1 Curve

Sia φ una funzione **continua** definita in un intervallo I di $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad I \subset \mathbb{R} \quad &\to \mathbb{R}^3 \\ t \in I \quad &\mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)), \end{aligned}$$

cioè tale che le componenti $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ siano funzioni continue della variabile t. Talvolta identificheremo il punto $\varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ con il vettore $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ che unisce l'origine O a $\varphi(t)$.

Il sottinsieme dello spazio $\mathbb{R}^3$ descritto dai punti $\varphi(t)$, al variare di $t \in I$, cioè

$$\mathcal{C} = \{\varphi(t),\ t \in I\} = \varphi(I),$$

è detto **curva**, mentre la funzione vettoriale φ è detta **rappresentazione parametrica** (o **parametrizzazione**) della curva $\mathcal{C}$.

Scriveremo anche

$$\mathcal{C} \quad ... \qquad \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

o

$$\mathcal{C} \quad ... \qquad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

o

$$\mathcal{C} \quad ... \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Similmente si definiscono le curve in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Esempio 1.1. Una stessa curva può essere individuata da parametrizzazioni diverse. Come esempio, consideriamo le seguenti parametrizzazioni della circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano.

$$1) \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} t \in [0, 2\pi]; \qquad 2) \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} t \in [0, n\pi], n = 3, 4, ...;$$

$$3) \begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(2t) \end{cases} t \in [0, \pi]; \qquad 4) \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = -\sin(t) \end{cases} t \in [0, 2\pi].$$

E' evidente da questo esempio che la rappresentazione parametrica fornisce molte più informazioni rispetto alla curva $\mathcal{C}$ che individua. In particolare, se t rappresenta il tempo e $\varphi(t)$ la legge oraria del moto di una particella o del baricentro di un corpo, allora la rappresentazione parametrica $\varphi(t)$ fornisce informazioni su come viene percorsa la curva (quante volte, in che verso, con quale velocità...).

Se $I = [a, b]$, i punti $P = \varphi(a)$ e $Q = \varphi(b)$ sono detti rispettivamente **punto iniziale** e **punto finale** della curva (**estremi** della curva).

Definizione 1.2. Una curva $\mathcal{C}$ si dice **chiusa** se esiste una rappresentazione parametrica di $\mathcal{C}$ in un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$ tale che $\varphi(a) = \varphi(b)$, cioè tale che i due estremi coincidano.

Esempio 1.3. La circonferenza è una curva chiusa. Tra le parametrizzazioni della circonferenza fornite nell'esempio 1.1, tovare quelle che non verificano la condizione $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Definizione 1.4. Una parametrizzazione $\varphi(t)$ si dice **semplice** se a valori distinti di t corrispondono punti distinti, esclusi al più gli estremi a e b dell'intervallo I che possono avere per immagine lo stesso punto. Una curva è detta semplice se esiste una sua parametrizzazione semplice. Si osservi che una curva semplice può essere chiusa, ma non può autointersecarsi.

Se $\mathcal{C}$ è una curva con estremi P e Q distinti, è evidente che le sue parametrizzazioni si possono ripartire in due classi, una contenente quelle per le quali P è punto iniziale e Q è punto finale e l'altra contenente quelle per le quali Q è punto iniziale e P è punto finale. Se $\mathcal{C}$ è una curva chiusa semplice, le sue parametrizzazioni semplici possono ripartirsi in due classi, a seconda che $\mathcal{C}$ venga percorsa nel verso orario o antiorario, al crescere del parametro t. In entrambi i casi, ognuna di tali classi determina un verso di percorrenza (orientamento) di $\mathcal{C}$. La curva $\mathcal{C}$ si dice **orientata** se si è scelto su di essa un orientamento, il quale sarà detto **orientamento positivo**. Talvolta la curva orientata positivamente sarà indicata con $+\mathcal{C}$, mentre la curva avente orientamento opposto sarà indicata con $-\mathcal{C}$.

Quando φ rappresenta un moto è naturale considerare il **vettore velocità media** in un certo intervallo temporale $[t, t + \Delta t]$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_m(t) = {} & \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \\ & = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Si definisce **vettore velocità istantanea**, o semplicemente velocità, al tempo t (quando esiste), il limite della velocità media al tendere di Δt a 0, cioè

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Ovviamente tale limite esiste se e soltanto se le funzioni componenti $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono derivabili in t e, in tal caso, si dice anche che la funzione φ è differenziabile e, in notazione cartesiana, scriveremo

$$\varphi'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Il vettore $\mathbf{v}(t)$, quando non nullo, è tangente alla curva $\mathcal{C}$ nel punto $\varphi(t)$, dato che la sua direzione e il suo verso si ottengono come limite di quelli delle secanti alla curva.

Il modulo del vettore velocità, detto anche **velocità scalare**, è

$$|\mathbf{v}(t)| = v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Similmente, si definiscono l'**accelerazione media** e l'**accelerazione (istantanea)** $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k},$$

la quale esiste se e soltanto se le funzioni componenti $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono derivabili due volte in t. Tali definizioni si generalizzano ai casi in cui $\varphi(t)$ non rappresenti la legge oraria di un moto.

