mathbf{n} esiste, allora il campo opposto $-\mathbf{n}$ determina una seconda orientazione di \mathcal{S} e che altre orientazioni non possono sussistere. Dire che \mathcal{S} è orientabile significa allora dire che essa ha due **facce** o **lati**, quello dal quale "esce" \mathbf{n} e quello dal quale "esce" $-\mathbf{n}$. Una superficie regolare orientabile si dice **orientata** se è stata scelta in essa una delle due orientazioni, da chiamarsi **positiva**. In tal caso, la faccia dalla quale "esce" il campo vettoriale \mathbf{n} che definisce l'orientazione è detta **faccia positiva**, mentre l'altra è detta **faccia negativa**.

Sono esempi di superfici orientabili la sfera e la superficie laterale di un cilindro. Un esempio di superficie non orientabile è il nastro di Möebius.

Una superficie orientata \mathcal{S} induce una orientazione su ogni eventuale curva \mathcal{C} del suo contorno nel modo seguente: se un osservatore è in piedi sulla faccia positiva della superficie e cammina lungo \mathcal{C} nel verso positivo di \mathcal{C} , allora vedrà \mathcal{S} alla propria sinistra. Il contorno così orientato viene indicato con $+\partial\mathcal{S}$.

Se \mathcal{S} è una superficie regolare a pezzi non si può definire un vettore normale unitario in ogni suo punto (si pensi, ad esempio, alla superficie di un cubo). Eppure ci è chiaro che la superficie cubica ha due facce (una interna e una esterna).

Per intuire come procedere, pensiamo ad una superficie regolare, ad esempio la sfera, come unione di due superfici, ad esempio le due semisfere in cui è divisa dal piano $\{z = 0\}$. Scelto sulla sfera l'orientamento dato dalla normale esterna, osserviamo che esso, ristretto alle due semisfere, induce sul loro comune contorno (la circonferenza equatoriale) due orientamenti opposti. Alla luce di questa osservazione, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.14. Una superficie regolare a pezzi $\mathcal{S} = \cup_{k=1}^K \mathcal{S}_k$ si dice **orientabile** se è possibile definire su ogni \mathcal{S}_k un'orientazione che induce orientazioni opposte su ogni curva di contorno comune a due superfici componenti.

E' facile verificare che, in base alla definizione, la superficie cubica è orientabile.

Teorema 1.15 (Teorema di Stokes). *Sia \mathcal{S} una superficie regolare o regolare a pezzi orientata, con \mathbf{n} il campo normale unitario che ne definisce l'orientazione, e tale che il suo contorno $+\partial\mathcal{S}$, dotato dell'orientazione indotta da quella di \mathcal{S} , sia unione finita di curve chiuse semplici regolari a tratti. Sia \mathbf{F} un campo vettoriale differenziabile con continuità su un aperto A contenente \mathcal{S} . Vale la seguente formula*

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{+\partial\mathcal{S}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \quad (1.5)$$