Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2016-2017, sessione estiva, II appello
Corso prof. P. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ◯ **Ingegneria Navale** ◯

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si definisca $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ponendo $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < n\pi, \\ \sin(2x), & \text{se } |x| \geq n\pi. \end{cases}$

(i) Si determini il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$ su $\mathbb{R}$.

(ii) Si traccino i grafici di f_n e di f.

(iii) Si calcoli, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $\sup\limits_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ e si stabilisca se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$.

(iv) Si calcoli, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $\sup\limits_{[-1,10]} |f_n(x) - f(x)|$ e si stabilisca se $(f_n)_n$ converge uniformemente a f sull'intervallo $[-1, 10]$.

ESERCIZIO N. 2. Si definisca $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, ponendo $f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^2 + z^2$.

(i) Si calcoli $\nabla f(x, y, z)$.

(ii) Si calcoli $Hf(x, y, z)$.

(iii) Si determinino i punti critici di f.

(iv) Si calcolino gli autovalori della matrice Hessiana valutata nei punti critici.

(v) Si provi che f cambia segno in ogni intorno di $(0, 0, 0)^T$.

(vi) Si determini la natura dei punti critici.

(vii) Si determinino $\inf_{\mathbb{R}^3} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^3} f$.

$(viii)$ Si stabilisca quali insiemi di livello di f sono superfici regolari in forma implicita.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga $E = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le e^{-x^2},\, 0 \le z < x\right\}$.

(i) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme chiuso.

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme limitato.

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se E è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^3$, almeno in senso generalizzato.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = 1 - x^2(t) \\ y'(t) = y(t) + t^2 x(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 0. \end{cases}$

(i) Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = 1 - x^2(t) \\ x(1) = 1. \end{cases}$

(ii) Si risolva il problema di Cauchy $\begin{cases} x'(t) = 1 - x^2(t) \\ y'(t) = y(t) + t^2 x(t) \\ x(1) = 1, y(1) = 0. \end{cases}$

(iii) Posto $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, si calcolino $\lim_{t \to -\infty} \|\gamma(t)\|$ e $\lim_{t \to +\infty} \|\gamma(t)\|$.