Esercizio 1.5. Determinare i vettori velocità e accelerazione relativi alle parametrizzazioni dell'esempio precedente.

Definizione 1.6. Una rappresentazione parametrica $\varphi(t)$ è detta **regolare** se il vettore velocità è definito su I, ed ivi continuo e mai nullo, ovvero se esistono e sono continue in I le derivate prime delle funzioni componenti ed inoltre $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} > 0$ per ogni $t \in I$.

Esempio 1.7. Consideriamo le seguenti parametrizzazioni della parabola di equazione $y = x^2$:

$$1) \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad 2) \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La prima rappresentazzione è regolare, la seconda no.

Definizione 1.8. Una rappresentazione parametrica $\varphi(t)$ di una curva $\mathcal{C}$ è detta **regolare a tratti** se φ è continua su I e se l'intervallo I si può suddividere in un numero finito di sottointervalli I_k, $k = 1, ..., K$, tali che la restrizione di φ a ciascun I_k è regolare. Indicata con $\mathcal{C}_k$ la curva $\varphi(I_k)$, per $k = 1, , , K$, si ha che $\mathcal{C} = \cup_{k=1}^{K} \mathcal{C}_k$. In tal caso il vettore velocità potrebbe non essere definito per i valori di t coincidenti con gli estremi dei sottointervalli, quindi nei corrispondenti punti della curva (estremi delle curve $\mathcal{C}_k$) potrebbe non esistere la retta tangente. Ad esempio, le linee spezzate sono curve aventi rappresentazione regolare a tratti.

Parametrizzazione di segmenti.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ di $\mathbb{R}^3$, una parametrizzazione regolare semplice standard della curva orientata consistente nel segmento avente punto iniziale P_1 e punto finale P_2 è la seguente:

$$\varphi(t) = P_1 + t(P_2 - P_1), \quad \text{per } t \in [0, 1],$$

ovvero, in forma estesa,

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Esempio 1.9. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di derivata continua su un intervallo I. Il suo grafico

$$gr(f) = \{(x, f(x)),\ x \in I\}$$

è una curva, detta **curva piana cartesiana**, avente la seguente parametrizzazione standard $\varphi(x) = (x, f(x))$, $x \in I$, ovvero

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

che è regolare. Infatti $\varphi'(x) = (1, f'(x))$, $|\varphi'(x)| = \sqrt{1 + (f'(x))^2} > 0$, per ogni $x \in I$.

Esercizio 1.10. Parametrizzare la curva intersezione delle superfici di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e $z = x + y$.

Lunghezza di una curva.

Consideriamo una curva $\mathcal{C}$ avente parametrizzazione regolare semplice $\varphi(t)$, per $t \in I = [a, b]$. Ci poniamo il problema di dare una definizione di lunghezza di $\mathcal{C}$ e di calcolarla. L'idea è quella di approssimare $\mathcal{C}$ con delle linee spezzate. Considerata una suddivisione di I data da $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, sia Σ la spezzata formata dai segmenti $[\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)]$, per $i = 1, ..., n$. La lunghezza di Σ è data da

$$\text{lungh}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i,$$

dove $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})$. La spezzata Σ approssima la curva $\mathcal{C}$ con un miglior grado di precisione al diminuire dell'ampiezza Δt_i di ciascun sottointervallo. In effetti si può verificare che, nelle nostre ipotesi, esiste finito

$$\lim_{\max_i \Delta t_i \to 0} \text{lungh}(\Sigma) = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt = \int_a^b v(t)dt =$$
$$= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Si può anche verificare che tale limite è indipendente dalla scelta della parametrizzazione regolare semplice di $\mathcal{C}$, ragion per cui si può definire senza ambiguità

$$\text{lungh}(\mathcal{C}) = \int_a^b v(t)dt.$$

Osservazione 1.11. Se $\mathcal{C}$ ha una rappresentazione parametrica semplice regolare a tratti, si definisce

$$\text{lungh}(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{K} \text{lungh}(\mathcal{C}_k).$$

Esercizio 1.12. Calcolare la lunghezza della circonferenza di raggio R.

Indichiamo con $s(t)$ la lunghezza dell'arco di $\mathcal{C}$ immagine dell'intervallo $[a, t]$, cioè

$$s(t) = \int_a^t v(\tau)d\tau.$$

Rimane allora definita una funzione

$$s : \quad [a, b] \longrightarrow [0, \text{lungh}(\mathcal{C})]$$

$$t \in [a, b] \mapsto s(t) = \textstyle\int_a^t v(\tau)d\tau.$$

Osserviamo che

$$s'(t) = v(t) > 0, \forall t \in [a, b].$$

Quindi la funzione $s(t)$ è strettamente crescente in $[a,b]$ e quindi invertibile. Sia

$$t: \quad [0, \text{lungh}(\mathcal{C})] \longrightarrow [a,b]$$

$$s \in [0, \text{lungh}(\mathcal{C})] \mapsto t(s)$$

la sua inversa e sia

$$\psi: \quad [0, \text{lungh}(\mathcal{C})] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$s \in [0, \text{lungh}(\mathcal{C})] \mapsto \psi(s) = \varphi(t(s)).$$

