Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi sulla geometria e la topologia di $\mathbb{R}^N$
e sulle proprietà topologiche delle funzioni $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$
Professor Franco Obersnel

Esercizio 1 Si provino le seguenti proprietà degli intorni in $\mathbb{R}^N$. Sia $\mathcal{N}_x$ la famiglia degli intorni di x.

a) Sia $U \in \mathcal{N}_x$, allora $x \in U$.

b) Siano $U,\ V \in \mathcal{N}_x$, allora $U \cap V \in \mathcal{N}_x$.

c) Siano $U \in \mathcal{N}_x$ e $V \subseteq \mathbb{R}^N$. Se $U \subset V$, allora $V \in \mathcal{N}_x$.

d) (Proprietà di separazione di Hausdorff) Siano $x \neq y$. Allora esistono $U \in \mathcal{N}_x$, $V \in \mathcal{N}_y$ tali che $U \cap V = \emptyset$.

Esercizio 2 Si provi che un inseme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è chiuso se e solo se l'insieme complementare $\mathbb{R}^N \setminus E$ è aperto in $\mathbb{R}^N$.

Esercizio 3 Si provi che ogni insieme del tipo $]a, b[\, \times\,]c, d[$, $a < b$, è aperto in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4 (Densità di $\mathbb{Q}^2$ in $\mathbb{R}^2$.) Si provi che ogni insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ contiene un punto $(p, q)^T$ con $p, q \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 5 Si provino le seguenti proprietà degli insiemi aperti e degli insiemi chiusi.

a) Sia A unione arbitraria (anche infinita) di insiemi aperti. Allora A è aperto.

b) Sia A intersezione finita di insiemi aperti. Allora A è aperto.

c) Sia C intersezione arbitraria (anche infinita) di insiemi chiusi. Allora C è chiuso.

d) Sia C unione finita di insiemi chiusi. Allora C è chiuso.

Esercizio 6 Si dia un esempio di un intersezione di insiemi aperti di $\mathbb{R}^2$ che non è un insieme aperto.

Esercizio 7 Si spieghi perché la seguente funzione è continua sul suo dominio:

$F(x, y, z) = \left(\sin\left(x\sqrt{\frac{|y|}{z}} \right), \frac{\sin z}{|z|}, \operatorname{sgn}(z) \right)$ dove $\operatorname{sgn}(t) = 1$ se $t > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ e $\operatorname{sgn}(t) = -1$ se $t < 0$.

Esercizio 8 Si scriva l'equazione cartesiana della retta passante per i due punti $(\pi, -2)^T$ e $(e, \sqrt{2})^T$.

(Sol. $(\sqrt{2} + 2)x + (\pi - e)y - (\sqrt{2}\pi + 2e) = 0$)

Esercizio 9 Si scriva l'equazione in forma parametrica della retta ortogonale al vettore $(1,2)^T$ e passante per il punto $(0,1)^T$.

(Sol. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $\varphi(t) = (-2t, t+1)^T$)

Esercizio 10 Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si provi che il grafico di f si può rappresentare come luogo degli zeri di una funzione $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(Sol. $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $F(x,y) = y - f(x)$)

Esercizio 11 Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si trovi una rappresentazione parametrica $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ del grafico di f.

(Sol. $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$; $\varphi(t) = (t, f(t))^T$)

Esercizio 12 Si scriva l'equazione del piano ortogonale alla direzione della retta di equazione $\varphi(t) = (3t-1, 2, 2t+1)^T$ e passante per il punto $(0,2,3)^T$.

(Sol. Un vettore parallelo alla retta è $v = (3,0,2)^T$; un'equazione del piano è $3x + 2z - 6 = 0$)

Esercizio 13 Si trovi il dominio (e lo si disegni o lo si descriva) delle funzioni seguenti:
a) $f(x,y,z) = \log(xy) - z$;
b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2x+y+z-1}$;
c) $f(x,y,z) = \arccos(x^2+y^2+z^2-2x+4y+5)$;
d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-z}$;
e) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$.

(Sol. a) $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y < 0\}$. b) $\mathbb{R}^3$ tranne i punti del piano di equazione $2x + y + z - 1 = 0$. c) Palla chiusa di centro $(1,-2,0)^T$ e raggio 1. d) Punti di $\mathbb{R}^3$ che stanno sotto il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, compresi i punti del paraboloide. e) Parte esterna all'ellissoide di centro l'origine e semiassi $2,3,1$, esclusi i punti dell'ellissoide.)

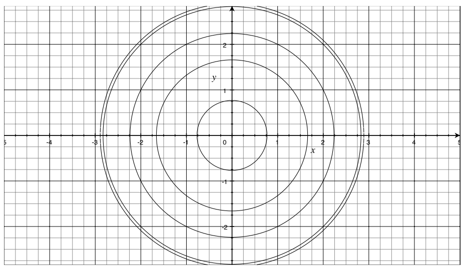
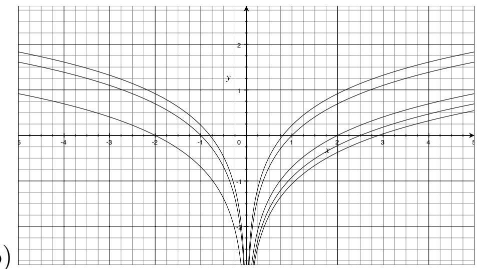
Esercizio 14 (Teorema di Pitagora.) Si ricorda che due vettori x e y di $\mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$. Si verifichi che in $\mathbb{R}^n$, per ogni coppia di vettori x e y mutualmente ortogonali vale la seguente uguaglianza:

