

Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di Studi: Ingegneria Industriale Ingegneria Navale

ESERCIZIO N. 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si definisca $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $f_n(x) = nx \exp(-nx)$.

(i) Si determini l'insieme di convergenza puntuale E_p e il limite puntuale f della successione $(f_n)_n$.

(ii) Si studi, per ogni n , la funzione $|f_n - f|$ in E_p .

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, +\infty[$.

(iv) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $(f_n)_n$ converge uniformemente sull'intervallo $[1, +\infty[$.

(v) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

(vi) Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$.

ESERCIZIO N. 2. Si definisca la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $f(x, y) = x(x - y) + y^2(y - x)$.

(i) Si determinino, rappresentandoli nel piano cartesiano, i punti di annullamento e i segni di f .

(ii) Si calcoli il gradiente di f .

(iii) Si calcoli la matrice Hessiana di f .

(iv) Si determinino i punti critici di f .

(v) Si studi la natura dei punti critici di f .

(vi) Si calcolino $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$.

(vii) Si stabilisca, giustificando le risposte, se gli insiemi di livello $L_0 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ e $L_\pi = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \pi\}$ sono sostegni di curve regolari in forma implicita.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la massa del solido

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2 \wedge 0 \leq z \leq 2\} \setminus \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\},$$

avente densità $\mu(x, y, z) = z$.

RISULTATO

SVOLGIMENTO

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 4. Si definisca la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$.

(i) Si determini la curva di massima discesa $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$ uscente dal punto $(0, 0)^T$.

(ii) Si calcolino

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \nabla f(\gamma(t))$

(iii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se γ è una curva regolare.