Allora $\psi(s)$ è una nuova rappresentazione parametrica di $\mathcal{C}$ nel parametro s, detto **ascissa curvilinea** o **lunghezza d'arco**. L'ascissa curvilinea s rappresenta la lunghezza dell'arco di $\mathcal{C}$ dal punto iniziale $\psi(0)$ a $\psi(s)$; in altre parole $\psi(s)$ è quel punto di C tale che l'arco compreso tra $\psi(0)$ a $\psi(s)$ ha lunghezza s. La parametrizzazione $\psi(s)$ è dunque intrinseca alla curva orientata C (su cui cioè sia stato scelto uno dei due orientamenti) ed è detta **parametrizzazione della lunghezza d'arco**. Calcoliamo

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s)} = \frac{1}{v(t(s))},$$

$$\psi'(s) = \varphi'(t(s))t'(s) = \frac{\mathbf{v}(t(s))}{v(t(s))},$$

$$|\psi'(s)| = 1,$$

da cui si deduce che una curva parametrizzata in termini della lunghezza d'arco è percorsa con velocità unitaria.

Si noti che gli indicatori chilometrici posti lungo le autostrade indicano la lunghezza d'arco (ascissa curvilinea) calcolata a partire da un fissato punto iniziale.

Formalmente, si ha $\frac{ds}{dt} = v(t)$ e si definisce **elemento di lunghezza d'arco**:

$$ds = v(t)dt = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt.$$

Tale terminologia è motivata dal fatto che la lunghezza dell'arco di curva corrispondente ad un intervallo $[t, t+\Delta t]$ è approssimata da $|\Delta\mathbf{r}| = |\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}|\Delta t$ e, per Δt "piccolo", usando la notazione degli infinitesimi ($\Delta t = dt$, $\Delta\mathbf{r} = d\mathbf{r}$), si ha $|d\mathbf{r}| = v(t)dt = ds$. Per questo motivo si indica anche

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b v(t)dt = \text{lungh}(\mathcal{C}).$$

In particolare, se si usa la parametrizzazione della lunghezza dell'arco, si ha

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_0^{\text{lungh}(\mathcal{C})} ds = \text{lungh}(\mathcal{C}).$$

Se $\mathcal{C}$ è una curva piana cartesiana grafico della funzione $y = f(x)$, per $x \in [a, b]$, si ha

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$\text{lungh}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Se $\mathcal{C}$ è una curva piana espressa in coordinate polari da

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \vartheta = \vartheta(t) \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

si ha

$$\begin{cases} x = \rho(t)\cos(\vartheta(t)) \\ y = \rho(t)\sin(\vartheta(t)) \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

da cui

$$ds = \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t))^2(\vartheta'(t))^2}dt$$

Se $\mathcal{C}$ è una curva piana polare, cioè descritta da $\rho = \rho(\vartheta)$, al variare di ϑ in un intervallo $[\alpha, \beta]$, ponendo $t = \vartheta$ e riconducendosi al caso precedente si ha

$$ds = \sqrt{(\rho'(\vartheta))^2 + (\rho(\vartheta))^2}d\vartheta$$

Integrali di linea o di prima specie.

Data una funzione $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f continua su B, e data una curva $\mathcal{C}$ contenuta in B avente parametrizzazione regolare semplice $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$, si definisce **integrale di linea di f lungo $\mathcal{C}$**:

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\varphi(t))v(t)dt.$$

Si può verificare che il valore di tale integrale non dipende dalla parametrizzazione (regolare semplice) di $\mathcal{C}$.

Osservazione 1.13. Se $\mathcal{C}$ ha una rappresentazione parametrica semplice regolare a tratti, si definisce

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \sum_{k=1}^{K} \int_{\mathcal{C}_k} f ds.$$

Gli integrali di linea vengono anche detti **integrali curvilinei di prima specie**.

Applicazioni.
a) Dato un filo materiale $\mathcal{C}$ avente densità di massa $\delta(x, y, z)$, la sua massa è data da

$$m(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \delta ds,$$

il suo baricentro $C(x_C, y_C, z_C)$ ha coordinate:

$$x_C = \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} x\delta(x, y, z)ds,$$

$$y_C = \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} y\delta(x, y, z)ds,$$

$$z_C = \frac{1}{m(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} z\delta(x, y, z)ds,$$

i suoi momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati x, y, z sono rispettivamente

$$I_x = \int_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)ds,$$

$$I_y = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)ds,$$

$$I_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)ds,$$

e similmente per curve piane.
b) Sia $\mathcal{C}$ una curva piana e sia f una funzione continua definita su $\mathcal{C}$, tale che $f \geq 0$. Sia Σ la superficie sottografico di f, cioè $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{C}, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. L'area della superficie Σ è data da

$$\text{area}(\Sigma) = \int_{\mathcal{C}} f ds.$$

Esercizio 1.14. Calcolare la lunghezza ed il baricentro dell'arco di elica circolare

$$\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{i} + a\sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k},$$

compreso tra $P(a, 0, 0)$ e $Q(a, 0, 2\pi b)$.

