Esame di Analisi matematica II : esercizi
A.a. 2009-2010, sessione estiva, I appello

Corso: **OMARI** ◯ **TIRONI** ◯

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Si risolvano gli esercizi : **1** ◯ **2** ◯ **3** ◯ **4** ◯ **5** ◯ **6** ◯

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, per $n \in \mathbb{N}^+$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{n\, e^x}{n + \sin^2 x}.$$

(i) Si calcoli, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(ii) Si provi che la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente in ogni intervallo superiormente limitato.

(iii) Si calcoli $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1}{1 + y^2}.$$

Si determinino

- il gradiente di f:

- la matrice Hessiana di f:

- i punti critici di f:

- la natura dei punti critici di f:

- gli estremi assoluti di f:

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la massa del toro

$$T = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq r, R - \sqrt{r^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{r^2 - z^2} \right\},$$

con $0 < r < R$, avente densità $\mu(x, y, z) = |z|$.

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = xe^y + ye^x.$$

(*i*) Si provi che $\Gamma = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ è il sostegno di una curva regolare in forma implicita.

(*ii*) Si provi che, in un intorno di $(0, 0)^T$, Γ è il grafico di una funzione $y = g(x)$.

(*iii*) Si calcolino $g'(0)$ e $g''(0)$.

(*iv*) Si provi che, in un intorno di $(0, 0)^T$, $\Gamma \subseteq \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si determini una soluzione definita su $\mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \sqrt{1-(y')^2} \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 6. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$g(x, y, z) = (2x + yz, 2xz + y, xy + 2z)^T$$

attraverso il sostegno Σ della superficie ellissoidale $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi(u, v) = (\cos u \sin v, 2 \sin u \sin v, 3 \cos v)^T .$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO