Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione autunnale, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ◯ **Ingegneria Navale** ◯

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di potenze nel corpo complesso $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(z-i)^{n+1}$.

(i) Si determini, giustificando la risposta, il raggio di convergenza della serie.

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie converge nei punti $i - \dfrac{1}{2}$ e $i + \dfrac{1}{2}$.

(iii) Si calcoli, giustificando la risposta, la somma della serie nel punto $\dfrac{3}{4}i$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^4 + y^2 + 2x^2y + 1$.

(i) Si calcoli il gradiente $\nabla f(x,y)$.

(ii) Si calcoli la matrice Hessiana $Hf(x,y)$.

(iii) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2 nel punto $(1,-1)^T$.

(iv) Si determinino i punti critici di f.

(v) Si provi che $\min_{\mathbb{R}^2} f = 1$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$.

(vi) Si determinino gli insiemi di livello $L_k(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$, che non sono curve regolari in forma implicita.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$E = \{(x, y, z)^T : \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 2 - \frac{x^2}{4} - y^2\}.$$

(i) Si provi che E è un insieme sezionabile rispetto all'asse z e se ne descrivano le sezioni S_z.

(ii) Si calcoli $m_3(E)$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = (e^x \log y,\, y + 2 \arctan(x + y))^T.$$

(i) Per ogni $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, si calcoli la matrice Jacobiana $Jg(x_0, y_0)$.

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se il campo vettoriale lineare $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da $h(x, y) = Jg(0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, è conservativo.

(iii) Si risolva il sistema di equazioni differenziali lineari $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.