Esercizio 1.15. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x della semicirconferenza di centro O e raggio a contenuta nel semipiano $\{y \geq 0\}$.

Esercizio 1.16. Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{C}, 0 \leq z \leq x + y^3\}$, con $\mathcal{C}$ il segmento da $O(0,0)$ ad $A(1,1)$. (Si tratta della porzione del piano $y = x$ compresa tra il grafico di $z(x, y) = x + y^3$, il piano $z = 0$ e la retta verticale passante per $B(1,1,0)$).

Campi scalari e campi vettoriali.

Definizione 1.17. Sia $n = 2$ o $n = 3$. Una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice **campo scalare**.

Sono esempi di campi scalari la temperatura $T(x, y, z)$ e la densità di un corpo materiale $\delta(x, y, z)$.

Definizione 1.18. Sia $n = 2$ o $n = 3$. Una funzione $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice **campo vettoriale**. Indicata con F_i la i-esima componente di $\mathbf{F}$, scriveremo $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_n)$.

Sono esempi di campi vettoriali: il campo gravitazionale generato da un corpo (cioè la forza gravitazionale esercitata dal corpo su un punto materiale di massa unitaria posto nel generico punto $P(x, y, z)$); il campo elettrostatico generato da una conduttore elettrico (cioè la forza elettrostatica esercitata da un conduttore elettrico su una carica elettrica unitaria posta nel generico punto $P(x, y, z)$); il campo delle velocità di un fluido (assegna ad ogni punto il vettore velocità $\mathbf{v}(x, y, z)$ di una particella posta in $P(x, y, z)$).

Definizione 1.19. Una campo vettoriale si dice continuo in D se lo sono le sue componenti F_i; si dice differenziabile in D se lo sono le sue componenti F_i.

Osservazione 1.20. Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un campo scalare differenziabile allora $\mathbf{F} = \nabla f$ è un campo vettoriale. Tale campo vettoriale assegna ad ogni punto di D il vettore la cui direzione e verso sono quelli di massima rapidità di crescita di f e il cui modulo è la rapidità di crescita di f. Si parla ad esempio di gradiente di temperatura, gradiente di pressione.

Dato che il gradiente di un campo scalare è un campo vettoriale, è naturale chiedersi se ogni campo vettoriale sia il gradiente di un campo scalare.

Più precisamente, dato un campo vettoriale definito e continuo in un aperto $D \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$, ci si chiede se esista un campo scalare $\Phi(x, y, z)$ differenziabile con continuità su D tale che

$$\nabla\Phi(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z),$$

ovvero tale che

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_3.$$

Osserviamo che in una dimensione, cioè per campi scalari, ciò è vero, infatti se F è una funzione continua di una variabile reale esiste una funzione derivabile con continuità Φ tale che $\Phi' = F$.

Vediamo con un controesempio che in generale questo non vale per i campi vettoriali. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Le sue componenti $F_1 = -y$ e $F_2 = x$ sono differenziabili con continuità, per cui se esistesse un campo scalare $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla\Phi = \mathbf{F}$, per il teorema di Schwarz si avrebbe $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$, mentre invece è $\Phi_{xy} = -1$, $\Phi_{yx} = 1$, da cui si ha una contraddizione.

E' perciò significativo dare la seguente definizione

Definizione 1.21. Una campo vettoriale continuo $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice **conservativo** in D se esiste un campo scalare differenziabile $\Phi : D \to \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ in D. Un campo scalare Φ verificante tale condizione è detto **potenziale** di $\mathbf{F}$.

Ad esempio, il campo gravitazionale della Terra è $\mathbf{F} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$, dove il baricentro della Terra è posizionato nell'origine, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, M è la massa della Terra e G è la costante di gravitazione universale. Le componenti di $\mathbf{F}$ sono $F_1 = -\frac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $F_2 = -\frac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $F_3 = -\frac{GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. Il campo gravitazionale $\mathbf{F}$ è un campo conservativo, infatti il campo scalare $\Phi(x, y, z) = \frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{GM}{r}$ verifica $\nabla\Phi = \mathbf{F}$ ed è detto potenziale gravitazionale.

Osservazione 1.22. Se Φ è un potenziale di $\mathbf{F}$, allora anche $\Phi + c$ lo è, al variare di $c \in \mathbb{R}$, dato che $\nabla(\Phi + c) = \nabla\Phi = \mathbf{F}$. Quindi il potenziale di un campo vettoriale su un sottinsieme aperto e connesso D di $\mathbb{R}^n$ è determinato a meno di una costante additiva.

Possiamo utilizzare il teorema di Schwarz per dare le seguenti **condizioni necessarie** affinchè un campo differenziabile $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia conservativo.

Se $n = 2$ e $\mathbf{F}$ è conservativo allora $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Se $n = 3$ e $\mathbf{F}$ è conservativo allora $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$.

Integrali curvilinei di seconda specie.

