Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione invernale, III appello
Corso prof. P. Omari

COGNOME ____________________ **NOME** ____________________

N. Matricola ____________________ **Anno di corso** ____________________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ◯ **Ingegneria Navale** ◯

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si definisca $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, ponendo $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$

(i) Si determini il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$ nell'intervallo $[0,1]$.

(ii) Si traccino i grafici di f_n e di f.

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

(iv) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$.

ESERCIZIO N. 2. Si definisca $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ponendo $f(x, y, z) = 2x^2 - xy^2 + 2y^2 + z^2$.

(i) Si calcoli $\nabla f(x, y, z)$.

(ii) Si calcoli $Hf(x, y, z)$.

(iii) Si deteminino i punti critici di f.

(iv) Si calcolino gli autovalori della matrice Hessiana valutata nei punti critici.

(v) Si determini la natura dei punti critici.

(vi) Si determinino $\inf_{\mathbb{R}^3} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^3} f$.

(vii) Si determinino i punti nei quali le superfici di livello di f sono dotate di piano tangente.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{x}{2y} \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

determinando il massimo intervallo su cui la soluzione è definita.

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ e si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, definito da $g(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^T$.

(*i*) Si calcolino:

- la matrice Jacobiana di g

- il rotore di g

- la divergenza di g

(*ii*) Si calcolino:

- $\displaystyle\int_{+\mathrm{fr}D} \langle g, \tau \rangle \, ds$

- $\displaystyle\int_{+\mathrm{fr}D} \langle g, \nu \rangle \, ds$

(*iii*) Si provi che g è conservativo in D *(si noti che non è applicabile il teorema di Poincaré).*