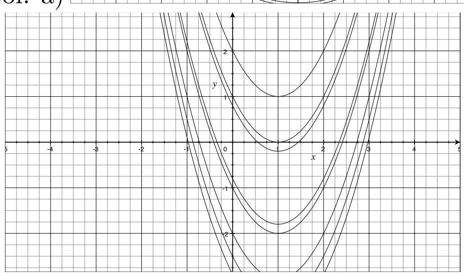
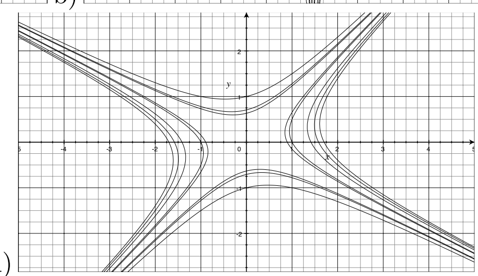
$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

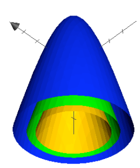
(Sol. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$)

Esercizio 15 Si descrivano o si disegnino le superfici di livello delle funzioni
a) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
b) $f(x,y) = xe^{-y}$;

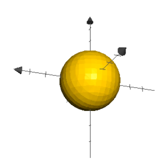
c) $f(x,y) = x^2 - 2x - y$;
d) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + xy$;
e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$;
f) $f(x,y,z) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(Sol. a)  b) 

c)  d) 



e)

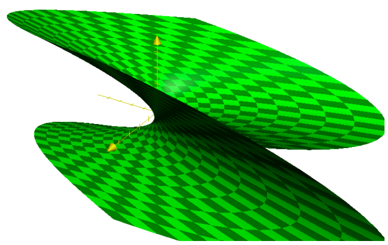


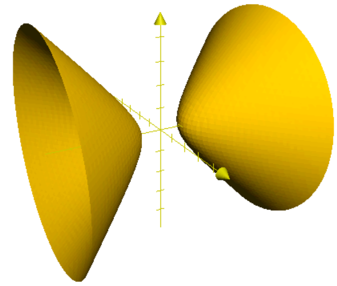
f)

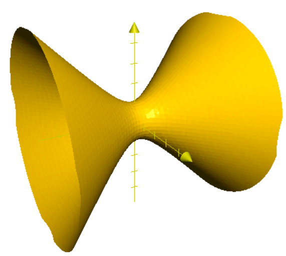
Esercizio 16 Si guardi una qualunque carta topografica sulla quale siano riportate le isoipse. Le strade sono più ripide dove le curve sono più ravvicinate: perché?

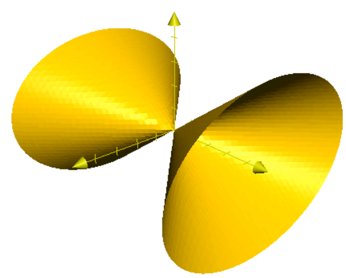
Esercizio 17 Si ponga in corrispondenza ciascuna delle seguenti equazioni con uno dei grafici riportati di seguito in ordine sparso.

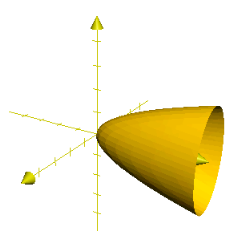
a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$;
b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$;
c) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$;
d) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
e) $y = 2x^2 + z^2$;
f) $y^2 = x^2 + 2z^2$;
g) $x^2 + 2z^2 = 1$;
h) $y = x^2 - z^2$.

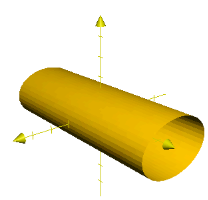


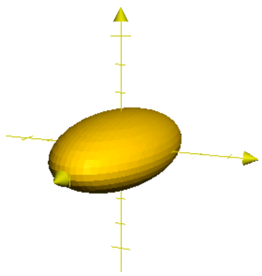


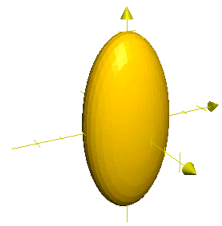












(I grafici corrispondono nell'ordine alle equazioni h,d,c,f,e,g,a,b.)

Esercizio 18 Sia $A \subset \mathrm{I\!R}^N$ un insieme limitato. Detta $\overline{A}$ la chiusura di A, sia $f : \overline{A} \to \mathrm{I\!R}^M$ una funzione continua. Si provi che $f(A)$ è un insieme limitato.

Si dia un esempio di un insieme limitato $A \subset \mathrm{I\!R}$ e di una funzione $f : A \to \mathrm{I\!R}$ tale che $f(A)$ è un insieme illimitato.

(Sol. La chiusura di un limitato è ancora limitata, quindi $\overline{A}$ è compatto; per il teorema di compattezza $f(\overline{A})$ è compatto e quindi limitato, ma allora anche $f(A)$ è limitato. Un esempio come quello richiesto è $f(x) = \operatorname{tg} x$ su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.)

Esercizio 19 Si verifichi che non esiste il seguente limite:

$$\lim_{\|(x,y)^T\| \to +\infty} e^{-|x-y|}.$$

(Sugg. si guardi cosa succede sulla bisettrice del primo e terzo quadrante).

Esercizio 20 Si verifichi che la seguente funzione non è continua nel punto $(0,0)^T$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

Esercizio 21 Si calcolino i limiti:

$a)$ $\displaystyle \lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} xy \operatorname{sen} \frac{1}{x+y} =$ $b)$ $\displaystyle \lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{2x^2}{x^2 + 2y^2} =$

$c)$ $\displaystyle \lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T, x>0, y>0} x^y =$ $d)$ $\displaystyle \lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} =$

(Sol. a) 0, b) non esiste, c) non esiste, d) 0)