Per introdurli, prendiamo in considerazione un esempio importante che ci viene dalla meccanica. Consideriamo un corpo materiale che compie uno spostamento $\mathbf{s}$ mentre su di esso agisce una forza $\mathbf{F}$ che non varia al variare della posizione. Il lavoro W che la forza $\mathbf{F}$ compie durante lo spostamento s del corpo è definito come il prodotto scalare $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}\right)|\mathbf{s}|$. E' cioè il prodotto della componente tangenziale della forza per il modulo dello spostamento.

Consideriamo ora una forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ che dipende dalla posizione e che agisce su un corpo durante il suo spostamento lungo una curva orientata $\mathcal{C}$. Si vuole calcolare il lavoro W compiuto da $\mathbf{F}$. Alla luce del semplice caso appena discusso, definiamo

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds,$$

dove $\mathbf{T}$ è il vettore tangente unitario alla curva orientata $\mathcal{C}$. Se $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$ è una parametrizzazione regolare della curva orientata $\mathcal{C}$ si ha

$$\mathbf{T} = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)},$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} v(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \\ = \int_a^b \left[F_1(\varphi(t)) x'(t) + F_2(\varphi(t)) y'(t) + F_3(\varphi(t)) z'(t)\right] dt.\end{aligned}$$

Un altro approccio consiste nel suddividere l'intervallo $[a, b]$ in sottointervalli $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., m$, dove $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$, e nell'approssimare il lavoro W con la somma dei lavori elementari ΔW_i compiuti durante gli spostamenti $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta z_i \mathbf{k}$, per $i = 1, ..., m$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \Delta W_i = \sum_{i=1}^m \mathbf{F}(\varphi(t_i^*)) \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \\ = \sum_{i=1}^m F_1(\varphi(t_i^*)) \Delta x_i + F_2(\varphi(t_i^*)) \Delta y_i + F_3(\varphi(t_i^*)) \Delta z_i = \\ = \sum_{i=1}^m \left(F_1(\varphi(t_i^*)) \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + F_2(\varphi(t_i^*)) \frac{\Delta y_i}{\Delta t} + F_3(\varphi(t_i^*)) \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \right) \Delta t\end{aligned}$$

con $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$.

Al limite, per $\Delta t \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[F_1(\varphi(t)) x'(t) + F_2(\varphi(t)) y'(t) + F_3(\varphi(t)) z'(t)\right] dt = \\ = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} v(t) dt = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds.\end{aligned}$$

Usando la notazione dei differenziali si ha formalmente che $x'(t)dt = dx$, $y'(t)dt = dy$, $z'(t)dt = dz$, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, per cui l'integrale di sopra viene indicato:

$$\int_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

o anche

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e viene detto **integrale di linea della componente tangenziale di F lungo la curva orientata** $\mathcal{C}$. Si osservi che il valore dell'integrale non varia se si varia la parametrizzazione conservando il verso di percorrenza, mentre se si considerano parametrizzazioni aventi l'orientamento opposto si ottiene il risultato opposto, dato che cambia il segno della componente tangenziale della forza.

Se $\mathcal{C}$ è una curva chiusa $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ è detto **circolazione** (o **circuitazione**) di $\mathbf{F}$ lungo $\mathcal{C}$ ed il fatto che la curva sia chiusa viene talvolta ricordato disegnando un cerchietto sull'integrale: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

La definizione, qui motivata a partire da un esempio, viene estesa a qualunque campo vettoriale $\mathbf{F}$ definito e continuo su un sottinsieme D di $\mathbb{R}^n$, e a qualunque curva orientata $\mathcal{C}$ avente rappresentazione regolare a tratti.

Tali integrali vengono anche detti **integrali cuvilinei di seconda specie**.

Definizione 1.23. Un'espressione del tipo

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz,$$

dove F_i sono funzioni continue su un sottinsieme aperto A di $\mathbb{R}^3$, è detta **forma differenziale lineare**. Le funzioni F_i sono dette **coefficienti** della forma differenziale lineare.

Sia $\mathcal{C}$ una curva contenuta in A avente rappresentazione parametrica regolare $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$.

Definiamo integrale esteso a $\mathcal{C}$ della forma differenziale lineare $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$:

$$\int_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz =$$

$$= \int_a^b [F_1(\varphi(t))x'(t) + F_2(\varphi(t))y'(t) + F_3(\varphi(t))z'(t)]dt = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

dove $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Si ha che parametrizzazioni con lo stesso orientamento danno luogo allo stesso valore dell'integrale, parametrizzazioni con orientamenti opposti danno luogo a valori opposti.

Definizione 1.24. Una forma differenziale lineare $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ si dice **esatta in** A se il campo vettoriale ad essa associato $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è conservativo in A, cioè se esiste un campo scalare Φ definito e differenziabile in A tale che $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ in A ($F_1 = \Phi_x$, $F_2 = \Phi_y$, $F_3 = \Phi_z$). Il campo scalare Φ è detto **primitiva della forma differenziale**.

Definizione 1.25. Una forma differenziale lineare $F_1dx+F_2dy+F_3dz$ si dice **chiusa in** A se i suoi coefficienti F_i sono differenziabili e se il campo vettoriale ad essa associato $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ verifica in A le condizioni necessarie per la conservatività, cioè $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$.

E' evidente che se $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ è una forma differenziale lineare a coefficienti differenziabili esatta in A essa è anche chiusa in A. Vedremo più avanti (esempio 1.33) che non vale il viceversa, cioè che una forma differenziale chiusa non è necessariamente esatta.

Analoghe definizioni vengono date in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 1.26. Calcolare

$$\int_C y^2dx + 2xydy$$

da $O(0,0)$ a $A(1,1)$ lungo

a) il segmento che unisce i due punti;

b) l'arco di parabola di equazione $y = x^2$;

c) la spezzata costituita dai segmenti che uniscono rispettivamente O con $B(0,1)$ e B con A.

In tutti e tre i casi si ottiene lo stesso risultato: 1. Sorge il dubbio che siano rilevanti solo i punti iniziale e finale e non il percorso seguito.

Esercizio 1.27. Calcolare

$$\int_C ydx - xdy$$

da $A(1,0)$ a $B(0,-1)$ lungo

a) il segmento che unisce i due punti;

b) l'arco circonferenza di raggio 1 e centro O percorsa in senso antiorario.

Nel primo caso si ottiene 1, nel secondo caso si ottiene $-\frac{3}{2}\pi$.

Cerchiamo di individuare in cosa differiscono i due esempi precedenti. Si può notare che la forma differenziale del primo esempio è chiusa (anzi è esatta, con prinitiva $\Phi(x, y) = xy^2$, mentre nel secondo esempio la forma differenziale non è chiusa, quindi non è nemmeno esatta.

Vedremo ora che ciò non è casuale.

Definizione 1.28. Un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice **connesso** se per ogni coppia di punti P, Q di A esiste una curva conttenuta in A avente per estremi P e Q.

Definizione 1.29. Un aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa contenuta in A può essere deformata con continuità in A fino ad essere ridotta a un punto.

Esempio 1.30. Ad esempio, sono aperti connessi ma non semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$: le corone circolari, i dischi privati di un punto.

Si noti che l'equivalente in $\mathbb{R}^3$ della corona circolare è l'anello (differenza di due palle concentriche di raggi diversi), ma che tale insieme è semplicemente connesso!

Ad esempio, sono aperti connessi ma non semplicemente connessi in $\mathbb{R}^3$: l'insieme aperto delimitato da due cilindri coassiali (limitati o illimitati) aventi raggi diversi, il toro (ciambella).

Teorema 1.31. *Sia D un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $\boldsymbol{F}$ un campo vettoriale continuo su D (equivantemente sia $F_1dx+F_2dy+F_3dz$ una forma differenziale lineare). Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

i) $\boldsymbol{F}$ è conservativo in D (cioè $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ è esatta in D);

ii) Per ogni coppia di punti P e Q appartenenti a D, l'integrale $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ ($\int_{\mathcal{C}} F_1dx + F_2dy + F_3dz$) assume lo stesso valore per tutte le curve orientate contenute in D di punto iniziale P e punto finale Q, che ammettono rappresentazione regolare a tratti.

Inoltre, se i) o, equivalentemente, ii), è soddisfatta, e se Φ è un potenziale di $\boldsymbol{F}$ (cioè una primitiva di $F_1dx + F_2dy + F_3dz$) si ha

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1dx + F_2dy + F_3dz = \Phi(Q) - \Phi(P). \tag{1.1}$$

In particolare, se $P = Q$ si ha che $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$.

Si noti la somiglianza con il teorema fondamentale del calcolo, da cui la scelta del termine primitiva per Φ.

Teorema 1.32. *Sia D un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ una forma differenziale lineare differenziabile in D. Allora $F_1dx + F_2dy + F_3dz$ è esatta in D se e solo se è chiusa in D.*

Alla luce dei teoremi precedenti, possiamo ora introdurre un controesempio per verificare che la chiusura di una forma differenziale non ne implica l'esattezza.

Esempio 1.33. La forma differenziale $-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ è chiusa in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, ma non esatta, in quanto $\oint_{\mathcal{C}} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi \neq 0$, dove C è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Si noti che D non è semplicemente connesso.

E' anche interessante riprendere l'esercizio 1.26, osservando che $\int_{\mathcal{C}} y^2dx + 2xydy = \Phi(A) - \Phi(O) = 1$, per ogni curva orientata $\mathcal{C}$ da A a O, essendo $\Phi(x, y) = xy^2$ una primitiva della forma differenziale.

In generale, se si deve calcolare l'integrale di una forma differenziale chiusa in un aperto semplicemente connesso D lungo una curva orientata $\mathcal{C}$ contenuta in D di punto iniziale P e punto finale Q, si può calcolare l'integrale curvilineo lungo una curva orientata più elementare avente gli stessi punti iniziale e finale e contenuta in D. Se poi si riesce a calcolare una primitiva Φ di $F_1dx + F_2dy + F_3dz$, allora conviene utilizzare la formula (1.1).

Formule di Gauss-Green.

Sia D un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera $\mathcal{F}D$ sia costituita da un numero finito di curve chiuse semplici regolari a tratti. Definiamo **orientazione positiva** o **verso positivo** di $\mathcal{F}D$ quella per cui D si trova alla sinistra di un osservatore che la percorra nel verso positivo. Ne segue che la frontiera esterna è orientata secondo il verso antiorario e le eventuali frontiere interne secondo il verso orario. La frontiera di D così orientata viene indicata con $+\mathcal{F}D$.

Teorema 1.34 (Teorema di Gauss-Green). *Nelle ipotesi sopra elencate, siano $A = A(x, y)$ e $B = B(x, y)$ due funzioni differenziabili con continuità in un aperto contenente $D \cup \mathcal{F}D$. Si ha*

$$\int_{+\mathcal{F}D} Adx + Bdy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dxdy \tag{1.2}$$

La formula (1.2) permette di ricondurre il calcolo di un integrale doppio a quello di un integrale curvilineo di seconda specie e viceversa.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che D sia contemporaneamente x-semplice e y-semplice, cioè

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, h(x) < y < g(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c < y < d, \varphi(y) < x < \psi(y)\} \end{aligned}$$

Essendo $\frac{\partial A}{\partial y}$ continua sull'insieme chiuso e limitato $D \cup \mathcal{F}D$, essa è ivi integrabile e si ha inoltre che $\frac{\partial A}{\partial y}$ è integrabile su D e che

$$\iint_D \frac{\partial A}{\partial y} dxdy = \iint_{D \cup \mathcal{F}D} \frac{\partial A}{\partial y} dxdy.$$

Applicando il teorema di Fubini si ha allora che

$$\iint_D \frac{\partial A}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial A}{\partial y}(x,y)dy = \int_a^b A(x,g(x)) - A(x,h(x))dx. \tag{1.3}$$

D'altra parte $+\mathcal{F}D = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$, con

$$\mathcal{C}_1 \quad ... \begin{cases} x = x \\ y = h(x) \end{cases} \qquad x \in [a,b], \qquad -\mathcal{C}_2 \quad ... \begin{cases} x = x \\ y = g(x) \end{cases} \qquad x \in [a,b],$$

$$-\mathcal{C}_3 \quad ... \begin{cases} x = a \\ y = y \end{cases} \qquad y \in [h(a), g(a)], \quad \mathcal{C}_4 \quad ... \begin{cases} x = b \\ y = y \end{cases} \qquad y \in [h(b), g(b)],$$

dove con $-\mathcal{C}_2$, $-\mathcal{C}_3$ si sono indicate le curve aventi verso opposto a quello di $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ rispettivamente. Si osservi che $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ sono segmenti verticali, eventualmente ridotti a un punto e che quindi una o entrambe le curve $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ potrebbero non comparire nella rappresentazione di $+\mathcal{F}D$. In ogni caso, si verifica subito che

$$\int_{\mathcal{C}_3} Adx = \int_{\mathcal{C}_4} Adx = 0.$$

Dunque, ricordando la (1.3), si ha

$$\int_{+\mathcal{F}D} Adx = \int_{\mathcal{C}_1} Adx - \int_{-\mathcal{C}_2} Adx = \int_a^b A(x,h(x)) - A(x,g(x))dx =$$
$$= - \iint_D \frac{\partial A}{\partial y} dxdy. \tag{1.4}$$

Similmente, usando il fatto che D è x-semplice, si dimostra che

$$\int_{+\mathcal{F}D} Bdy = \iint_D \frac{\partial B}{\partial x} dxdy, \tag{1.5}$$

e, sommando (1.4) e (1.5), si ottiene la formula (1.2).

Nel caso generale, si possono trovare un numero finito di aperti connessi D_i, $i = 1, ..., m$, a due a due disgiunti, che sono sia x-semplici che y-semplici e tali che $\cup_{i=1}^m (D_i \cup \mathcal{F}D_i) = D \cup \mathcal{F}D$. Per il caso precedente si ha allora

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} dxdy = \sum_{i=1}^m \iint_{D_i} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} dxdy = \sum_{i=1}^m \int_{+\mathcal{F}D_i} Adx + Bdy.$$

Si verifica facilmente che le parti della frontiera dei D_i che sono comuni a due regioni adiacenti vengono percorse in versi opposti per cui, nella sommatoria, i contributi dovuti a tratti di frontiere interni a D si cancellano e rimane quindi soltanto $\int_{+\mathcal{F}D} Adx + Bdy$.

$\blacksquare$

Corollario 1.35. *Sia D un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera $\mathcal{F}D$ sia costituita da un numero finito di curve chiuse semplici regolari a tratti. Si ha*

$$\mathit{area}(D) = \int_{+\mathcal{F}D} xdy = -\int_{+\mathcal{F}D} ydx = \frac{1}{2}\int_{+\mathcal{F}D} xdy - ydx. \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Basta scegliere in (1.2) rispettivamente $A(x, y) \equiv 0$ e $B(x, y) = x$, oppure $A(x, y) = -y$ e $B(x, y) \equiv 0$, oppure $A(x, y) = -y$ e $B(x, y) = x$. $\blacksquare$

Osservazione 1.36. Sia $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una rappresentazione parametrica regolare di $+\mathcal{F}D$. Il vettore tangente unitario $\mathbf{T}$ nel punto $\varphi(t)$ è dato da

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \left(\frac{x'(t)}{v(t)}, \frac{y'(t)}{v(t)}\right), \tag{1.7}$$

con $v(t) = \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Ruotando il vettore $\mathbf{T}$ applicato in $\varphi(t)$ in senso orario di un angolo retto si ottiene un vettore ortogonale a $\mathbf{T}$ che punta verso l'esterno di D e di modulo unitario Tale vettore è indicato con $\mathbf{n}$ ed è detto normale esterna a D in $\varphi(t)$. In coordinate cartesiane si ha

$$\mathbf{n} = \left(\frac{y'(t)}{v(t)}, \frac{-x'(t)}{v(t)}\right), \tag{1.8}$$

come si può facilmente verificare, ad esempio, identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e moltiplicando $\mathbf{T}$ per $-i$.

La precedente osservazione è motivata dal fatto che vogliamo ora riformulare il teorema di Gauss-Green usando la notazione vettoriale.

Sia $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale piano definito e differenziabile con continuità in un aperto A contenente $D \cup \mathcal{F}D$, Poniamo nel teorema di Gauss-Green $A = -F_2$, $B = F_1$, ottenendo

$$\int_{+\mathcal{F}D} -F_2dx + F_1dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy \tag{1.9}$$

Indicata con $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, una parametrizzazione regolare atratti di $+\mathcal{F}D$, si ha

$$\int_{+\mathcal{F}D} -F_2 dx + F_1 dy = \int_a^b [-F_2(\varphi(t))x'(t) + F_1(\varphi(t))y'(t)]dt =$$

$$= \int_a^b \left[F_1(\varphi(t))\frac{y'(t)}{v(t)} + F_2(\varphi(t))\frac{-x'(t)}{v(t)} \right] v(t)dt = \int_{\mathcal{F}D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds \quad (1.10)$$

Da (1.9) e (1.10) si ha

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\mathcal{F}D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds \quad (1.11)$$

Si noti che la scelta dell'orientamento di $\mathcal{F}D$ nell'integrale di seconda specie in (1.2) si riflette nella scelta della normale esterna nell'integrale di prima specie (1.11).

Definizione 1.37. Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale differenziabile su un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Si definisce **divergenza** di $\mathbf{F}$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad (1.12)$$

Teorema 1.38 (Teorema della divergenza). *Sia D un aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera $\mathcal{F}D$ sia costituita da un numero finito di curve chiuse semplici regolari a tratti. Sia $\boldsymbol{F}$ un campo vettoriale differenziabile su un aperto A contenente $D \cup \mathcal{F}D$. Vale la seguente formula*

$$\iint_D \operatorname{div}(\boldsymbol{F})dxdy = \int_{\mathcal{F}D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\ ds, \quad (1.13)$$

dove $\boldsymbol{n}$ è la normale esterna a D.

Si noti che $\int_{\mathcal{F}D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ ds$ rappresenta il flusso del campo $\mathbf{F}$ uscente dalla frontiera di D.

Il teorema dell'energia cinetica.

Sia $\mathbf{F}$ un campo di forze continuo su un aperto A di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{C}$ una curva orientata di punto iniziale P e punto finale Q contenuta in A, avente paramatrizzazione regolare $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $t \in [a, b]$, con funzioni componenti di classe $C^2([a, b])$. Dalla seconda legge della dinamica si ha $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$ e perciò il lavoro compiuto dal campo di forze su una particella di massa m che percorre la curva orientata C è dato da

$$
\begin{aligned}
W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \\
= \int_a^b [mx''(t)x'(t) + my''(t)y'(t) + mz''(t)z'(t)] dt = \\
= \int_a^b \frac{m}{2} \frac{d}{dt} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2] dt = \frac{1}{2} m v^2(b) - \frac{1}{2} m v^2(a). \quad (1.14)
\end{aligned}
$$

Essendo $E_c(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$ l'**energia cinetica** della particella si è ottenuto che il lavoro W è uguale alla variazione dell'energia cinetica della particella nel passare da P a Q lungo il percorso $\mathcal{C}$.

Se, inoltre, il campo di forze $\mathbf{F}$ è conservativo, si ha che il lavoro W non dipende dal percorso ed è dato da

$$W = \Phi(Q) - \Phi(P) \tag{1.15}$$

dove Φ è un potenziale di $\mathbf{F}$. In tal caso si definisce $V = -\Phi$ **energia potenziale** e da (1.14) e (1.15) si ha

$$E_c(b) + V(\mathbf{r}(b)) = E_c(a) + V(\mathbf{r}(a)), \tag{1.16}$$

cioè la somma dell'energia cinetica e potenziale, detta **energia totale**, si conserva. Abbiamo quindi ottenuto la **legge di conservazione dell'energia**:

$$E_T = E_c + V = \text{cost.} \tag{1.17}$$

Da qui la scelta del nome conservativo per un campo dotato di potenziale.